TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Trị năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{10}{\sqrt{x+3y}}=5 \\ \dfrac{9-2x+y}{2x-y}-\dfrac{5}{\sqrt{x+3y}}=7 \end{cases}$

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hà Giang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{y}=4 & (1) \\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8 & (2) \end{cases}$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-1}=5 \\ x-y+\dfrac{1}{y}=4 \end{cases}$

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - TP Cần Thơ năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-35=0 \\ 2x^2+3y^2-4x+9y=0 \end{cases}$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Gia Lai năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3=8x+1+2\sqrt{y-2} \end{cases} (x,y\in\mathbb{R})$

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Kiên Giang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-x^2y+2x=-3y^3+4xy^2-3y \\ x^2-y^2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Tiền Giang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3=2x+4y & (1) \\ 2x^3+y^3=3x+3y & (2) \end{cases}$

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - trường Phổ Thông Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+z^3=y \\ y^3+x^3=z \\ z^3+y^3=x \end{cases}$

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Đồng Nai năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2xy+6x-12y=0 \\ (x-y+5)^4+(y+5)^2=2 \end{cases}$

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 - 2025)

Cho biểu thức: $\begin{cases} A=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{21+8\sqrt{5}} \\ B=\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \end{cases}$ với $x\ge 0$ và $x\ne 1$. Tìm tất cả các số tự nhiên x để $B\ge A$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Đắk Nông năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(y-x)=2x^2+3x+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y+7}=7y-3x^2+1 \end{cases}$

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bình Thuận năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+4x+4y=1 \end{cases}$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=1 \\ \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2y+3}{1-y}=4 \end{cases}$

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Khánh Hòa năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5 \\ \left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{25}{4} \end{cases}$

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Phú Yên năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x-y|=4 \\ |x^2-y^2|+|x+y|=10 \end{cases}$

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán Tin tỉnh Bình Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=x^2+y \end{cases}$$

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bình Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy-y+4x-2=0 \\ x^2-3y-3=\sqrt{x^4+24} \end{cases}, (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Nam năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3xy+y^2+2x-10y-1=0 \\ (3xy+y^2)(2x-1)-21y^2=0 \end{cases}$

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - TP Đà Nẵng năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x^2-xy+10y)=y(-x^2+9x+10\sqrt{y}) \\ 2x^3-16y+6\sqrt{y}-1=4xy(3-2x)\sqrt{2-2x} \end{cases}$

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)(3+xy)=8 \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{2y}{x}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \end{cases}$

Bài 21. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - trường THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x-18}-3\sqrt{y+4}=-5 \\ 4\sqrt{x-18}+5\sqrt{y+4}=23 \end{cases}$

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+4y^4-5x^2y^2=4 \\ (3x+4y-2)(x^2+2y^2-3xy)=4 \end{cases}$

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Ninh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+2y=10 \\ y^3+2y^2+6y-20=8x^3-2x^2+2x \end{cases}$.

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2+y^2+5xy-5x-3y=4 \\ \sqrt{5x-1}+\sqrt{2x^2+10x-11}=2x+y \end{cases}$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-y)+(y-1)^2=0 \\ 4x^3-9x^2+7x+3y^2-10y+5=0. \end{cases}$

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung – Lớp chuyên tự nhiên tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{5y-1}=3x^2-7x+6. \end{cases}$

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - Lớp chuyên xã hội tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2\sqrt{xy-y^2-y}=4y+1 \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=2y. \end{cases}$

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hải Dương năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3x^2+4x+2=y^3+y \\ 4x+6\sqrt{x-1}+7=(4x-1)y \end{cases}$

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - TP Hải Phòng năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x-1+y^2)\sqrt{x-1}+y+1=y^3+y^2+xy+x \\ x+4\sqrt{y+4}=2\sqrt{x-1}+y+8 \end{cases}$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Nga, Pháp, Trung - tỉnh Hòa Bình năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \sqrt{x+1}+y=3 \\ x-2y=1 \end{cases}$

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - tỉnh Hòa Bình năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(2x+3)(2x+y)=15 \\ 2x^2+5x+y=8 \end{cases}$

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Bình Phước năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+y\sqrt{y}-x\sqrt{x-1}-\sqrt{xy-y}=0 \\ x^2-4xy+2x+4y=\sqrt{x-2y-1}+3. \end{cases}$

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2=x(2y+1)-y \\ \sqrt{2x+y}=x+2y \end{cases}$

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Yên Bái năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-2y-xy=-6 \\ x^2+4y^2=20 \end{cases}$

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Hà Nam năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{y}=4 \\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8 \end{cases}.$

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Tây Ninh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2+y^2+y=6 \\ (y-1)^2+x^2+x=11 \end{cases}.$

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Sơn La năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2y-1}{y-2}=5 \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}=\dfrac{13}{6} \end{cases}.$

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy-3x-9=0 \\ \sqrt{x^2-y+3}=2x+y \end{cases}.$

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x = \dfrac{x^2+1}{y^2} \\ 2y = \dfrac{y^2+1}{x^2}. \end{cases}$

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+2y^2-5xy+x-2y=0 \\ x^2+2y^2-3x-5y-1=0 \end{cases}$

Bài 41. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - chuyên Tin - tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2+xy-3x+3y=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$

Bài 42. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Phú Thọ năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2+xy-3y-1=0 \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x-1}=2x+2y \end{cases} (x, y \in \mathbb{R})$

Bài 43. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - tỉnh Hòa Bình năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y-1)+y(x+1)=6 \\ (x-1)(y+1)=2 \end{cases}$

Bài 44. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Điện Biên năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+3x+5=4xy \\ y^2+2y-8=7x \end{cases}.$

Bài 45. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Thanh Hóa năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+8y^3=1+4xy^2 \\ 2x^4+8y^4=2x+y \end{cases}$

Bài 46. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Nghệ An năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-(y+2)x^2+y-2=0 \\ (2-x)(3y-4x+4)=2(2y+1)\sqrt{2y+1} \end{cases}$

Bài 47. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+y)(4x+y)=5x+2y-1 \\ 2x^2-5x+2\sqrt{x+y}-\sqrt{3x-1}=0 \end{cases}$

Bài 48. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}(2x-3y)(3x+2y)+12x+8y=0\\4x+2\sqrt{3x-2}=3y\end{cases}$.

Bài 49. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+y^3=3x^2-3x+1\\xy+x+2y=1\end{cases}$

Bài 50. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3+xy^2-10y=0\\x^2+6y^2=10\end{cases}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Trị năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{10}{\sqrt{x+3y}}=5 \\ \dfrac{9-2x+y}{2x-y}-\dfrac{5}{\sqrt{x+3y}}=7 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x+3y>0, x\neq 2y\left(*\right)$.

Từ hệ phương trình ban đầu:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{10}{\sqrt{x+3y}}=5 \\ \dfrac{9-2x+y}{2x-y}-\dfrac{5}{\sqrt{x+3y}}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{10}{\sqrt{x+3y}}=5 \\ \dfrac{9}{2x-y}-1-\dfrac{5}{\sqrt{x+3y}}=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2x-y}+\dfrac{10}{\sqrt{x+3y}}=5 \\ \dfrac{9}{2x-y}-\dfrac{5}{\sqrt{x+3y}}=8 \end{cases}$$

Đặt $a=\dfrac{1}{2x-y}, b=\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}$. Khi đó hệ phương trình trên trở thành:

$$\begin{cases} 3a+10b=5 \\ 9a-5b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a+10b=5 \\ 18a-10b=16 \end{cases} \quad (1)$$

Lấy (1) và (2) cộng vế theo vế, ta được: $21a=21\Rightarrow a=1$. Kết hợp với (1) suy ra

$b=\dfrac{5-3a}{10}=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

Do đó: $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}=\dfrac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ \sqrt{x+3y}=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=1 \\ x+3y=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases}$, thoả mãn (*).

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $x=4, y=7$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin - Toán chuyên - tỉnh Hà Giang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{y}=4 & (1) \\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8 & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge -1 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Từ (1): $\sqrt{y} - 2 = 2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{y^2+4}$

Từ (2): $2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - y + 4\sqrt{y} = 8 \Rightarrow 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - \left(\sqrt{y}-2\right)^2 = 4$

Thế (1) vào (2) ta được: $2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - \left(2-\sqrt{x+1}-\sqrt{y^2+4}\right)^2 = 4$

$$2\sqrt{(x+1)\left(y^2+4\right)} - \left(4 - 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{y^2+4} + 2\sqrt{(x+1)\left(y^2+4\right)} + (x+1) + (y^2+4)\right) = 4$$

$$(x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4 + (y^2+4) - 4\sqrt{y^2+4} + 4 = 0$$

$$\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2 + \left(\sqrt{y^2+4}-2\right)^2 = 0$$

$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2+4} - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y) = (3;0)$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{2x+\dfrac{1}{y}} + \sqrt{x+y-1} = 5 \\ x - y + \dfrac{1}{y} = 4 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 2x + \dfrac{1}{y} \ge 0 \\ x + y - 1 \ge 0 \\ y \ne 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = \sqrt{2x+\dfrac{1}{y}} \\ b = \sqrt{x+y-1} \end{cases} \quad (a \ge 0, b \ge 0)$

Hệ phương trình trở thành $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2-b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5-a \\ a^2-(5-a)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=5-a \\ a=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

Với $\begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$ ta được $\begin{cases} 2x+\dfrac{1}{y}=9 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y^2-y-1=0 \\ x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=1 \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x=5-y \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{11}{2} \\ y=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(4;1)$; $\left(\dfrac{11}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - TP Cần Thơ năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3-y^3-35=0 \\ 2x^2+3y^2-4x+9y=0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^3-y^3-35=0 \\ 2x^2+3y^2-4x+9y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3-y^3-35=0 \quad (1) \\ 6x^2+9y^2-12x+27y=0 \quad (2) \end{cases}$

Trừ vế theo vế (1) và (2), ta được:

$x^3-6x^2+12x-8-(y^3+9y^2+27y+27)=0$

$x^3-6x^2+12x-8=y^3+9y^2+27y+27$

$(x-2)^3=(y+3)^3$

$x-2=y+3$

$y=x-5$

Thay vào (2) ta được:

$2x^2+3(x-5)^2-4x+9(x-5)=0$

$5x^2-25x+30=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$

Với $x=3 \Rightarrow y=-2$

Với $x=2 \Rightarrow y=-3$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $(3;-2)$ và $(2;-3)$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Gia Lai năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12 \\ x^3=8x+1+2\sqrt{y-2} \end{cases}$, $(x, y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} -2\sqrt{3} \le x \le 2\sqrt{3} \\ 2 \le y \le 12 \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} x\sqrt{12-y}+\sqrt{y(12-x^2)}=12(1) \\ x^3=8x+1+2\sqrt{y-2}(2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$\sqrt{y(12-x^2)}=12-x\sqrt{12-y}$

$y(12-x^2)=(12-x\sqrt{12-y})^2$

$12y-x^2y=144-24x\sqrt{12-y}+12x^2-x^2y$

$12y-144+24x\sqrt{12-y}-12x^2=0$

$-12(12-y)+24x\sqrt{12-y}-12x^2=0$

$x^2-2x\sqrt{12-y}+(12-y)=0$

$(x-\sqrt{12-y})^2=0$

$x=\sqrt{12-y}$

$x^2=12-y(3)$

Thay (3) vào (2) ta được:

$x^3-8x-1=2\sqrt{10-x^2} \qquad (4)$

$x^3-8x-3=2(\sqrt{10-x^2}-1)$

$x^2(x-3)+3x(x-3)+(x-3)=2.\dfrac{9-x^2}{\sqrt{10-x^2}+1}$

$(x-3)\left(x^2+3x+1+\dfrac{2(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1}\right)=0$

TH1: $x-3=0 \Rightarrow x=3$ (thỏa mãn)

TH2: $x^2+3x+1+\dfrac{2(3+x)}{\sqrt{10-x^2}+1}=0$

Ta đi chứng minh $x>0$. Phản chứng giả sử $x<0$

Từ (1) ta có: $\sqrt{y(12-x^2)}=12-x\sqrt{12-y}>12$

Mà $\sqrt{y(12-x^2)}<\sqrt{12(12-0)}=12 \Rightarrow$ Vô lý

Như vậy $x>0$

Với $x>0$ thì phương trình (4) vô nghiệm

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,\ y)=(3,3)$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Kiên Giang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3-x^2y+2x=-3y^3+4xy^2-3y \\ x^2-y^2=\dfrac{4}{5} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện xác định : $x,y\in\mathbb{R}$

Kí hiệu (1) là phương trình thứ nhất của hệ đã cho, ta có:

$$\left(2x^3-4x^2y+2xy^2+2x\right)+\left(3y^3-6xy^2+3x^2y+3y\right)=0 \qquad (1)$$

$$2x\left(x^2-2xy+y^2+1\right)+3y\left(y^2-2xy+x^2+1\right)=0$$

$$\left(2x+3y\right)\left((x-y)^2+1\right)=0$$

$2x+3y=0$ (vì $(x-y)^2+1>0\ \forall x,y\in\mathbb{R}$)

$$x=\frac{-3}{2}y \quad (2)$$

Thế x ở (2) vào phương trình thứ hai của hệ đã cho, ta được:

$$\frac{9}{4}y^2-y^2=\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{5}{4}y^2=\frac{4}{5}$$

$$y=\pm\frac{4}{5} \quad (4)$$

Từ (2) và (4), ta được: $x=\mp\dfrac{6}{5}$.

Vì các cặp số $(x,y)=\left(-\frac{6}{5},\frac{4}{5}\right)$ và $(x,y)=\left(\frac{6}{5},-\frac{4}{5}\right)$ thỏa mãn điều kiện xác định đã nêu trên, nên tất cả các nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Tiền Giang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x^3=2x+4y & (1) \\ 2x^3+y^3=3x+3y & (2) \end{cases}$

Lời giải

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) vế theo vế ta được

$$x^3-y^3=-x+y$$

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)+x-y=0$$

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2+1\right)=0$$

$$x=y \quad (\text{do } x^2+xy+y^2+1=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1>0,\forall x,y)$$

Thay $y=x$ vào phương trình (1), ta được $3x^3=6x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S=\left\{(0;0);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right);\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\right\}$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - trường Phổ Thông Năng Khiếu năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+z^3=y \\ y^3+x^3=z \\ z^3+y^3=x \end{cases}$

Lời giải

Xét: $\begin{cases} x^3+z^3=y(1) \\ y^3+x^3=z(2) \\ z^3+y^3=x(3) \end{cases}$

Lấy phương trình (1) trừ (2) vế theo vế, ta được:

$$(z-y)\left(z^2+yz+y^2\right)=y-z$$

$$(z-y)\left(z^2+zy+y^2+1\right)=0$$

$$z=y\left(\text{ do } z^2+zy+y^2+1\geq 1\right)$$

Tương tự, lấy phương trình (3) trừ (1) vế theo vế, ta cũng có $x = y$.

Do đó $x = y = z$, thay vào (1) suy ra: $2x^3 = x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm $(x;y;z) \in \left\{(0;0;0), \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2};-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Đồng Nai năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 - 2xy + 6x - 12y = 0 \\ (x - y + 5)^4 + (y + 5)^2 = 2 \end{cases}$

Lời giải

Cách 1: Ta có: $\begin{cases} x^2 - 2xy + 6x - 12y = 0 & (1) \\ (x - y + 5)^4 + (y + 5)^2 = 2 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có: $x(x-2y) + 6(x-2y) = 0 \Rightarrow (x-2y)(x+6) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2y \\ x = -6 \end{array}\right.$

Với $x = -6$ ta có $(2) \Rightarrow (y+1)^4 + (y+5)^2 = 2$ (3)

Đặt $a = y + 1$

Phương trình (3) trở thành:

$a^4 + (a+4)^2 - 2 = 0$

$a^4 + a^2 + 8a + 14 = 0$

$a^4 - 2a^2 + 1 + 2(a^2 + 4a + 4) + a^2 + 5 = 0$

$(a^2 - 1)^2 + 2(a+2)^2 + a^2 + 5 = 0$, phương trình này vô nghiệm

(vì $(a^2 - 1)^2 + 2(a+2)^2 + a^2 + 5 > 0, \forall a \in \mathbb{R}$)

Với $x = 2y$ (4) ta có $(2) \Rightarrow (y+5)^4 + (y+5)^2 = 2$ (5)

Đặt $t = (y+5)^2 \geq 0$

(5) trở thành $t^2+t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$. Vì $t \geq 0$ nên chỉ có $t=1$ thỏa mãn.

Vậy $(y+5)^2-1=0 \Rightarrow (y+6)(y+4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-6 \\ y=-4 \end{array}\right.$

- Với $y=-6$ ta có $(4) \Rightarrow x=-12$
- Với $y=-4$ ta có $(4) \Rightarrow x=-8$

Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;\, y)$ là $(-12,-6);(-8,-4)$

Cách 2: Ba bước đầu như cách 1

Với $x=2y$ (4) thì phương trình (2) trở thành:

$(y+5)^4+(y+5)^2-2=0$

$(y+5)^4-(y+5)^2+2(y+5)^2-2=0$

$(y+5)^2\left[(y+5)^2-1\right]+2\left[(y+5)^2-1\right]=0$

$\left[(y+5)^2-1\right]\left[(y+5)^2+2\right]=0$

$(y+5)^2-1=0$ (vì $(y+5)^2+2>0, \forall y \in \mathbb{R}$)

$(y+6)(y+4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-6 \Rightarrow x=-12 \\ y=-4 \Rightarrow x=-8 \end{array}\right.$

Do đó hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(-12,-6)$; $(-8,-4)$.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 - 2025)

Cho biểu thức: $\left\{\begin{array}{l} A=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{21+8\sqrt{5}} \\ B=\left(1+\dfrac{x+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(1+\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right) \end{array}\right.$ với $x \geq 0$ và $x \neq 1$. Tìm tất cả các số tự nhiên x để $B \geq A$.

Lời giải

Ta có: $A=\sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}-\sqrt{(4+\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}-2-4-\sqrt{5}=-6$

Ta có: $B=\left[1+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{1+\sqrt{x}}\right]\cdot\left[1+\dfrac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{1-\sqrt{x}}\right]=\left(1+\sqrt{x}\right)\cdot\left(1-\sqrt{x}\right)=1-x$

$B \geq A \Rightarrow 1-x \geq -6 \Rightarrow x \leq 7$. Mà $x \neq 1$

Vậy $x \in \{0;2;3;4;5;6;7\}$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Đắk Nông năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(y-x)=2x^2+3x+1 \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y+7}=7y-3x^2+1 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y+7\ge 0 \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình như sau: $\begin{cases} y(y-x)=2x^2+3x+1 & (1) \\ \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y+7}=7y-3x^2+1 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$2x^2+xy-y^2+3x+1=0$

$(x+y)(2x-y)+(x+y)+(2x-y)+1=0$

$(x+y+1)(2x-y+1)=0$

$y=2x+1$ (vì $x+y\ge 0$ nên $x+y+1>0$).

Thay vào phương trình (2), ta được:

$\sqrt{x+2x+1}-\sqrt{x-2x-1+7}=14x+7-3x^2+1$

$\sqrt{3x+1}-\sqrt{6-x}+3x^2-14x-8=0$ (Điều kiện xác định: $-\frac{1}{3}\le x\le 6$)

$\left(\sqrt{3x+1}-4\right)-\left(\sqrt{6-x}-1\right)+3x^2-14x-5=0$

$\frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4}-\frac{6-x-1}{\sqrt{6-x}+1}+(x-5)(3x+1)=0$

$(x-5)\cdot\left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1\right)=0$

Vì $x\ge -\frac{1}{3}$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4}+\frac{1}{\sqrt{6-x}+1}+3x+1>0$

Do đó $x=5 \Rightarrow y=11$ (thỏa mãn).

Vậy $(x,y)=(5;11)$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bình Thuận năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+4x+4y=1 \end{cases}$

Lời giải

Cách 1: Ta có:

$$\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+4x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+(-1-x)^2+4x+4(-1-x)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1-x \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=1 \end{cases} \end{array}\right.$$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)$ là $(1;-2),(-2;1)$.

Cách 2: Ta có: $\begin{cases} x+y=-1 \\ x^2+y^2+4x+4y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ (x+y)^2+4(x+y)-2xy=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-2 \end{cases}$. Suy ra x,y là hai nghiệm của phương trình $t^2+t-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;-2)$ và $(-2;1)$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=1 \\ \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2y+3}{1-y}=4 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=1 \\ \dfrac{3}{x+1}-\dfrac{2y+3}{1-y}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=1 \\ \dfrac{3}{x+1}+2+\dfrac{5}{y-1}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{y-1}=0 \\ \dfrac{3}{x+1}+\dfrac{5}{y-1}=2 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} a=\dfrac{1}{x+1} \\ b=\dfrac{1}{y-1} \end{cases}$. Ta được: $\begin{cases} a+b=0 \\ 3a+5b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a=2 \\ b=-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$.

Khi đó $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1}=-1 \\ \dfrac{1}{y-1}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1=-1 \\ y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(-2;2)$.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Khánh Hòa năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5 \\ \left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{25}{4} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq 0, y \neq 0$. Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5 \\ \left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=5 \\ \left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(xy+\dfrac{1}{xy}\right)=\dfrac{5}{2} \\ \left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\right)=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2y^2-5xy+2=0 \\ x^2+y^2=\dfrac{5}{2}xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=2 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ x^2+y^2=\dfrac{5}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=2 \\ (x+y)^2=5+2.2=9 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ (x+y)^2=\dfrac{5}{4}+2.\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} xy=2 \\ x+y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=2 \\ x+y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ x+y=\dfrac{3}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} xy=\dfrac{1}{2} \\ x+y=\dfrac{-3}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1 \\ y=\dfrac{-1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{1}{2} \\ y=-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 8 cặp nghiệm $(x;y)$ thỏa mãn.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Phú Yên năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} |x-y|=4 \\ |x^2-y^2|+|x+y|=10 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} |x-y|=4 \\ |x^2-y^2|+|x+y|=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-y|=4 \\ |x-y||x+y|+|x+y|=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-y|=4 \\ 5|x+y|=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x-y|=4 \\ |x+y|=2 \end{cases}$

TH1: $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x-y=4 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$

TH4: $\begin{cases} x-y=-4 \\ x+y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x;\, y)$ là $(3;-1);(1;-3);(-1;3);(-3;1)$

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bình Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ y\sqrt{x}+x\sqrt{y}=x^2+y \end{cases}$, với $x, y \in \mathbb{R}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x>0,\ y>0$

Phương trình thứ nhất trở thành:

$$x-y+\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0$$

$$x-y+\frac{x-y}{xy}=0$$

$$(x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0$$

Vì $x,\ y>0$ nên $1+\dfrac{1}{xy}>0$. Do đó $x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai ta được:

$$x\sqrt{x}+x\sqrt{x}=x^2+x$$

$$x^2-2x\sqrt{x}+x=0$$

$$x(\sqrt{x}-1)^2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn nên $x=1 \Rightarrow y=1$.

Kết luận: Hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x,\ y)=(1;\ 1)$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bình Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-2xy-y+4x-2=0 \\ x^2-3y-3=\sqrt{x^4+24} \end{cases},(x,y\in\mathbb{R})$

Lời giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} y^2-2xy-y+4x-2=0 & (1) \\ x^2-3y-3=\sqrt{x^4+24} & (2) \end{cases}$

Ta viết phương trình (1) thành tam thức bậc hai theo y như sau : $y^2-(2x+1)y+4x-2=0$

Ta có: $\Delta=(2x+1)^2-4(4x-2)=4x^2+4x+1-16x+8=4x^2-12x+9=(2x-3)^2\ge 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{(2x+1)+(2x-3)}{2}=2x-1 \\ y=\dfrac{(2x+1)-(2x-3)}{2}=2 \end{array}\right.$$

Nếu $y=2$ thay vào (2) ta được: $x^2-9=\sqrt{x^4+24}$ (vô lí vì $\sqrt{x^4+24}>x^2>x^2-9$)

Nếu $y=2x-1$ thay vào (2) ta được:

$$x^2-3(2x-1)-3=\sqrt{x^4+24}$$

$$x^2-6x+3-3=\sqrt{x^4+24}$$

$$x^2-6x=\sqrt{x^4+24}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2-6x>0 \\ x^4-12x^3+36x^2=x^4+24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-6x>0 \\ 12(x-1)(x^2-2x-2)=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\sqrt{3}+1$$

$\Rightarrow y=-2\sqrt{3}+1$, thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\sqrt{3}+1;-2\sqrt{3}+1\right)$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Nam năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \quad (1) \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \ (2) \end{cases}$

Từ phương trình (2) ta có: $(3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ (3x + y)(2x - 1) = 21y \end{array}\right.$

TH1: $y = 0$ thay vào (1) ta có: $3.x.0 + 0^2 + 2x - 10.0 - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2}$

TH2: $(3x + y)(2x - 1) = 21y$ và $y \neq 0$

Nếu $3x + y = 0$ thì $y = 0$ và $x = 0$ (vô lý)

Do đó xét $3x + y \neq 0 \Rightarrow 2x - 1 = \dfrac{21y}{3x + y}$

Ta có: $3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0$

$$y(3x + y) + \frac{21y}{3x + y} - 10y = 0$$

$$3x + y + \frac{21}{3x + y} - 10 = 0$$

$$(3x + y)^2 - 10(3x + y) + 21 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{array}\right.$$

Khả năng 1: $3x + y = 7$ thì $2x - 1 = 3y$. Suy ra $x = 2,\ y = 1$

Khả năng 2: $3x + y = 3$ thì $2x - 1 = 7y$. Suy ra $x = \dfrac{22}{23},\ y = \dfrac{3}{23}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $\begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = \dfrac{22}{23} \\ y = \dfrac{3}{23} \end{cases}$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - TP Đà Nẵng năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x(x^2 - xy + 10y) = y(-x^2 + 9x + 10\sqrt{y}) \\ 2x^3 - 16y + 6\sqrt{y} - 1 = 4xy(3 - 2x)\sqrt{2 - 2x} \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \le 1, y \ge 0$

Ta viết lại phương trình thứ nhất của hệ phương trình thành:

$x^3 + xy = 10y\sqrt{y} \Rightarrow (x - 2\sqrt{y})(x^2 + 2x\sqrt{y} + 5y) = 0$

Nếu $x^2 + 2x\sqrt{y} + 5y = 0$ thì $(x + \sqrt{y})^2 + 4y = 0$ ta được $x = y = 0$ (không thỏa mãn)

Xét trường hợp chính $x = 2\sqrt{y}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ phương trình ban đầu ta được $2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = x^3(3 - 2x)\sqrt{2 - 2x}$

Hiển nhiên $x = 0$ không phải nghiệm phương trình

Xét $x \ne 0$ chia cả hai vế cho x^3 ta được

$2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = (3 - 2x)\sqrt{2 - 2x} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = \left(\sqrt{2 - 2x}\right)^3 + \sqrt{2 - 2x}$

Nếu $1 - \frac{1}{x} < \sqrt{2 - 2x}$ thì vế trái nhỏ hơn vế phải

Nếu $1 - \frac{1}{x} > \sqrt{2 - 2x}$ thì vế trái lớn hơn vế phải

Vậy ta có $1 - \frac{1}{x} = \sqrt{2 - 2x}$

Từ điều kiện xác định và phương trình $x = 2\sqrt{y}$ ta có $0 < x \le 1$

Do đó $1 - \frac{1}{x} \le 0 \le \sqrt{2 - 2x}$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1; y = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn)

Vậy $(x; y) = \left(1; \frac{1}{4}\right)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Bài 20. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(3 + xy) = 8 \\ \frac{x}{y} + \frac{2y}{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $xy \neq 0$

Phương trình thứ hai có thể được viết lại thành: $\frac{x}{y}+\frac{2y}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+3=8$

Hay $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y+1)=8$

Kết hợp với phương trình thứ nhất của hệ, ta được $xy+3=x+2y+1$

Hay $(x-2)(y-1)=0$. Từ đó $x=2$ hoặc $y=1$

Xét từng trường hợp ta tìm được tất cả các nghiệm $(x,\ y)$ của hệ phương trình đã cho là

$(1,1),(3,1),\left(2,\frac{9-\sqrt{33}}{4}\right),\left(2,\frac{9+\sqrt{33}}{4}\right)$.

Bài 21. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - trường THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2\sqrt{x-18}-3\sqrt{y+4}=-5 \\ 4\sqrt{x-18}+5\sqrt{y+4}=23 \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 18 \\ y \geq -4 \end{cases}$. Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-18}=a \\ \sqrt{y+4}=b \end{cases}$, điều kiện $a,b \geq 0$ khi đó hệ phương trình trở thành

$\begin{cases} 2a-3b=-5 \\ 4a+5b=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11b=33 \\ 4a+5b=23 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=22 \\ y=5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;\ y)=(22;5)$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - trường THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+4y^4-5x^2y^2=4 \\ (3x+4y-2)(x^2+2y^2-3xy)=4 \end{cases}$

Lời giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x^4+4y^4-5x^2y^2=4 \\ (3x+4y-2)(x^2+2y^2-3xy)=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-y)(x-2y)(x+y)(x+2y)=4 \\ (x-y)(x-2y)(3x+4y-2)=4 \end{cases}$

Hệ trên cho ta $(x+y)(x+2y)=3x+4y-2$ hay $(x+y-1)(x+2y-2)=0$.

Suy ra $x+y=1$ hoặc $x+2y=2$.

Nếu $x+y=1$, thế $y=1-x$ vào phương trình đầu tiên ta được:

$(2x-1)(3x-2)(2-x)=4$

$x\left(6x^2-19x+16\right)=0.$

Do $6x^2-19x+16=6\left(x-\dfrac{19}{12}\right)^2+\dfrac{23}{144}>0$ nên ta phải có $x=0, y=1$.

Nếu $x+2y=2$, thế $x=2-2y$ vào phương trình đầu ta được

$(2-3y)(1-2y)(2-y)=1$

$(y-1)\left(6y^2-13y+3\right)=0$

đến đây tìm được các nghiệm (x,y) của hệ phương trình là

$$(0;1),\left(\frac{-1-\sqrt{97}}{6};\frac{13+\sqrt{97}}{12}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{97}}{6};\frac{13-\sqrt{97}}{12}\right)$$

Vậy hệ phương trình đã cho có đúng ba nghiệm $(x;y)$ là

$$(0;1),\left(\frac{-1-\sqrt{97}}{6};\frac{13+\sqrt{97}}{12}\right),\left(\frac{-1+\sqrt{97}}{6};\frac{13-\sqrt{97}}{12}\right).$$

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Ninh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+2y=10 \\ y^3+2y^2+6y-20=8x^3-2x^2+2x \end{cases}$.

Lời giải

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x^2+y^2+x+2y=10 \\ y^3+2y^2+6y-20=8x^3-2x^2+2x \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+2x+4y=20 & (1) \\ y^3+2y^2+6y-20=8x^3-2x^2+2x & (2) \end{cases}$$

Trừ vế với vế của (2) cho (1) ta có:

$y^3+2y=8x^3+4x$

$(y-2x)\left(y^2+2xy+4x^2+2\right)=0$.

Có $y^2+2xy+4x^2+2>0$ nên $y=2x$, thay vào phương trình: $x^2+y^2+x+2y=10$ ta được

$5x^2+5x-10=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$ từ đó suy ra hệ phương trình có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;2)$ và $(-2;-4)$

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2+y^2+5xy-5x-3y=4 \\ \sqrt{5x-1}+\sqrt{2x^2+10x-11}=2x+y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} 5x-1\ge 0 \\ 2x^2+10x-11\ge 0 \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^2+y^2+5xy-5x-3y=4 & (1) \\ \sqrt{5x-1}+\sqrt{2x^2+10x-11}=2x+y & (2) \end{cases}$

Từ điều kiện và phương trình (2) ta có: $2x+y\ge 0$ $(*)$

Từ phương trình (1) ta có:

$(2x+y+1)(3x+y-4)=0$

$3x+y=4$ (do $(*)$).

$y=4-3x$

Thay vào (2) ta có: $\sqrt{5x-1}+\sqrt{2x^2+10x-11}=4-x$

$\left(\sqrt{5x-1}-2\right)+\left(\sqrt{2x^2+10x-11}-1\right)+(x-1)=0$

$\dfrac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1}+2}+\dfrac{2(x-1)(x+6)}{\sqrt{2x^2+10x-11}+1}+(x-1)=0$

$(x-1)\left(\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+\dfrac{2(x+6)}{\sqrt{2x^2+10x-11}+1}+1\right)=0$

Vì $x\ge \dfrac{1}{5}$ nên $\dfrac{5}{\sqrt{5x-1}+2}+\dfrac{2(x+6)}{\sqrt{2x^2+10x-11}+1}+1>0$.

Do đó phương trình có nghiệm $x=1$ (thử vào điều kiện thấy đúng).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-y)+(y-1)^2=0 \\ 4x^3-9x^2+7x+3y^2-10y+5=0. \end{cases}$

Lời giải

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x^2(x-y)+(y-1)^2=0 & (1) \\ 4x^3-9x^2+7x+3y^2-10y+5=0 & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có: $y^2-(x^2+2)y+x^3+1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=x^2-x+1 \end{array}\right.$

Nếu $y=x^2-x+1$, thay vào (2) thu được: $4x^3-9x^2+7x+3(x^2-x+1)^2-10(x^2-x+1)+5=0$

$3x^4-2x^3-10x^2+11x-2=0$

$(x+2)(x-1)(3x^2-5x+1)=0 \Rightarrow x \in \left\{-2;1;\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}\right\}$

Tìm được các nghiệm $(x;y)=(-2;7);\,(1;1);\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6};\frac{11+\sqrt{13}}{9}\right);\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\frac{11-\sqrt{13}}{9}\right)$

Nếu $y=x+1$, thay vào (2) thu được:

$4x^3-9x^2+7x+3(x+1)^2-10(x+1)+5=0$

$4x^3-6x^2+3x-2=0$

$8x^3-12x^2+6x-1=3$

$(2x-1)^3=3$

$\Rightarrow x=\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2}.$

Tìm được nghiệm $(x;y)=\left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2};\frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}\right).$

Vậy hệ cho có đúng 5 bộ nghiệm $(x;y)$ là

$(-2;7);\,(1;1);\left(\frac{5+\sqrt{13}}{6};\frac{11+\sqrt{13}}{9}\right);\left(\frac{5-\sqrt{13}}{6};\frac{11-\sqrt{13}}{9}\right);\left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2};\frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}\right)$

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung – Lớp chuyên tự nhiên tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{5y-1}=3x^2-7x+6. \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} \sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2\sqrt{xy}=4y \quad (1) \\ \sqrt{x-1}+\sqrt{5y-1}=3x^2-7x+6 \quad (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge \dfrac{1}{5} \\ 4x^2+(y+2)(x-y)\ge 0 \end{cases}$ (*)

Phương trình $(1)\Rightarrow\left[\sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}-2y\right]+\left(2\sqrt{xy}-2y\right)=0$

$$\Rightarrow (x-y)\left[\frac{4(x+y)+(y+2)}{\sqrt{4x^2+(y+2)(x-y)}+2y}+\frac{2y}{\sqrt{xy}+y}\right]=0\Rightarrow x=y$$

<u>Cách 1:</u> Khi $x=y$ thì phương trình (2) trở thành $\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-1}=3x^2-7x+6$ (3)

$$\sqrt{x-1}-(x-1)+\sqrt{5x-1}-(x+1)=3x^2-9x+6$$

$$\sqrt{x-1}\left(1-\sqrt{x-1}\right)+\sqrt{5x-1}-(x+1)=3x^2-9x+6$$

$$\sqrt{x-1}.\frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{(5x-1)-(x+1)^2}{\sqrt{5x-1}+x+1}=3x^2-9x+6$$

$$\sqrt{x-1}.\frac{2-x}{1+\sqrt{x-1}}+\frac{(2-x)(x-1)}{\sqrt{5x-1}+x+1}=-3(2-x)(x-1)$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 2-x=0 \\ \sqrt{x-1}=0 \\ \dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}}+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5x-1}+x+1}+3\sqrt{x-1}=0 \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right.\text{(thỏa mãn).}$$

Với $x=2\Rightarrow y=2$ (thoả mãn (*))

Với $x=1\Rightarrow y=1$ (thoả mãn (*))

Vậy nghiệm của hệ là $(1;1)$, $(2;2)$.

<u>Cách 2:</u> Khi $x=y$ thì phương trình (2) trở thành $\sqrt{x-1}+\sqrt{5x-1}=3x^2-7x+6$ (3)

Ta thấy $x=1$ là một nghiệm của phương trình (3) và $(x;y)=(1;1)$ là một nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Với $x>1$, phương trình (3) trở thành:

$$\sqrt{x-1}-(x-1)+\sqrt{5x-1}-(x+1)=3x^2-9x+6$$

$$\frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{x-1}+x-1}+\frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{5x-1}+x+1}=3\left(x^2-3x+2\right)$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ 3+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+x-1}+\dfrac{1}{\sqrt{5x-1}+x+1}=0 \end{array}\right.$$

$x=2$ (vì $x>1$).

Vậy nghiệm của hệ là $(1;1)$, $(2;2)$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - Lớp chuyên xã hội tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+2\sqrt{xy-y^2-y}=4y+1 \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=2y. \end{cases}$

Lời giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+2\sqrt{xy-y^2-y}=4y+1 \quad (1) \\ \sqrt{4y^2-x-2}+\sqrt{y-1}=2y \ (2) \end{cases}$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} xy-y^2-y\ge 0 \\ 4y^2-x-2\ge 0 \ (*) \\ y\ge 1 \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$$(x-y-1)+2\sqrt{(x-y-1)y}-3y=0$$

$$\left(\sqrt{x-y-1}-\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x-y-1}+3\sqrt{y}\right)=0$$

$x-y-1=y$ (vì $\sqrt{x-y-1}+3\sqrt{y}>0$)

$x=2y+1$

Khi $x=2y+1$ thì phương trình (2) trở thành:

$$\sqrt{4y^2-2y-3}+\sqrt{y-1}=2y$$

$$\sqrt{4y^2-2y-3}-(2y-1)+\sqrt{y-1}-1=0$$

$$\frac{4y^2-2y-3-(2y-1)^2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\frac{2y-4}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\frac{y-2}{\sqrt{y-1}+1}=0$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} y-2=0 \\ \dfrac{2}{\sqrt{4y^2-2y-3}+2y-1}+\dfrac{1}{\sqrt{y-1}+1}=0 \end{array}\right. \Rightarrow y=2.$$

Với $y=2 \Rightarrow x=5$ (thỏa mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(5;2)$.

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên – tỉnh Hải Dương năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3+3x^2+4x+2=y^3+y \\ 4x+6\sqrt{x-1}+7=(4x-1)y \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge 1, y\in\mathbb{R}$

Xét hệ: $\begin{cases} x^3+3x^2+4x+2=y^3+y & (1) \\ 4x+6\sqrt{x-1}+7=(4x-1)y & (2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$$(x+1)^3+(x+1)=y^3+y$$

$$(x+1-y)\left[(x+1)^2+(x+1)y+y^2+1\right]=0$$

$$y=x+1 \text{ (vì } (x+1)^2+(x+1)y+y^2+1=\left(x+1+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+1>0\ \forall x,y\text{)}$$

Thay $y=x+1$ vào phương trình (2), ta được: $4x+6\sqrt{x-1}+7=(4x-1)(x+1)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ (\sqrt{x-1}+3)^2 = 4x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \sqrt{x-1}+3 = 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge \dfrac{3}{2} \\ x-1 = (2x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)} \Rightarrow y = 3$$

Vậy $(x;y) = (2;3)$.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên – TP Hải Phòng năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \left(x-1+y^2\right)\sqrt{x-1}+y+1 = y^3+y^2+xy+x \\ x+4\sqrt{y+4} = 2\sqrt{x-1}+y+8 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge -4 \end{cases}$.

Đặt $t = \sqrt{x-1}$ (với $x \ge 1$ thì $t \ge 0$), ta được hệ phương trình

$$\begin{cases} t^3 - y^3 + (t-1)y^2 - (y+1)t^2 = 0 & (1) \\ t^2 + 4\sqrt{y+4} = 2t + y + 7 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có:

$$t^3 - (y+1)t^2 + (t-1)y^2 - y^3 = 0$$
$$t^2(t-y-1) + y^2(t-y-1) = 0$$
$$\left(t^2+y^2\right)(t-y-1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = y = 0 \\ t = y+1 \end{array}\right.$$

TH1. Với $t = y = 0$ thì phương trình (2) trở thành $8 = 7$ (vô lý).

TH2. Với $t = y+1$ thì phương trình (2) trở thành:

$$(y+1)^2 + 4\sqrt{y+4} = 2(y+1) + y + 7$$
$$y^2 = \left(\sqrt{y+4}-2\right)^2$$

Khả năng 1: $y = \sqrt{y+4} - 2$

$$\left(\sqrt{y+4}+1\right)\left(\sqrt{y+4}-2\right) = 0$$
$$\sqrt{y+4} - 2 = 0$$
$$\sqrt{y+4} = 2$$

$y = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Khả năng 2: $y = -\sqrt{y+4} + 2$

$$\left(\sqrt{y+4}+3\right)\left(\sqrt{y+4}-2\right) = 0$$
$$\sqrt{y+4} - 2 = 0$$
$$\sqrt{y+4} = 2$$

$y = 0$ (thỏa mãn điều kiện).

Với $y=0$ thì $t=1\Rightarrow \sqrt{x-1}=1\Rightarrow x=2$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là $S=\left\{\left(2;0\right)\right\}$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Nga, Pháp, Trung - tỉnh Hòa Bình năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+y=3\\ x-2y=1\end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge -1$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}+y=3\\ x-2y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\sqrt{x+1}+2y=6\\ x-2y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2\sqrt{x+1}-7=0\\ x-2y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x+1)+2\sqrt{x+1}-8=0\\ x-2y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=2\\ \sqrt{x+1}=-4\end{array}\right.\\ x-2y=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=3\\ y=1\end{cases}$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Chuyên Tin - tỉnh Hòa Bình năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x\left(2x+3\right)\left(2x+y\right)=15\\ 2x^2+5x+y=8\end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x\left(2x+3\right)\left(2x+y\right)=15\\ 2x^2+5x+y=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left(2x^2+3x\right)\left(2x+y\right)=15\\ (2x^2+3x)+(2x+y)=8\end{cases}$

Đặt $a=2x^2+3x;\ b=2x+y$, hệ trở thành:

$$\begin{cases} ab=15 \\ a+b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ (8-b)b=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ b^2-8b+15=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=8-b \\ \left[\begin{array}{l} b=3 \\ b=5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases} \end{array}\right.$$

Với $\begin{cases} a=5 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-5=0 \\ 2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \\ 2x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2} \\ y=8 \end{cases} \end{array}\right.$

Với $\begin{cases} a=3 \\ b=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2+3x-3=0 \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4} \\ x=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4} \end{array}\right. \\ 2x+y=5 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4} \\ y=\dfrac{13-\sqrt{33}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4} \\ y=\dfrac{13+\sqrt{33}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy hệ có 4 nghiệm: $(1;1)$; $(-\dfrac{5}{2};8)$;$(\dfrac{-3+\sqrt{33}}{4};\dfrac{13-\sqrt{33}}{2})$; $(\dfrac{-3-\sqrt{33}}{4};\dfrac{13+\sqrt{33}}{2})$

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Bình Phước năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy+y\sqrt{y}-x\sqrt{x-1}-\sqrt{xy-y}=0 \\ x^2-4xy+2x+4y=\sqrt{x-2y-1}+3. \end{cases}$

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \\ x-2y-1\ge 0. \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} xy+y\sqrt{y}-x\sqrt{x-1}-\sqrt{y(x-1)}=0 & (1) \\ x^2-4xy+2x+4y=\sqrt{x-2y-1}+3 & (2) \end{cases}$

Xét phương trình (1): $xy+y\sqrt{y}-x\sqrt{x-1}-\sqrt{y(x-1)}=0$

$$\Rightarrow y\left(x+\sqrt{y}\right)-\sqrt{x-1}\cdot\left(x+\sqrt{y}\right)=0 \Rightarrow \left(x+\sqrt{y}\right)\left(y-\sqrt{x-1}\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+\sqrt{y}=0 \\ y-\sqrt{x-1}=0. \end{array}\right.$$

Với $x+\sqrt{y}=0$ (phương trình này vô nghiệm vì $x\ge 1,\ y\ge 0$).

Với $y-\sqrt{x-1}=0\Rightarrow y=\sqrt{x-1}\Rightarrow x=y^2+1$.

Thay $x=y^2+1$ vào phương trình (2) ta được:

$$\left(y^2+1\right)^2-4\left(y^2+1\right)y+2\left(y^2+1\right)+4y-\sqrt{y^2+1-2y-1}-3=0$$

$$y^4-4y^3+4y^2-\sqrt{y^2-2y}=0$$

$$y^2\left(y-2\right)^2-\sqrt{y\left(y-2\right)}=0$$

$$\sqrt{y\left(y-2\right)}\cdot\left[\left(\sqrt{y\left(y-2\right)}\right)^3-1\right]=0$$

TH1: $\sqrt{y\left(y-2\right)}=0$

Giải phương trình ta được nghiệm:

$y=0$ và $y=2$

Với $y=0\Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Với $y=2\Rightarrow x=5$ (thỏa mãn)

TH2: $\left(\sqrt{y\left(y-2\right)}\right)^3-1=0$

$\sqrt{y\left(y-2\right)}=1$

$y^2-2y-1=0$

Giải phương trình ta được nghiệm $y=1\pm\sqrt{2}$

Với $y=1+\sqrt{2}\Rightarrow x=4+2\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

Với $y=1-\sqrt{2}$ (không thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $\left(x;y\right)$ là $\left(1;0\right),\left(5;2\right),\left(4+2\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right)$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=x\left(2y+1\right)-y\\ \sqrt{2x+y}=x+2y\end{cases}$

Lời giải

Với điều kiện xác định $\begin{cases}2x+y\ge 0\\ x+2y\ge 0\end{cases}$ ta có hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+y^2=x\left(2y+1\right)-y & (1)\\ \sqrt{2x+y}=x+2y & (2)\end{cases}$

Xét phương trình (1) ta có:

$$x^2+y^2=x\left(2y+1\right)-y$$

$$x^2-2xy+y^2-x+y=0$$

$$\left(x-y\right)^2-\left(x-y\right)=0$$

$$\left(x-y\right)\left(x-y-1\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=y\\x=y+1\end{array}\right.$$

TH1: $x=y$, thay vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{3y}=3y\Rightarrow\begin{cases}y\ge 0\\\sqrt{3y}\left(\sqrt{3y}-1\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y\ge 0\\\left[\begin{array}{l}y=0\\y=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.\end{cases}$

TH2: $x=y+1$, thay vào phương trình (2) ta được: $\sqrt{2(y+1)+y}=1+3y\Rightarrow\sqrt{3y+2}=1+3y$ (3)

Điều kiện: $3y+1\ge 0\Rightarrow y\ge\dfrac{-1}{3}$

Bình phương 2 vế phương trình (3) được:

$3y+2=(1+3y)^2$

$3y+2=1+6y+9y^2$

$9y^2+3y-1=0$

Có $\Delta=9+36=45>0$, suy ra (3) có 2 nghiệm phân biệt

$y_1=\dfrac{-3+\sqrt{45}}{18}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{6}$ (thoả mãn) và $y_2=\dfrac{-3-\sqrt{45}}{18}=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{6}<\dfrac{-1}{3}$ (không thoả mãn)

Với $y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{6}$ ta có $x=1+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{6}=\dfrac{5+\sqrt{5}}{6}$

Tóm lại, hệ đã cho có 3 nghiệm $(x;y)$ là $(0;0);\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right);\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{6};\dfrac{-1+\sqrt{5}}{6}\right)$

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Yên Bái năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}x-2y-xy=-6\\x^2+4y^2=20\end{cases}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x-2y-xy=-6,(1)\\x^2+4y^2=20,(2)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4\left(x-2y\right)-4xy=-24\\x^2+4y^2=20\end{cases}$

Cộng theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$4\left(x-2y\right)-4xy+x^2+4y^2=\left(-24\right)+20$

$\left(x^2-4xy+4y^2\right)+4\left(x-2y\right)+4=0$

$(x-2y)^2+4(x-2y)+4=0$

$(x-2y+2)^2=0$

$x=2y-2$

Thay $x=2y-2$ vào (1) ta được:

$(2y-2)-2y-(2y-2)y=-6$

$-2-2y^2+2y=-6$

$2y^2-2y-4=0$

$y^2-y-2=0,(\text{ do } a-b+c=0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1\Rightarrow x=-4\\y=2\Rightarrow x=2\end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm là : $S=\{(-4;-1);(2;2)\}$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Hà Nam năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{y}=4\\2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8\end{cases}$.

Lời giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{x+1}+\sqrt{y^2+4}+\sqrt{y}=4 & (1)\\2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8 & (2)\end{cases}$.

Điều kiện: $\begin{cases}x\ge -1\\y\ge 0\end{cases}$

Từ (1): $\sqrt{y}-2=2-\sqrt{x+1}-\sqrt{y^2+4}$

Từ (2): $2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-y+4\sqrt{y}=8\Rightarrow 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-\left(\sqrt{y}-2\right)^2=4$

Thế (1) vào (2) ta được: $2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4}-\left(2-\sqrt{x+1}-\sqrt{y^2+4}\right)^2=4$

$2\sqrt{(x+1)(y^2+4)}-\left(4-4\sqrt{x+1}-4\sqrt{y^2+4}+2\sqrt{(x+1)(y^2+4)}+(x+1)+(y^2+4)\right)=4$

$(x+1)-4\sqrt{x+1}+4+(y^2+4)-4\sqrt{y^2+4}+4=0$

$\left(\sqrt{x+1}-2\right)^2+\left(\sqrt{y^2+4}-2\right)^2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}-2=0 \\ \sqrt{y^2+4}-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(3;0)$.

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Tây Ninh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x+1)^2+y^2+y=6 \\ (y-1)^2+x^2+x=11 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} (x+1)^2+y^2+y=6 \\ (y-1)^2+x^2+x=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x+y-5=0 & (1) \\ x^2+y^2+x-2y-10=0 & (2) \end{cases}$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được: $x+3y+5=0 \Rightarrow x=-3y-5$

Thay x vào $(1):(-3y-5)^2+y^2+2(-3y-5)+y-5=0$

Tìm được: $y=-2, y=-\dfrac{1}{2}$

Tìm được 2 nghiệm $(x;y)=(1;-2),(x;y)=\left(-\dfrac{7}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Sơn La năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2y-1}{y-2}=5 \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $\begin{cases} x\neq 1 \\ y\neq 2 \end{cases}$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{2y-1}{y-2}=5 \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}=\dfrac{13}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)+2}{x-1}+\dfrac{(2y-4)+3}{y-2}=5 \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}=\dfrac{13}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{y-2}=2 \\ \dfrac{3}{x-1}+\dfrac{2}{y-2}=\dfrac{13}{6} \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=\dfrac{1}{x-1} \\ v=\dfrac{1}{y-2} \end{cases}$ ta được hệ phương trình $\begin{cases} 2u+3v=2 \\ 3u+2v=\dfrac{13}{6} \end{cases}$.

Giải hệ phương trình trên ta được $\begin{cases} u = \dfrac{1}{2} \\ v = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{y-2} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \\ y-2=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình $(x;y)=(3;5)$.

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+y^2+3xy-3x-9=0 \\ \sqrt{x^2-y+3}=2x+y \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2-y+3 \geq 0$ (*).

Ta có $2x^2+y^2+3xy-3x-9=0 \Rightarrow (x+y-3)(2x+y+3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y-3=0 \\ 2x+y+3=0 \end{array}\right.$.

Với $y+x-3=0 \Rightarrow y=-x+3,$ thay vào phương trình $\sqrt{x^2-y+3}=2x+y$ ta được:

$\sqrt{x^2+x}=x+3 \Rightarrow \begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x^2+x=(x+3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq -3 \\ x=-\dfrac{9}{5} \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{9}{5} \Rightarrow y=\dfrac{24}{5}$.

Với $2x+y+3=0 \Rightarrow 2x+y=-3,$ thay vào phương trình $\sqrt{x^2-y+3}=2x+y$ ta được

$\sqrt{x^2+2x+3}=-3,$ vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(-\dfrac{9}{5};\dfrac{24}{5}\right)$

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x=\dfrac{x^2+1}{y^2} \\ 2y=\dfrac{y^2+1}{x^2} \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện: $x,y \neq 0$. Có hệ phương trình $\begin{cases} 2xy^2=x^2+1 \\ 2x^2y=y^2+1 \end{cases}$

Trừ vế với vế ta có: $(x-y)(2xy+x+y)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ 2xy+x+y=0 \end{array}\right.$

TH1: $2xy+x+y=0$ vô nghiệm vì $\begin{cases} 2x=\dfrac{x^2+1}{y^2}>0 \\ 2y=\dfrac{y^2+1}{x^2}>0 \end{cases} \Rightarrow x>0,\ y>0 \Rightarrow 2xy+x+y>0$

TH2: $x=y$, thế vào một phương trình trong hệ, ta có:

$2x^3-x^2-1=0 \Rightarrow (x-1)(2x^2+x+1)=0 \Rightarrow x=1$

Vậy hệ có duy nhất một nghiệm là: $(1;1)$

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2+2y^2-5xy+x-2y=0 \\ x^2+2y^2-3x-5y-1=0 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2-5xy+x-2y=0 & (1) \\ x^2+2y^2-3x-5y-1=0 & (2) \end{cases}$$

Xét phương trình $2x^2+2y^2-5xy+x-2y=0$ (1)

Ta có: $\Delta_x=(5y-1)^2-8(2y^2-2y)=9y^2+6y+1=(3y+1)^2$

Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=\dfrac{y-1}{2} \end{array}\right.$

Với $x=2y$ thay vào (2) ta được $6y^2-11y-1=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{11+\sqrt{145}}{12} \Rightarrow x=\dfrac{11+\sqrt{145}}{6} \\ y=\dfrac{11-\sqrt{145}}{12} \Rightarrow x=\dfrac{11-\sqrt{145}}{6} \end{array}\right.$

Với $x=\dfrac{y-1}{2} \Rightarrow y=2x+1$, thay vào (2) ta được $9x^2-5x-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=3 \\ x=-\dfrac{4}{9} \Rightarrow y=\dfrac{1}{9} \end{array}\right.$

Vậy $(x;y)=(1;3);\left(-\dfrac{4}{9};\dfrac{1}{9}\right)\left(\dfrac{11+\sqrt{145}}{6};\dfrac{11+\sqrt{145}}{12}\right);\left(\dfrac{11-\sqrt{145}}{6};\dfrac{11-\sqrt{145}}{12}\right)$

Bài 41. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – chuyên Tin - tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2+xy-3x+3y=0 \\ x^2+y^2+x+y-4=0 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^2-2y^2+xy-3x+3y=0 & (1) \\ x^2+y^2+x+y-4=0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow (x-y)(x+2y-3)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x=3-2y \end{array}\right.$$

Với $x=y$, thay vào (2) ta được: $2y^2+2y-4=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=1 \\ y=-2 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$

Với $x=3-2y$, thay vào (2) ta được: $5y^2-13y+8=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=1 \\ y=\dfrac{8}{5} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{5} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x;y) \in \left\{(1;1);(-2;-2);\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{8}{5}\right)\right\}$

Bài 42. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Phú Thọ năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-2y^2+xy-3y-1=0 \\ x\sqrt{y}+y\sqrt{x-1}=2x+2y \end{cases} (x,y \in \mathbb{R})$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 0$. Phương trình (1) trở thành $(x+2y+1)(x-y-1)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2y-1 \\ x=y+1 \end{array}\right.$

Với $x=-2y-1$: Vì $-2y-1<0, \forall y \geq 0 \Rightarrow x<0$ (vô lý)

Với $x=y+1$: Thay $x=y+1$ vào phương trình (2) ta được

$$(y+1)\sqrt{y}+y\sqrt{y}=2(y+1)+2y \Rightarrow \sqrt{y}(2y+1)=2(2y+1)$$

Mặt khác $y \geq 0 \Rightarrow 2y+1>0 \Rightarrow \sqrt{y}=2 \Rightarrow y=4 \Rightarrow x=5$

Thử lại thỏa mãn. Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;\ y)=(5;4)$.

Bài 43. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin - tỉnh Hòa Bình năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x(y-1)+y(x+1)=6 \\ (x-1)(y+1)=2 \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x(y-1)+y(x+1)=6 \\ (x-1)(y+1)=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy-(x-y)=6 \\ xy+(x-y)=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=3 \\ x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=3 \\ x=y \end{cases}.$$

Tìm được các nghiệm: $\left(\sqrt{3};\sqrt{3}\right);\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$

Bài 44. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Điện Biên năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 4x^2+3x+5=4xy \\ y^2+2y-8=7x \end{cases}$.

Lời giải

$$\begin{cases} 4x^2+3x+5=4xy(1) \\ y^2+2y-8=7x(2) \end{cases}$$

Cộng hai phương trình tương ứng vế với vế ta được: $(2x-y)^2-2(2x-y)-3=0\ (*)$

Ta có $(*) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x-y=-1 \\ 2x-y=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=y-1 \\ 2x=y+3 \end{array}\right.$

Với $2x=y-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được: $2\left(y^2+2y-8\right)=7(y-1)\ (1)$

Giải phương trình này ta được $y_1=3,\ y_2=-\dfrac{3}{2}$, tương ứng ta được $x_1=1,\ x_2=-\dfrac{5}{4}$.

Với $2x=y+3$ thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được:

$2\left(y^2+2y-8\right)=7(y+3)\ (2)$

Giải phương trình này ta được $y_{3,4}=\dfrac{3\pm\sqrt{305}}{4}$, tương ứng ta được $x_{3,4}=\dfrac{15\pm\sqrt{305}}{8}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có tập các nghiệm $(x;y)$ là

$$S=\left\{(1;3),\left(-\frac{5}{4};-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{15+\sqrt{305}}{8};\frac{3+\sqrt{305}}{4}\right),\left(\frac{15-\sqrt{305}}{8};\frac{3-\sqrt{305}}{4}\right)\right\}.$$

Bài 45. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Thanh Hóa năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+8y^3=1+4xy^2 \\ 2x^4+8y^4=2x+y \end{cases}$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3+8y^3=1+4xy^2 \ (1) \\ 2x^4+8y^4=2x+y \ (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+8y^3-4xy^2=1 \\ 2x^4+8y^4=\left(2x+y\right).1=(2x+y).(x^3+8y-4xy^2) \ (3) \end{cases}$$

Giải (3):

$$2x^4+8y^4=\left(2x+y\right).1=(2x+y).(x^3+8y-4xy^2)$$

$$xy.(x^2-8xy+12y^2)=0$$

$$xy(x-6y)(x-2y)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ x=6y \\ x=2y \end{array}\right.$$

+ Xét $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{8}$

+ Xét $y=0 \Rightarrow x=1$

+ Xét $x=6y$ ta có hệ $\begin{cases} 200y^3=1 \\ 2600y^4=13y \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{200}} \Rightarrow x=\dfrac{6}{\sqrt[3]{200}}$

+ Xét $x=2y$ ta được $\begin{cases} 8y^3=1 \\ 40y^4=5y \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=2y=1$

Thử lại ta thấy 4 cặp giá trị $\left(x,\ y\right)$ đều thỏa mãn hệ.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x,y)\in\left\{\left(0,\dfrac{1}{8}\right);\left(1,\dfrac{1}{2}\right);(1,0);\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{200}},\dfrac{6}{\sqrt[3]{200}}\right)\right\}$

Bài 46. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Nghệ An năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} y^2-(y+2)x^2+y-2=0 \\ (2-x)(3y-4x+4)=2(2y+1)\sqrt{2y+1} \end{cases}$

Lời giải

ĐKXĐ: $y\geq -\dfrac{1}{2}$

Ta ký hiệu $\begin{cases} y^2-(y+2)x^2+y-2=0 \quad (1) \\ (2-x)(3y-4x+4)=2(2y+1)\sqrt{2y+1} \quad (2) \end{cases}$

Ta biến đổi phương trình (1) như sau: $y^2-(y+2)x^2+y-2=0$

$\Rightarrow (y+2)(y-1-x^2)=0 \Rightarrow y\in\left\{-2;1+x^2\right\} \Rightarrow y=1+x^2$ (vì $y\ge -\dfrac{1}{2}$)

Thay $y=x^2+1$ vào (2) ta được: $(3)\Rightarrow (2-x)(3x^2-4x+7)=2(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}$

Đặt $x-2=a$, $\sqrt{2x^2+3}=b(b\ge\sqrt{3})$. Ta biến đổi (3) như sau

$(2-x)((x-2)^2+2x^2+3)=2(2x^2+3)\sqrt{2x^2+3}$

$-a(a^2+b^2)=2b^3$

$a^3+ab^2+2b^3=0$

$(a+b)(a^2-ab+2b^2)=0$

$a+b=0$ (vì $a^2-ab+2b^2>b^2>0$)

$x-2+\sqrt{2x^2+3}=0$

$(2-x)^2=2x^2+3$

$$x^2+4x-1=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{5} \\ x=\sqrt{5}-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2-\sqrt{5}, y=10+4\sqrt{5} \\ x=\sqrt{5}-2, y=10-4\sqrt{5} \end{array}\right.$$

Thử lại các nghiệm trên đều thỏa mãn. Vậy tất cả các cặp $(x,\ y)$ thỏa mãn là:

$\left\{(-2-\sqrt{5},10+4\sqrt{5});(\sqrt{5}-2,10-4\sqrt{5})\right\}$

Bài 47. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}(x+y)(4x+y)=5x+2y-1 \\ 2x^2-5x+2\sqrt{x+y}-\sqrt{3x-1}=0\end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases}(x+y)(4x+y)=5x+2y-1 & (1) \\ 2x^2-5x+2\sqrt{x+y}-\sqrt{3x-1}=0 & (2)\end{cases}$, điều kiện: $\begin{cases} x\ge\dfrac{1}{3} \\ x+y\ge 0\end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$4x^2+5x(y-1)+(y-1)^2=0$

$(4x+y-1)(x+y-1)=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=-4x+1 \\ y=-x+1\end{array}\right.$

TH1: Nếu $y=-4x+1$ thì $x+y=-3x+1\ge 0\Rightarrow x\le\dfrac{1}{3}$

Mà $x \ge \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Thử lại $x = \frac{1}{3}$ không thỏa mãn.

TH2: Nếu $y = -x + 1$ thì $(2) \Rightarrow 2x^2 - 5x + 2 = \sqrt{3x-1} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ (2x^2 - 5x + 2)^2 = 3x - 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ 4x^4 - 20x^3 + 33x^2 - 23x + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ (x^2 - 3x + 1)(4x^2 - 8x + 5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \frac{1}{3} \le x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 2 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ y = -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm $(x, y) \in \left\{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$

Bài 48. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} (2x - 3y)(3x + 2y) + 12x + 8y = 0 \\ 4x + 2\sqrt{3x-2} = 3y \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} (2x - 3y)(3x + 2y) + 12x + 8y = 0 \quad (1) \\ 4x + 2\sqrt{3x-2} = 3y \quad (2) \end{cases}$.

Điều kiện: $x \ge \frac{2}{3}$.

Từ (1) $\Rightarrow (2x-3y+4)(3x+2y)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{2x+4}{3} \\ y=-\frac{3x}{2} \end{array}\right.$.

Với $y=\frac{2x+4}{3}$, thay vào (2) ta được:

$4x+2\sqrt{3x-2}=2x+4$

$\sqrt{3x-2}=-x+2$

$\Rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ 3x-2=(-x+2)^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ x^2-7x+6=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=1.$

Hệ có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Với $y=-\frac{3x}{2}$, thay vào (2) ta được: $4x+2\sqrt{3x-2}+\frac{9x}{2}=0$ vô nghiệm, do vế trái luôn dương

$\forall x \ge \frac{2}{3}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

Bài 49. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+y^3=3x^2-3x+1 \\ xy+x+2y=1 \end{cases}$

Lời giải

Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành $y^3=(1-x)^3$

Từ đó $y=1-x$.

Thay vào phương trình thứ hai của hệ, ta được $x(1-x)+x+2(1-x)=1$

Giải phương trình này, ta được $x=1$ (tương ứng $y=0$) hoặc $x=-1$ (tương ứng $y=2$)

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm $(x;y)$ là $(1;0)$ và $(-1;2)$.

Bài 50. (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chuyên - tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 - 2025)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3+xy^2-10y=0 \\ x^2+6y^2=10 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} x^3+xy^2-10y=0 \\ x^2+6y^2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^3+xy^2=10y \quad (1) \\ x^2y+6y^3=10y \quad (2) \end{cases}$

Trừ (1) và (2) ta được:

$x^3+xy^2-x^2y-6y^3=0$

$x^2(x-2y)+xy(x-2y)+3y^2(x-2y)=0$

$(x-2y)(x^2+xy+3y^2)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2y \\ x^2+xy+3y^2=0 \end{array}\right.$

TH1: Nếu $x^2+xy+3y^2=0$ thì $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{11}{4}y^2=0$ mà $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{11}{4}y^2\ge 0$

Nên $y=0,\ x+\frac{y}{2}=0$ hay $x=y=0$ (thử lại vào (2) thì vô lý)

TH2: Nếu $x=2y$. Thế vào (2) ta được: $10y^2=10 \Rightarrow y=\pm 1$

$\Rightarrow (x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$ (thử lại thỏa mãn).

Vậy $(x;y)\in\{(2;1);(-2;-1)\}$