

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025

Bài 1: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Quảng Ninh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $7x + 18 - 2\sqrt{x+1} - 8\sqrt{3x+4} = 0$.

Bài 2: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh thành phố Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Giải các phương trình a) $(\sqrt{x+5})^3 = 6x+5$ b) $\sqrt[3]{3x+6} + \sqrt{23-x} = 7$

Bài 3: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $x^2 + 3x + 4 = 2(x+1)\sqrt{x+3}$

Bài 4: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $x^2 = (2x-9)(\sqrt{x^2+2x-8}-2)$

Bài 5 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên – tỉnh Quảng Bình năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{3x+6} + \sqrt{x+3} = 5$.

Bài 6 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung (Đề 1) – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x^2 + 5x - 4 - 2(x+1)\sqrt{3x-1} = 0$.

Bài 7 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung (Đề 2) – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2-4} - 2x + 2$.

Bài 8 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên- tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{\sqrt{2x-1}+1} = x^2 - 4x + 3$.

Bài 9 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên- tỉnh Lai Châu năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$.

Bài 10 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên- thành phố Hải Phòng năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $12\sqrt{x+2} + \sqrt{51+15x} = 3x^2 + 2x + 17$.

Bài 11 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin- tỉnh Hoà Bình năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $3x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - x - 2} = 8$

Bài 12 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} + 5 = 4\sqrt{(x+3)(2-x)}$.

Bài 13 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 - 4}} = 2x^2 - 6$.

Bài 14 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 1} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Bài 15 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $(\sqrt{x} - 1)^2 - \sqrt{x} - 5 = 0$.

Bài 16 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Tây Ninh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x - 3\sqrt{x-3} - 1 = 0$.

Bài 17 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán Tin – tỉnh Sơn La năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $x - \sqrt{x-2} = 4$.

Bài 18 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Bài 19 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $2\sqrt{x+6} + x^2 + 4x - 27 = 0$.

Bài 20 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2} = 2x - 4$.

Bài 21 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $4x^2 + 5y^2 + 4xy - 4x - 2y - 8 = 0$

Bài 22 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $\sqrt{x^2 - x} = 4 + 3x - 3x^2$.

Bài 23 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – Trường THPT Chuyên Lam Sơn năm học 2024 –

2025) Giải phương trình $x^2 + x - 2 - (x + 6)\sqrt{x+1} = 0$

Bài 24 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Phan Bội Châu năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$

Bài 25 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $4x^3 + 31x^2 - 27 = 12(x^2 + x)\sqrt{1-x}$

Bài 26 : (Đề thi khảo sát vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lam Sơn năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = x^2 - x + 3$.

Bài 27 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán & Chuyên Tin – THPT Chuyên Hùng Vương năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $12x^2 - 2x - 1 = x\sqrt{2x+1}$.

Bài 28 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $(x+2)(x-1) = 4 - 2\sqrt{x(x+1)+2}$.

Bài 29 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – thành phố Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$

Bài 30 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – Trường THPT Chuyên KHTN năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3-2x} = 1 + \sqrt{2-x} + \frac{1}{3}\sqrt{x-1}$

Bài 31 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – Sở GD&ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 - 3x - 2$

Bài 32 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

Giải các phương trình a) $\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} = 8$ b) $(x-3)(x-2)(x+1)(x+6) = 28x^2$

Bài 33 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$.

Bài 34 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Hưng Yên năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x^2 + x + 2 - (x+2)\sqrt{x^2 - x + 2} = 0$

Bài 35 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\frac{5x}{x^2+3} + \frac{2x^2-x+6}{x^2-2x+3} = 4.$

Bài 36 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^3+1} + x^2 - 3x - 1 = 0.$

Bài 37 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – thành phố Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = x-24.$

Bài 38 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x} = x^2 - 4x + 1.$

Bài 39 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Tiền Giang năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $2x^2 + 2x - 1 = 3x\sqrt{2x-1}.$

Bài 40 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán + Chuyên Tin – tỉnh Long An năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}.$

Bài 41 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$

Bài 42 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $2024\sqrt{2024x-2023} + \sqrt{2025x-2024} = 2025$

Bài 43 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025)Giải

phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 82.$

Bài 44 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $3x + 2\sqrt{(x^2+5)(x-1)} = x^2 + 8$

Bài 45 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x.$

Bài 46 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường THPT Lê Quý Đôn tỉnh Khánh Hoà năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $(x + 2)^2 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$

Bài 47 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{5}{4}, (x \in \mathbb{R}).$

Bài 48 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy = -4x + 2y + 1.$

Bài 49 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $(x-1)^2 - x\sqrt{x-1} + 1 = 0.$

Bài 50 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2 + \sqrt{2x + 5}$

Bài 51 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường THPT Lê Quý Đôn thành phố Đà Nẵng năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $8x^2 + 16x - 7 = (8x + 3)\sqrt{5x - 1}$

Bài 52 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – Trường THPT Chuyên KHTN năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 10x + 30}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}}$

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Quảng Ninh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $7x + 18 - 2\sqrt{x+1} - 8\sqrt{3x+4} = 0$.

Lời giải

$$7x + 18 - 2\sqrt{x+1} - 8\sqrt{3x+4} = 0 \quad (\text{Điều kiện: } x \geq -1)$$

$$7x + 18 - 2\sqrt{x+1} - 8\sqrt{3x+4} = 0(1) \Rightarrow (\sqrt{x+1} - 1)^2 + 2(\sqrt{3x+4} - 2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} = 1 \\ \sqrt{3x+4} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 0$.

Bài 2: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - thành phố Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Giải các phương trình: a) $(\sqrt{x+5})^3 = 6x+5$ b) $\sqrt[3]{3x+6} + \sqrt{23-x} = 7$

Lời giải

$$a) (\sqrt{x+5})^3 = 6x+5 \quad (1)$$

$$\text{Đặt: } \sqrt{x+5} = t \quad (t \geq 0)$$

$$\text{Khi đó: (1) trở thành } t^3 - 6t^2 + 25 = 0$$

$$\Rightarrow (t-5)(t^2 - t - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t-5=0 \\ t^2 - t - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = 5 \quad (tm) \\ t = \frac{1+\sqrt{21}}{2} \quad (tm) \\ t = \frac{1-\sqrt{21}}{2} \quad (loai) \end{cases}$$

$$\text{TH1: } t = 5 \Rightarrow x = 20$$

$$\text{TH2: } t = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$$

$$b) \sqrt[3]{3x+6} + \sqrt{23-x} = 7$$

$$\text{Đặt: } a = \sqrt[3]{3x+6}; b = \sqrt{23-x}$$

$$(x \leq 23, b \geq 0)$$

$$\text{Ta có hệ phương trình: } \begin{cases} a+b=7 \\ a^3+3b^2=75 \end{cases}$$

$$\text{Từ phương trình thứ nhất ta có: } b = 7 - a.$$

Thay vào phương trình thứ 2 ta được:

$$a^3 + 3(7-a)^2 = 75$$

$$a^3 + 3a^2 - 42a + 72 = 0$$

$$a^3 - 3a^2 + 6a^2 - 18a - 24a + 72 = 0$$

$$(a-3)(a^2 + 6a - 24) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -3 - \sqrt{33} \\ a = -3 + \sqrt{33} \end{cases}$$

$\Rightarrow x = \left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2 - 5 = \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là:</p> $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2}; 20\right\}$	$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -110 - 20\sqrt{33} \\ x = -110 + 20\sqrt{33} \end{cases}$ <p>Vậy tập nghiệm của phương trình là:</p> $\{7; -110 - 20\sqrt{33}; -110 + 20\sqrt{33}\}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Bài 3: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình: $x^2 + 3x + 4 = 2(x+1)\sqrt{x+3}$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -3$. Ta có: $x^2 + 3x + 4 = 2(x+1)\sqrt{x+3}$

$$(x+1-\sqrt{x+3})^2 = 0$$

$$x+1-\sqrt{x+3} = 0$$

$$x+1 = \sqrt{x+3}$$

$$(x+1)^2 = x+3$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

Giải phương trình trên ta được: $x = 1$ hoặc $x = -2$

Đối chiếu với điều kiện ở trên, suy ra phương trình có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 4: (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình: $x^2 = (2x-9)(\sqrt{x^2+2x-8}-2)$

Lời giải

Điều kiện xác định $x^2 + 2x - 8 \geq 0 \Rightarrow x \leq -4$ hoặc $x \geq 2$ (*)

Phương trình được viết lại là $x^2 + 2x - 8 - (2x-9)\sqrt{x^2+2x-8} + (2x-10) = 0$.

Đặt $t = \sqrt{x^2+2x-8}$ thì được $t^2 - (2x-9)t + 2x-10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2x-10 \end{cases}$

Với $t = 1$ thì $\sqrt{x^2+2x-8} = 1 \Rightarrow x^2 + 2x - 9 = 0 \Rightarrow x = -1 \pm \sqrt{10}$ (thỏa mãn điều kiện (*))

Với $t = 2x-10$ thì $\sqrt{x^2+2x-8} = 2x-10 \Rightarrow \begin{cases} 2x-10 \geq 0 \\ x^2 + 2x - 8 = (2x-10)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x^2 - 14x + 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 7 + \sqrt{13}.$$

Vậy phương trình cho có tập nghiệm là $S = \{7 + \sqrt{13}; -1 \pm \sqrt{10}\}$.

Cách khác: Chuyển vế, bình phương để khử căn ta được phương trình hệ quả

$$(2x - 9)^2 (x^2 + 2x - 8) = (x^2 + 4x - 18)^2$$

$$x^4 - 12x^3 - x^2 + 198x - 324 = 0$$

$$(x^2 + 2x - 9)(x^2 - 14x + 36) = 0 \Rightarrow x \in \{-1 \pm \sqrt{10}; 7 \pm \sqrt{13}\}$$

Thử lại và kết luận.

Bài 5 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Quảng Bình năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $\sqrt{3x+6} + \sqrt{x+3} = 5$.

Lời giải

$$\text{ĐK: } x \geq -2. \text{ Ta có: } \sqrt{3x+6} + \sqrt{x+3} = 5 \Rightarrow \frac{3x-3}{\sqrt{3x+6}+3} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3}+2} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1) \left(\frac{3}{\sqrt{3x+6}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} \right) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{(vì } \frac{3}{\sqrt{3x+6}+3} + \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} > 0 \text{ với mọi } x \geq -2)$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$.

Bài 6 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung (Đề 1) - tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $x^2 + 5x - 4 - 2(x+1)\sqrt{3x-1} = 0$.

Lời giải

$$\text{Cách 1. Điều kiện: } x \geq \frac{1}{3}. \text{ Đặt } \begin{cases} a = x+1 \\ b = \sqrt{3x-1} \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 5x.$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } a^2 + b^2 - 2ab = 4 \Rightarrow (a-b)^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} a-b = 2 \\ a-b = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } a-b = 2, \text{ ta có: } x+1 - \sqrt{3x-1} = 2 \Rightarrow \sqrt{3x-1} = x-1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 3x-1 = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \text{ (thoả mãn điều kiện)}$$

$$\text{Với } a - b = -2, \text{ ta có } x + 1 - \sqrt{3x - 1} = -2 \Rightarrow \sqrt{3x - 1} = x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 3x + 10 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

$$\text{Cách 2: Điều kiện : } x \geq \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 4 - 2x\sqrt{3x - 1} - 2\sqrt{3x - 1} = 0 \Rightarrow [x^2 - 2x\sqrt{3x - 1} + (3x - 1)] + (2x - 2\sqrt{3x - 1}) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x - \sqrt{3x - 1})^2 + 2(x - \sqrt{3x - 1}) - 3 = 0$$

$$\text{Đặt } t = x - \sqrt{3x - 1}, \text{ phương trình trở thành: } t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -3 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1 \text{ ta có } x - \sqrt{3x - 1} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{3x - 1} = x - 1 \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \text{ (thoả mãn)}$$

$$\text{Với } t = -3 \text{ ta có } x - \sqrt{3x - 1} = -3 \Rightarrow \sqrt{3x - 1} = x + 3 \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x^2 + 3x + 10 = 0 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

$$\text{Kết luận phương trình có nghiệm duy nhất } x = \frac{5 + \sqrt{17}}{2}.$$

Bài 7 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chung (Đề 2) – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 2} = 2\sqrt{x^2 - 4} - 2x + 2.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } x \geq 2, \text{ đặt } t = \sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 2} \Rightarrow t^2 = 2x - 2\sqrt{x^2 - 4}$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } t^2 + t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 1, \text{ ta có: } \sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 2} = 1 \Rightarrow \sqrt{x - 2} = 1 + \sqrt{x + 2} \Rightarrow x - 2 = (1 + \sqrt{x + 2})^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x + 2} = -5, \text{ phương trình vô nghiệm}$$

Với $t = -2$, ta có $\sqrt{x-2} - \sqrt{x+2} = -2 \Rightarrow \sqrt{x+2} = 2 + \sqrt{x-2} \Rightarrow x+2 = (2 + \sqrt{x-2})^2 \Leftrightarrow x = 2$

(thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Bài 8 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên- tỉnh Bắc Giang năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình: $\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{\sqrt{2x-1}+1} = x^2-4x+3$.

Lời giải

Điều kiện xác định : $x \geq \frac{1}{2}$

$$\frac{(x-1)(x^2-5x+6)}{\sqrt{2x-1}+1} = x^2-4x+3 \Rightarrow (x^2-4x+3)(\sqrt{2x-1}+1) = (x-1)(x^2-5x+6)$$

$$\Rightarrow (x^2-4x+3)(\sqrt{2x-1}+1) = (x^2-4x+3)(x-2) \Rightarrow (x^2-4x+3)(\sqrt{2x-1}-x+3) = 0$$

$$\text{TH1: } x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-1)(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } \sqrt{2x-1}-x+3=0 \Rightarrow \sqrt{2x-1}=x-3 \Rightarrow \begin{cases} 2x-1=(x-3)^2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-8x+10=0 \\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=4-\sqrt{6} \\ x=4+\sqrt{6} \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow x=4+\sqrt{6}$$

Vậy tập hợp nghiệm của phương trình đã cho là $\{1; 3; 4 + \sqrt{6}\}$.

Bài 9 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên- tỉnh Lai Châu năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$.

Lời giải

Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$

$$\sqrt{3x+1} + \sqrt{2-x} = 3$$

$$2x + 3 + 2\sqrt{(3x+1)(2-x)} = 9$$

$$\sqrt{-3x^2 + 5x + 2} = 3 - x$$

$$\begin{cases} 3 - x \geq 0 \\ -3x^2 + 5x + 2 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 3 \\ 4x^2 - 11x + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{7}{4} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện, nghiệm của phương trình là: $x = 1$; $x = \frac{7}{4}$

Bài 10 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên- thành phố Hải Phòng năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $12\sqrt{x+2} + \sqrt{51+15x} = 3x^2 + 2x + 17$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x \geq -2$.

Khi đó, phương trình đã cho tương đương với :

$$4[3\sqrt{x+2} - (x+4)] + \sqrt{51+15x} - (x+7) = 3(x^2 - x - 2)$$

$$4\left[\frac{-x^2 + x + 2}{3\sqrt{x+2} + (x+4)}\right] + \frac{-x^2 + x + 2}{\sqrt{51+15x} + (x+7)} - 3(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x^2 - x - 2)\left[\frac{4}{3\sqrt{x+2} + (x+4)} + \frac{1}{\sqrt{51+15x} + (x+7)} + 3\right] = 0 (*)$$

$$\text{Vì } x \geq -2 \text{ nên ta có } \begin{cases} \frac{4}{3\sqrt{x+2} + (x+4)} > 0 \\ \frac{1}{\sqrt{51+15x} + (x+7)} > 0 \end{cases}$$

$$\text{Suy ra : } \frac{4}{3\sqrt{x+2} + (x+4)} + \frac{1}{\sqrt{51+15x} + (x+7)} + 3 > 0.$$

$$\text{Do đó, phương trình (*) trở thành } x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện, ta được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{-1; 2\}$.

Bài 11 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin- tỉnh Hoà Bình năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình: $3x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - x - 2} = 8$

Lời giải

$$3x^2 - 3x - \sqrt{x^2 - x - 2} = 8 \Rightarrow 3(x^2 - x - 2) - \sqrt{x^2 - x - 2} - 2 = 0 \quad (1)$$

• ĐK: $x^2 - x - 2 \geq 0$

• Đặt $t = \sqrt{x^2 - x - 2}$ ($t \geq 0$), phương trình (1) trở thành: $3t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \text{ (TM)} \\ t = -\frac{2}{3} \text{ (KTM)} \end{cases}$

• $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 - x - 2} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1 + \sqrt{13}}{2} \text{ (TM)} \\ x = \frac{1 - \sqrt{13}}{2} \text{ (TM)} \end{cases}$

Vậy phương trình có các nghiệm $x_1 = \frac{1 + \sqrt{13}}{2}$; $x_2 = \frac{1 - \sqrt{13}}{2}$.

Bài 12 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Bình Phước năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} + 5 = 4\sqrt{(x+3)(2-x)}$.

Lời giải

Điều kiện: $-3 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}$, ($t \geq 0$) $\Rightarrow t^2 = 5 + 2\sqrt{(x+3)(2-x)} \Rightarrow 2\sqrt{(x+3)(2-x)} = t^2 - 5$

Phương trình đã cho trở thành: $t + 5 = 2(t^2 - 5) \Rightarrow 2t^2 - t - 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (t/m)} \\ t = \frac{-5}{2} \text{ (ko t/m)} \end{cases}$

Với $t = 3 \Rightarrow \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} = 3 \Rightarrow 5 + 2\sqrt{(x+3)(2-x)} = 9 \Rightarrow \sqrt{(x+3)(2-x)} = 2$

$\Rightarrow -x^2 - x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (t/m)} \\ x = -2 \text{ (t/m)} \end{cases}$. Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2; 1\}$.

Bài 13 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Yên Bái năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 - 4}} = 2x^2 - 6$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2 + 4\sqrt{x^2 - 4}} = 2x^2 - 6$, (điều kiện: $x \leq -2; x \geq 2$)

$$\sqrt{x^2 - 4 + 4\sqrt{x^2 - 4} + 4} = 2x^2 - 6$$

$$\sqrt{(\sqrt{x^2 - 4} + 2)^2} = 2x^2 - 6$$

$$\sqrt{x^2 - 4} + 2 = 2x^2 - 6, \left(\text{do } \sqrt{x^2 - 4} + 2 > 0\right)$$

$$\sqrt{x^2 - 4} - 2(x^2 - 4) = 0$$

$$\sqrt{x^2 - 4}(1 - 2\sqrt{x^2 - 4}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - 4} = 0 \\ \sqrt{x^2 - 4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = \frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, (t/m) \\ x = -2, (t/m) \\ x = \frac{\sqrt{17}}{2}, (t/m) \\ x = -\frac{\sqrt{17}}{2}, (t/m) \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là : $S = \left\{ -2; 2; \frac{\sqrt{17}}{2}; -\frac{\sqrt{17}}{2} \right\}$

Bài 14 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - tỉnh Hà Nam năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^3 + 1} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Lời giải

Điều kiện: $x^3 + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

$$\sqrt{x^3 + 1} + x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} + (x^2-x+1) - 2(x+1) = 0$$

Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{x^2-x+1}$; $u \geq 0$, $v > 0$. Phương trình đã cho trở thành:

$$uv + v^2 - 2u^2 = 0 \Rightarrow (u-v)(2u+v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u-v=0 \\ 2u+v=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u=v \\ 2u=-v \end{cases}$$

Với $u = v$ ta được $\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ (thỏa mãn phương trình)

Với $2u = -v$ ta được $2\sqrt{x+1} = -\sqrt{x^2-x+1}$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 2$.

Bài 15 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $(\sqrt{x} - 1)^2 - \sqrt{x} - 5 = 0$.

Lời giải

$$(\sqrt{x} - 1)^2 - \sqrt{x} - 5 = 0(1)$$

Điều kiện xác định: $x \geq 0$

$$\text{Từ (1) ta có: } x - 2\sqrt{x} + 1 - \sqrt{x} - 5 = 0 \Rightarrow x - 3\sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 4) = 0$$

Do $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} + 1 > 0 \Rightarrow \sqrt{x} - 4 = 0 \Rightarrow x = 16$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 16$

Bài 16 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Tây Ninh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x - 3\sqrt{x-3} - 1 = 0$.

Lời giải

Đặt $t = \sqrt{x-3}, t \geq 0$ phương trình đã cho trở thành: $t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases}$ (nhận)

TH1: Với $t = 1$, tìm được $x = 4$

TH2: Với $t = 2$, tìm được $x = 7$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4, x = 7$

Bài 17 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán Tin – tỉnh Sơn La năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $x - \sqrt{x-2} = 4$.

Lời giải

Điều kiện: $x - 2 \geq 0$ hay $x \geq 2$ (*)

$$x - \sqrt{x-2} = 4$$

$$\sqrt{x-2} = x - 4$$

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \\ x - 2 = (x - 4)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x^2 - 9x + 18 = 0 \end{cases}$$

Giải phương trình $x^2 - 9x + 18 = 0$ ta được $x = 6; x = 3$

So sánh với điều kiện (*) của phương trình và điều kiện bình phương hai vế, loại nghiệm $x = 3$.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 6$.

Bài 18 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Lời giải

$$\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5$$

$$\text{Ta có: } \sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} > 0 \Rightarrow 3x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{x^2 + 12} - 4 + 3 - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 6$$

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} + \frac{4 - x^2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} - 3(x - 2) = 0$$

$$(x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} - 3 \right) = 0$$

$$\text{Ta có: } 4 + \sqrt{x^2 + 12} > 3 + \sqrt{x^2 + 5}$$

$$\frac{1}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} < \frac{1}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$\frac{x + 2}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} < \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} \quad \left(\text{vì } x > \frac{5}{3} \right)$$

$$\frac{x + 2}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} - \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} < 0$$

$$\frac{x + 2}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} - \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} - 3 < 0$$

Vậy phương trình có một nghiệm $x = 2$

Bài 19 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $2\sqrt{x+6} + x^2 + 4x - 27 = 0$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq -6$

$$\text{Ta có: } 2\sqrt{x+6} + x^2 + 4x - 27 = 0$$

$$2(\sqrt{x+6}-3)+(x^2+4x-21)=0 \Rightarrow \frac{2(x-3)}{\sqrt{x+6}+3}+(x-3)(x+7)=0$$

$$(x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{x+6}+3}+x+7\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ \frac{2}{\sqrt{x+6}+3}+x+7=0 \end{cases}$$

Với điều kiện $x \geq -6$ thì $\frac{2}{\sqrt{x+6}+3}+x+7 > 0$.

Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.

Bài 20 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}=2x-4$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}=2x-4$$

$$(2x-4)\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{3x-2}}+1\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ \frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}+1=0 \end{cases}$$

Do phương trình $\frac{1}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+2}}+1=0$ vô nghiệm.

Nên $x=2$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=2$

Bài 21 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $4x^2+5y^2+4xy-4x-2y-8=0$

Lời giải

Ta có: $(2x+y-1)^2+4y^2=9 \Rightarrow 9 \geq 4y^2 \Rightarrow y^2 \leq \frac{9}{4} \Rightarrow y^2 \in \{1;0\}$

Với $y^2=1 \Rightarrow (2x+y-1)^2=5 \Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nguyên

$$\text{Với } y^2 = 0 \Rightarrow (2x + y - 1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y - 1 = 3 \\ 2x + y - 1 = -3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2; y = 0 \\ x = -1; y = 0 \end{cases} \text{ (Thử lại thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(-1; 0); (2; 0)\}$$

Bài 22 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025)

$$\text{Giải phương trình: } \sqrt{x^2 - x} = 4 + 3x - 3x^2.$$

Lời giải

$$\text{Phương trình có dạng: } 3(x^2 - x) + \sqrt{x^2 - x} - 4 = 0.$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 - x} \text{ (} t \geq 0 \text{)} \text{ ta được phương trình: } 3t^2 + t - 4 = 0.$$

$$\text{Giải phương trình này ta được } t_1 = 1 \text{ (thỏa mãn), } t_2 = -\frac{4}{3} \text{ (loại).}$$

$$\text{Với } t_1 = 1 \text{ thì } \sqrt{x^2 - x} = 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

$$\text{Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm } S = \left\{ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}); \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \right\}.$$

Bài 23 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – Trường THPT Chuyên Lam Sơn tỉnh Thanh Hoá năm học 2024 – 2025)

$$\text{Giải phương trình } x^2 + x - 2 - (x + 6)\sqrt{x + 1} = 0$$

Lời giải

$$x^2 + x - 2 - (x + 6)\sqrt{x + 1} = 0 \text{ (} x \geq -1 \text{)}$$

$$\text{Đặt } a = \sqrt{x + 1} \text{ (} a \geq 0 \text{)} \Rightarrow x = a^2 - 1$$

$$\text{Ta có phương trình: } (a^2 - 1)^2 + (a^2 - 1) - 2 = (a^2 + 5)a \Rightarrow a^4 - a^3 - a^2 - 5a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a^2 - 2a - 1)(a^2 + a + 2) = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 1 = 0 \text{ (do } a^2 + a + 2 > 0 \text{)} \Rightarrow a = \sqrt{2} + 1 \text{ (do } a \geq 0 \text{)}$$

Với $a = \sqrt{2} + 1$ thì $x = a^2 - 1 = 2\sqrt{2} + 2$

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 2\sqrt{2} + 2$

Bài 24 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Phan Bội Châu tỉnh Nghệ An năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x^4 - 6x^2 - 20x - 24 = 0$

Lời giải

Ta biến đổi phương trình như sau:

$$\Rightarrow (x^2 - 2x - 6)(x^2 + 2x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 6 = 0 \quad (\text{Vì } x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3 > 3 > 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \sqrt{7} \\ x = 1 - \sqrt{7} \end{cases}$$

Bài 25 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – THPT Chuyên Hà Tĩnh tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $4x^3 + 31x^2 - 27 = 12(x^2 + x)\sqrt{1-x}$

Lời giải

Điều kiện: $x \leq 1$

$$4x^3 + 31x^2 - 27 = 12(x^2 + x)\sqrt{1-x}$$

$$(x+1)(4x^2 + 27x - 27 - 12x\sqrt{1-x}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ 4x^2 + 27x - 27 - 12x\sqrt{1-x} = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Giải (1) ta có: $(2x - 9\sqrt{1-x})(2x + 3\sqrt{1-x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x = 9\sqrt{1-x} \\ 2x = -3\sqrt{1-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 + 81x - 81 = 0 \\ x \leq 0 \\ 4x^2 + 9x - 9 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{-81 \pm 9\sqrt{97}}{8} \\ x \leq 0 \\ x = \frac{3}{4} (l) \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-81 + 9\sqrt{97}}{8} \\ x = -3 \end{cases}$$

Vậy $S = \left\{ \frac{-81 + 9\sqrt{97}}{8}; -1; -3 \right\}$

Bài 26 : (Đề thi khảo sát vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lam Sơn tỉnh Thanh Hoá năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = x^2 - x + 3$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$. Ta có: $\sqrt{3x-2} + \sqrt{5x-1} = x^2 - x + 3$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

$$(x^2 - 3x + 2) \left[\frac{1}{\sqrt{3x-2} + x} + \frac{1}{\sqrt{5x-1} + (x+1)} + 1 \right] = 0$$

Ta có: $\frac{1}{\sqrt{3x+1} + (x+1)} + \frac{1}{\sqrt{5x+4} + (x+2)} + 1 > 0, \forall x \geq \frac{2}{3}$

Suy ra: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$ (thoả mãn)

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x = 1, x = 2$.

Bài 27 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán & Chuyên Tin – THPT Chuyên Hùng Vương tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $12x^2 - 2x - 1 = x\sqrt{2x+1}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{2}$ (*).

Xét $x = 0$: Không là nghiệm của phương trình.

Xét $x \neq 0$: Chia cả hai vế của phương trình cho x^2 ta được:

$$12 - \frac{2x+1}{x^2} = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$$

Đặt $t = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$, phương trình đã cho trở thành: $12 - \frac{2x+1}{x^2} = \frac{\sqrt{2x+1}}{x}$

Với $t = 3 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = 3x \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 9x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{10}}{9}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Với $t = -4 \Rightarrow \sqrt{2x+1} = -4x \Rightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 16x^2 - 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1-\sqrt{17}}{16}$ (thỏa mãn điều kiện (*)).

Vậy phương trình có hai nghiệm là $x = \frac{1+\sqrt{10}}{9}$ và $x = \frac{1-\sqrt{17}}{16}$.

Bài 28 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $(x+2)(x-1) = 4 - 2\sqrt{x(x+1)+2}$.

Lời giải

Ta có: $x^2 + x - 6 + 2\sqrt{x^2 + x + 2} = 0$ (*)

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x + 2}$ ($t \geq 0$). Phương trình (*) trở thành $t^2 + 2t - 8 = 0$.

Giải phương trình ta được $t = 2$ (nhận) hoặc $t = -4$ (loại).

Với $t = 2$, ta có: $\sqrt{x^2 + x + 2} = 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$ hoặc $x = -2$.

Bài 29 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – thành phố Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq -2$

$$x(x+1) + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$$

$$x^2 + x + 2x\sqrt{x+2} + 2 = 0$$

$$x^2 + 2x\sqrt{x+2} + x + 2 = 0$$

$$(x + \sqrt{x+2})^2 = 0$$

$$\sqrt{x+2} = -x \quad (x \leq 0)$$

$$x + 2 = x^2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1(tm) \\ x = 2(ktm) \end{cases}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1$

Bài 30 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – Trường THPT Chuyên KHTN năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{3-2x} = 1 + \sqrt{2-x} + \frac{1}{3}\sqrt{x-1}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $1 \leq x \leq \frac{3}{2}$.

Ta sẽ chứng minh với điều kiện trên của bài toán thì: $\sqrt{2-x} + 1 \geq \sqrt{x} + \sqrt{3-2x}$

Thật vậy, bình phương hai vế ta có: $1 + 2 - x + 2\sqrt{2-x} \geq x + 3 - 2x + 2\sqrt{x(3-2x)}$

hay cần chứng minh $\sqrt{2-x} \geq \sqrt{x(3-2x)}$

Bình phương hai vế lại có $3x - 2x^2 \leq 2 - x$ hay $2(x-1)^2 \geq 0$ (luôn đúng).

Do đó ta có $1 + \sqrt{2-x} + \frac{1}{3}\sqrt{x-1} \geq 1 + \sqrt{2-x} \geq \sqrt{x} + \sqrt{3-2x}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Nghiệm này thoả mãn điều kiện xác định.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Bài 31 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – Sở GD&ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 3x} = x^2 - 3x - 2$

Lời giải

Điều kiện: $x^2 - 3x \geq 0$

Đặt $\sqrt{x^2 - 3x} = t \geq 0$

Phương trình đã cho trở thành: $t = t^2 - 2 \Rightarrow t = 2$ (do $t \geq 0$) $\Rightarrow \sqrt{x^2 - 3x} = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} (tm)$

Vậy phương trình có nghiệm $x = -1, x = 4$

Bài 32 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

Giải các phương trình a) $\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} = 8$ b) $(x-3)(x-2)(x+1)(x+6) = 28x^2$

Lời giải

<p>a) Điều kiện: $x \geq \frac{2}{3}$</p> <p>Nếu $x > 2$ thì $\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} > \sqrt{4} + 3\sqrt{4} = 8$, mâu thuẫn</p> <p>Nếu $\frac{2}{3} \leq x < 2$ thì</p> <p>$\sqrt{3x-2} + 3\sqrt{x+2} < \sqrt{4} + 3\sqrt{4} = 8$, mâu thuẫn</p> <p>Do đó, $x = 2$</p> <p>Thử lại thỏa mãn</p> <p>Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 2$</p>	<p>b) $(x-3)(x-2)(x+1)(x+6) = 28x^2$</p> <p>$(x^2 + 6 - 5x)(x^2 + 6 + 7x) = 28x^2$</p> <p>Đặt $a = x^2 + x + 6$ thì ta có</p> <p>$(a - 6x)(a + 6x) = 28x^2$</p> <p>Hay $a^2 - 36x^2 = 28x^2$.</p> <p>Từ đó $a = 8x$ hoặc $a = -8x$</p> <p>Xét các trường hợp cụ thể, ta tìm được tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là</p> <p>$x = 1, x = 6, x = \frac{-9 + \sqrt{57}}{2}; x = \frac{-9 - \sqrt{57}}{2}$</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Bài 33 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 5x^2 + 4x \geq 0 \\ x^2 - 3x - 18 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6 \\ x \geq 0 \end{cases}$

$$\sqrt{5x^2 + 4x} - \sqrt{x^2 - 3x - 18} = 5\sqrt{x}$$

$$\sqrt{5x^2 + 4x} - 5\sqrt{x} = \sqrt{x^2 - 3x - 18}$$

$$5x^2 + 4x - 10x\sqrt{5x + 4} + 25x = x^2 - 3x - 18$$

$$4x^2 + 32x + 18 = 10x\sqrt{5x + 4}$$

$$16x^4 + 256x^3 + 1168x^2 + 1152x + 324 = 100x^2(5x + 4)$$

$$4(x - 9)(4x + 3)(x^2 - 7x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} x = 9(tm) \\ x = \frac{3}{4}(loi) \\ x = \frac{7 + \sqrt{61}}{2}(tm) \\ x = \frac{7 - \sqrt{61}}{2}(loi) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ 9; \frac{7 + \sqrt{61}}{2} \right\}.$$

Bài 34 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Toán - tỉnh Hưng Yên năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $x^2 + x + 2 - (x + 2)\sqrt{x^2 - x + 2} = 0$

Lời giải

$$x^2 + x + 2 - (x + 2)\sqrt{x^2 - x + 2} = 0$$

Đặt $\sqrt{x^2 - x + 2} = a$ ($a > 0$). Phương trình trở thành $x^2 + x + 2 = a^2 + 2x$

Thay vào phương trình ta có:

$$a^2 + 2x - xa - 2a = 0 \Rightarrow a(a - x) + 2(x - a) = 0 \Rightarrow (a - x)(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = x \\ a = 2 \end{cases}$$

TH1: $a = x$ ($x > 0$)

$$\Rightarrow x^2 - x + 2 = x^2$$

TH2: $a = 2$ (thỏa mãn $a > 0$)

$$\Rightarrow x^2 - x + 2 = 4 \Rightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x \in \{-1; 2\}$.

Bài 35 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\frac{5x}{x^2+3} + \frac{2x^2-x+6}{x^2-2x+3} = 4$.

Lời giải

Ta thấy $x^2 - 2x + 3 > 0, \forall x$ và $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình.

Đặt $t = \frac{x^2+3}{x}$. Khi đó phương trình ban đầu trở thành:

$$\frac{5x}{x^2+3} + \frac{2 \cdot \frac{x^2+3}{x} - 1}{\frac{x^2+3}{x} - 2} = 4 \Rightarrow \frac{5}{t} + \frac{2t-1}{t-2} = 4 \Rightarrow \frac{5(t-2) + (2t-1)t}{t(t-2)} = 4 \Rightarrow 2t^2 + 4t - 10 = 4t^2 - 8t$$

$$\Rightarrow 2t^2 - 12t + 10 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 1 \end{cases}$$

Trường hợp: $t = 5 \Rightarrow \frac{x^2+3}{x} = 5 \Rightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{5-\sqrt{13}}{2} \end{cases}$. (thỏa mãn)

Trường hợp: $t = 1 \Rightarrow \frac{x^2+3}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$. (vô nghiệm)

Vậy phương trình có tập nghiệm là $x \in \left\{ \frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5-\sqrt{13}}{2} \right\}$

Bài 36 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán, Tin – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $\sqrt{x^3+1} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Lời giải

Điều kiện: $x^3 + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$.

$$\sqrt{x^3+1} + x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} + (x^2-x+1) - 2(x+1) = 0$$

$$\text{Đặt } u = \sqrt{x+1}; v = \sqrt{x^2-x+1}; u \geq 0, v > 0$$

$$\text{Phương trình đã cho trở thành: } uv + v^2 - 2u^2 = 0 \Rightarrow (u-v)(2u+v) = 0$$

Xét 2 trường hợp:

$$\text{TH1: Với } u = v \text{ ta được } \sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{x+1} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn phương trình)}$$

$$\text{TH2: Với } 2u = -v \text{ ta được } 2\sqrt{x+1} = -\sqrt{x^2-x+1} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x=0$; $x=2$.

Bài 37: (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – thành phố Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

$$\text{Giải phương trình } (x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = x-24.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x+3 \\ v = \sqrt{-x^2-8x+48} \end{cases} \text{ (điều kiện: } v \geq 0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 + 6x + 9 \\ v^2 = -x^2 - 8x + 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = -2x + 57 \\ 2uv = 2x - 48 \end{cases} \Rightarrow (u+v)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} u+v=3 \\ u+v=-3 \end{cases}$$

$$\text{TH1: } u+v=3 \Rightarrow \sqrt{-x^2-8x+48} = -x \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2+8x-48=0 \end{cases} \Rightarrow x = -2 - 2\sqrt{7}$$

$$\text{TH2: } u+v=-3 \Rightarrow \sqrt{-x^2-8x+48} = -x-6 \Rightarrow \begin{cases} x \leq -6 \\ 2x^2+20x-12=0 \end{cases} \Rightarrow x = -5 - \sqrt{31}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2 - 2\sqrt{7}; -5 - \sqrt{31}\}$.

Bài 38: (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

$$\text{Giải phương trình } \sqrt{x^2+1} - 2\sqrt{x} = x^2 - 4x + 1.$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - (2\sqrt{x})^2 = x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x} = (\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x})(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x}) \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } (2) \Rightarrow (\sqrt{x^2+1}-2\sqrt{x})(\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x}-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x} & (3) \\ \sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x} = 1 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Xét phương trình (3), ta có: } (3) \Rightarrow x^2+1 = 4x \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}.$$

Cả hai giá trị x vừa nêu trên đều thỏa mãn (1), nên chúng là nghiệm của phương trình đã cho.

Xét phương trình (4)

Do $\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x} \geq \sqrt{x^2+1} \geq 1 \forall x \geq 0$, nên từ điều kiện cần và đủ để xảy ra dấu "=" ở các bất đẳng thức vừa nêu, ta được: (4) $\Rightarrow x = 0$.

Vì giá trị $x = 0$ thỏa mãn (1), nên nó là nghiệm của phương trình đã cho

Vậy phương trình có tất cả 3 nghiệm là: $x = 2 \pm \sqrt{3}$ và $x = 0$.

Bài 39 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán Chuyên - tỉnh Tiền Giang năm học 2024 - 2025)

Giải phương trình $2x^2 + 2x - 1 = 3x\sqrt{2x-1}$.

Lời giải

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$. Đặt $t = \sqrt{2x-1} \geq 0$, phương trình đã cho trở thành

$$2x^2 + t^2 = 3xt$$

$$t^2 - 3xt + 2x^2 = 0$$

$$(t-x)(t-2x) = 0$$

Xét hai trường hợp :

$$\text{Với } t = x, x \geq \frac{1}{2} \text{ nên } \sqrt{2x-1} = x \Rightarrow 2x-1 = x^2 \Rightarrow x = 1.$$

$$\text{Với } t = 2x, x \geq \frac{1}{2} \text{ nên } \sqrt{2x-1} = 2x \Rightarrow 2x-1 = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 - 2x + 1 = 0,$$

phương trình vô nghiệm do $\Delta' < 0$

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{1\}$.

Bài 40 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán + Chuyên Tin – tỉnh Long An năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x^3 + 3x^2 + 3x + 2 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 + 1 = (x+1)^3 + 1 = (x+2)[(x+1)^2 - (x+1) + 1] \\ &= (x+2)(x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ nên phương trình xác định khi và chỉ khi $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

Biến đổi phương trình ta có

$$2(x^2 + 2x + 3) = 5\sqrt{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}$$

$$2x^2 + 4x + 6 = 5\sqrt{(x+2)(x^2 + x + 1)}$$

$$2(x^2 + x + 1) + 2(x + 2) = 5\sqrt{x+2} \cdot \sqrt{x^2 + x + 1}. (*)$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = \sqrt{x+2} & (a \geq 0) \\ b = \sqrt{x^2 + x + 1} & \left(b \geq \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = x + 2 \\ b^2 = x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Khi đó phương trình (*) trở thành

$$2b^2 + 2a^2 = 5ab$$

$$2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0$$

$$2a^2 - ab - 4ab + 2b^2 = 0$$

$$a(2a - b) - 2b(2a - b) = 0$$

$$(a - 2b)(2a - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 2b = 0 \\ 2a - b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2b \\ 2a = b. \end{cases}$$

Với $a = 2b$, suy ra $\sqrt{x+2} = 2\sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow x + 2 = 4x^2 + 4x + 4 \Rightarrow 4x^2 + 3x + 2 = 0$ vô nghiệm

Với $2a = b$, suy ra $2\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2 + x + 1} \Rightarrow 4(x+2) = x^2 + x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 7 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{37}}{2} \\ x = \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \end{cases} \quad (\text{Thoả mãn})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{37}}{2}; \frac{3 - \sqrt{37}}{2} \right\}$.

Bài 41 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$

Lời giải

Ta có: $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$, với $x, y \in \mathbb{Z}$

$$2x(x + 2y) + 3(x + 2y) = 4$$

$$(x + 2y)(2x + 3) = 4 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x + 2y, 2x + 3 \in \mathbb{Z}$ và $2x + 3$ là số lẻ

Ta xét 2 trường hợp:

$$\text{TH1: } \begin{cases} 2x + 3 = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} 2x + 3 = -1 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases} \quad (\text{thoả mãn})$$

Do đó phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-2; -1)$

Bài 42 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $2024\sqrt{2024x - 2023} + \sqrt{2025x - 2024} = 2025$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } x \geq \frac{2024}{2025}$$

$$\text{Ta có: } 2024\sqrt{2024x - 2023} + \sqrt{2025x - 2024} = 2025 \quad (1)$$

Nếu $x < 1$ từ (1) $\Rightarrow 2025 < 2024\sqrt{2024 - 2023} + \sqrt{2025 - 2024} = 2025$ (vô lí)

Nếu $x > 1$ từ (1) $\Rightarrow 2025 > 2024 \cdot \sqrt{2024 - 2023} + \sqrt{2025 - 2024} = 2025$ (vô lí)

Với $x = 1$ thì ta thấy $VT = VP$. Vậy $x = 1$ là nghiệm phương trình.

Bài 43 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình: $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 82$.

Lời giải

Đặt $x + 4 = t$. Khi đó phương trình trở thành: $(t - 1)^4 + (t + 1)^4 = 82$

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 82$$

$$t^4 + 6t^2 - 40 = 0$$

$$(t^2 + 10)(t^2 - 4) = 0$$

$$t^2 = 4 \text{ (vì } t^2 + 10 > 0 \forall t) \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \Rightarrow x = -2 \\ t = -2 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$$

Vậy $S = \{-2; -6\}$.

Bài 44 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $3x + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} = x^2 + 8$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1$

$$\text{Ta có: } 3x + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} = x^2 + 8$$

$$3(x - 1) + 2\sqrt{(x^2 + 5)(x - 1)} = x^2 + 5.$$

$$\text{Ta đặt } \begin{cases} x - 1 = v \\ x^2 + 5 = u \end{cases}$$

Phương trình đã cho trở thành: $3v + 2\sqrt{uv} = u$

$$2\sqrt{uv} = u - 3v$$

$$4uv = (u - 3v)^2 (u \geq v, \forall u, v)$$

$$4uv = u^2 - 6uv + 9v^2$$

$$u^2 - 10uv + 9v^2 = 0$$

$$(u - v)(u - 9v) = 0 \Rightarrow \begin{cases} u = v \\ u = 9v \end{cases}$$

Với $u = v$ thì $x^2 + 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x + 6 = 0$ (phương trình vô nghiệm)

Với $u = 9v$ thì $x^2 + 5 = 9(x - 1) \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 2, x = 7$.

Bài 45 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2 + x \geq 0$, với điều kiện đó, phương trình viết lại $3(x^2 + x) - 2\sqrt{x^2 + x} - 1 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x}$, với $t \geq 0$, phương trình trở thành: $3t^2 - 2t - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$.

Với $t = 1 \rightarrow \sqrt{x^2 + x} = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Bài 46 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường THPT Lê Quý Đôn tỉnh Khánh Hoà năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $(x + 2)^2 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$

Lời giải

$(x + 2)^2 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$ (Điều kiện: $x \leq -3$ hoặc $x \geq 0$)

$$x^2 + 4x + 4 - x - 6 = \sqrt{x^2 + 3x}$$

$$x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } t = \sqrt{x^2 + 3x} \quad (t \geq 0)$$

$$\text{Thay vào (1) ta được: } t^2 - t - 2 = 0$$

Vì $a - b + c = 0$ nên $t = -1$ (loại do $t \geq 0$) hoặc $t = 2$ (nhận).

$$\text{Với } t = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 3x} = 2 \Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x = -4 \text{ (nhận) hoặc } x = 1 \text{ (nhận)}$$

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-4; 1\}$.

Bài 47 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Toán - tỉnh Bình Định năm học 2024 - 2025)

$$\text{Giải phương trình } \frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{5}{4} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lời giải

$$\frac{x+1}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{x+4}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{5}{4} \quad (x \in \mathbb{R}; x \neq \{\pm 2; \pm 3\})$$

$$\left(\frac{x+1}{x-2} + 2 \right) + \frac{x-1}{x+2} - \left(\frac{x+4}{x-3} + \frac{5}{2} \right) - \left(\frac{x-4}{x+3} + \frac{3}{4} \right) = 0$$

$$\frac{3x-3}{x-2} + \frac{x-1}{x+2} - \frac{7x-7}{2(x-3)} - \frac{7x-7}{4(x+3)} = 0$$

$$(x-1) \left[\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{7}{2(x-3)} - \frac{7}{4(x+3)} \right] = 0$$

$$(x-1) \left[\frac{3x+6+x-2}{(x-2)(x+2)} + \frac{-7}{2} \left(\frac{1}{x-3} + \frac{1}{2(x+3)} \right) \right] = 0$$

$$(x-1) \left[\frac{4(x+1)}{(x-2)(x+2)} + \frac{-7}{2} \cdot \frac{3(x+1)}{2(x-3)(x+3)} \right] = 0$$

$$(x-1)(x+1)\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{x^2-9}\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \\ \frac{4}{x^2-4}-\frac{21}{4}\cdot\frac{1}{x^2-9}=0 (*) \end{cases}$$

Giải (*): $\frac{4}{x^2-4} = \frac{21}{4x^2-36}$

Nếu $\frac{4}{x^2-4} = \frac{21}{4x^2-36} \Rightarrow 16x^2 - 144 = 21x^2 - 84$ hay $5x^2 = -60$ (vô lí)

Thử lại ta thấy $x=1$ và $x=-1$ đều thỏa mãn

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$ và $x=-1$

Bài 48 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy = -4x + 2y + 1$.

Lời giải

Ta có $x^2 - xy = -4x + 2y + 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = (x+2)y$.

Với $x = -2$ không thỏa mãn, suy ra $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{x+2} = x + 2 - \frac{5}{x+2}$

Suy ra được $x+2$ là ước của 5.

Tìm được các nghiệm $(-7; -4), (-3; 4), (-1; -4), (3; 4)$.

Bài 49 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $(x-1)^2 - x\sqrt{x-1} + 1 = 0$.

Lời giải

Điều kiện $x \geq 1$.

Phương trình tương đương $x^2 - x\sqrt{x-1} - 2(x-1) = 0$.

Để thấy $x=1$ không là nghiệm phương trình nên phương trình thành: $\left(\frac{x}{\sqrt{x-1}}\right)^2 - \frac{x}{\sqrt{x-1}} - 2 = 0$.

Giải được $\frac{x}{\sqrt{x-1}} = 2 \Rightarrow x = 2$

Bài 50 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $x^2 + \sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2 + \sqrt{2x + 5}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq -\frac{5}{2}$

Ta có: $x^2 + \sqrt{x^2 + x + 3} = x + 2 + \sqrt{2x + 5}$

$$x^2 - x - 2 + \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn) (vì phương trình } 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{2x + 5}} = 0 \text{ vô nghiệm)}$$

Vậy nghiệm của phương trình trên là $x = -1, x = 2$.

Bài 51 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Trường THPT Lê Quý Đôn thành phố Đà Nẵng năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình $8x^2 + 16x - 7 = (8x + 3)\sqrt{5x - 1}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{5}$

Với x thỏa mãn điều kiện xác định, phương trình đã cho tương đương với

$$5x - 10 = (8x + 3)(\sqrt{5x - 1} - x - 1)$$

$$5(x - 2) = \frac{(8x + 3)[5x - 1 - (x + 1)^2]}{\sqrt{5x - 1} + x + 1}$$

$$(x - 2) \left(5 + \frac{(8x + 3)(x - 1)}{\sqrt{5x - 1} + x + 1} \right) = 0$$

Với mọi $x \geq \frac{1}{5}$ ta có: $5 + \frac{(8x + 3)(x - 1)}{\sqrt{5x - 1} + x + 1} = \frac{8x^2 + 2 + 5\sqrt{5x - 1}}{\sqrt{5x - 1} + x + 1} > 0$

Nên phương trình (1) tương đương với $x - 2 = 0$ hay $x = 2$ (thỏa mãn đkxd)

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 52 : (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – Trường THPT Chuyên KHTN năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình
$$\frac{1}{\sqrt{5x^2 + 10x + 30}} + \frac{1}{3\sqrt{x^2 - 2x + 6}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}}$$

Lời giải

Phương trình luôn luôn xác định với mọi số thực x .

Đặt $a = \sqrt{x^2 + 2x + 6}, b = \sqrt{x^2 - 2x + 6}$

Khi đó ta có: $ab = \sqrt{x^4 + 8x^2 + 36}$

Phương trình đã cho có thể được viết lại thành
$$\frac{1}{\sqrt{5a}} + \frac{1}{\sqrt{3b}} = \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{ab}$$

Hay $(a - 3)(b - \sqrt{5}) = 0$

Từ đây ta có $a = 3$ hoặc $b = \sqrt{5}$.

Xét từng trường hợp, ta tìm được tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{1; -3\}$.

HẾT