

## TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN HÀM SỐ TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025

### Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - Lớp chuyên tự nhiên tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Cho đường thẳng  $y = 2x + 3$  cắt parabol  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt. Tính tổng tung độ của hai điểm đó.

### Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - Lớp chuyên xã hội tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Cho đường thẳng  $y = x + 2$  cắt parabol  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt. Tính tổng hoành độ của hai điểm đó.

### Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bắc Giang năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = (1 - m)x + m^2 - m$ , với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho ba điểm  $O, A, B$  tạo thành một tam giác cân (với  $O$  là gốc tọa độ).

### Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - Chuyên Nga, Pháp, Trung tỉnh Hoà Bình năm học 2024 - 2025)

Tìm giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d): y = (2m - 1)x + m + 5$  đi qua điểm  $A(-1; 3)$ .

### Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hoà Bình năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = ax + b$ . Tìm  $a$  và  $b$  để đường thẳng  $(d)$  song song với đường thẳng  $(d'): y = x + 2$  và cắt parabol  $(P): y = x^2$  tại một điểm có hoành độ bằng  $-2$ .

### Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Yên Bái năm học 2024 - 2025)

Cho đường thẳng  $(d): y = 3mx - n + 2$  ( $m, n$  là các tham số,  $m \neq 0$ ). Tìm  $m, n$  biết đường thẳng  $(d)$  tiếp xúc với parabol  $(P): y = -x^2$  tại điểm  $A(1; -1)$ .

### Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hà Nam năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y = ax^2$  và đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = bx - 1$  (với  $a, b$  là các tham số).

Tìm các số hữu tỉ  $a, b$  để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là  $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ .

### Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - tỉnh Hà Nam năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = -3x + 2$  và đường thẳng  $(\Delta)$  có phương trình  $y = (m^2 - 7)x + m$  (với  $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  song song với đường thẳng  $(\Delta)$ .

### Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Sơn La năm học 2024 - 2025)

Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = 2(m + 2)x - 2m - 3$

( $m$  là tham số) và parabol  $(P): y = x^2$ .

a) Xác định giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(2; -3)$ .

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

### Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Yên Bái năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2x - m - 2$ .

Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ

$x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + 1 = 2x_2$ .

### Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Điện Biên năm học 2024 - 2025)

Cho các hàm số  $y = -x^2$  ( $P$ ) và  $y = (2m - 2)x - 2m - 5$  ( $d$ ). Biết  $(d) \cap (P)$  tại  $A, B$  sao cho

$M(-1; -11)$  là trung điểm của  $AB$ . Gọi  $H, K$  tương ứng là hình chiếu của  $A, B$  trên trục hoành.

Tính độ dài  $HK$ .

### Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 - 2025)

Cho hai đường thẳng  $d: y = 2x - 1$  và  $d': y = x + m$  ( $m$  là tham số) cắt nhau tại điểm  $A$ . Tìm  $m$  để đoạn thẳng  $OA$  có độ dài bằng 1 ( $O$  là gốc tọa độ).

**Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hưng Yên năm học 2024 - 2025)**

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = -2x + 3$  và parabol  $(P): y = x^2$ . Tìm tọa độ các giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ .

**Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hà Giang năm học 2024 - 2025)**

Xác định hệ số  $a, b$  để đường thẳng  $(d): y = ax + b$  đi qua hai điểm  $A(2; 4)$  và  $B(-1; -5)$ .

**Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bình Định năm học 2024 - 2025)**

Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2x - 3m + 1$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $(P)$ ,  $(d)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  thỏa mãn:

$$y_1^2 - y_2^2 = 2024(x_1^2 - x_2^2)$$

**Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 - 2025)**

Cho hai đường thẳng  $(d_1): y = 2x + 4$  và  $(d_2): y = (m^2 - 2)x + m + 2$ . Tìm  $m$  để  $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

**Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Nam năm học 2024 - 2025)**

Cho parabol  $(P): y = -x^2$  và điểm  $A$  thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng  $-2$ . Đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $B(0; -3)$ , song song với  $OA$  ( $O$  là gốc tọa độ) và cắt  $(P)$  tại hai điểm  $M, N$ . Tìm tọa độ của  $M$  và  $N$ , biết  $M$  có hoành độ âm.

**Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - TP Đà Nẵng năm học 2024 - 2025)**

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = kx - k + 5$

- Chứng minh rằng  $(d)$  luôn đi qua một điểm cố định  $M$  và cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  với mọi giá trị của tham số  $k$ .
- Cho điểm  $C(1; 2)$ , tìm tất cả giá trị của  $k$  để các tam giác  $MAC$  và  $MBC$  có diện tích bằng nhau.

**Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Thanh Hóa năm học 2024 - 2025)**

Cho hai đường thẳng  $(d_1): y = x + 5$  và  $(d_2): y = 3x + 1$ . Xác định  $a, b$  để đường thẳng  $(d): y = ax + b$  đi qua điểm  $A(1; 5)$  và giao điểm của hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

## HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

### Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - Lớp chuyên tự nhiên tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Cho đường thẳng  $y = 2x + 3$  cắt parabol  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt. Tính tổng tung độ của hai điểm đó.

#### Lời giải

1) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng  $y = 2x + 3$  và parabol  $y = x^2$

$$x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = -1 \Rightarrow y = 1$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = 9$$

Vậy tổng tung độ giao điểm là:  $1 + 9 = 10$ .

### Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - Lớp chuyên xã hội tỉnh Nam Định năm học 2024 - 2025)

Cho đường thẳng  $y = x + 2$  cắt parabol  $y = x^2$  tại hai điểm phân biệt. Tính tổng hoành độ của hai điểm đó.

#### Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Vậy tổng hoành độ giao điểm của hai điểm đó là:  $-1 + 3 = 2$ .

### Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bắc Giang năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = (1 - m)x + m^2 - m$ , với  $m$  là tham số. Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho ba điểm  $O, A, B$  tạo thành một tam giác cân (với  $O$  là gốc tọa độ).

#### Lời giải

Với  $m = 1$ , thì đường thẳng  $(d)$  có phương trình:  $y = 0$ , thấy không thỏa mãn.

Với  $m \neq 1$  ta có  $(d)$  cắt trục hoành tại điểm  $A(m; 0)$  và cắt trục tung tại điểm  $B(0; m^2 - m)$ .

Để ba điểm  $O, A, B$  tạo thành một tam giác ta phải có  $m \neq 0$ , lúc đó tam giác  $OAB$  luôn vuông

tại  $O$ . Khi đó tam giác  $OAB$  cân  $\Rightarrow OA = OB \Rightarrow |m| = |m^2 - m| \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ |m - 1| = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ .

So sánh điều kiện suy ra  $m = 2$ .

#### Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - Lớp chuyên Nga, Pháp, Trung tỉnh Hoà Bình năm học 2024 - 2025)

Tìm giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d): y = (2m - 1)x + m + 5$  đi qua điểm  $A(-1; 3)$ .

##### Lời giải

$(d): y = (2m - 1)x + m + 5$  đi qua  $A(-1; 3) \Rightarrow (2m - 1) \cdot (-1) + m + 5 = 3 \Rightarrow m = 3$

Vậy  $m = 3$  thỏa mãn yêu cầu đề.

#### Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - Lớp chuyên Tin tỉnh Hoà Bình năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = ax + b$ . Tìm  $a$  và  $b$  để đường thẳng  $(d)$  song song với đường thẳng  $(d'): y = x + 2$  và cắt parabol  $(P): y = x^2$  tại một điểm có hoành độ bằng  $-2$ .

##### Lời giải

Có  $(d): y = ax + b$  song song với  $(d'): y = x + 2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b \neq 2 \end{cases} \Rightarrow (d): y = x + b (b \neq 2)$

Điểm thuộc  $(P): y = x^2$  có hoành độ  $x = -2$  là  $M(-2; 4)$ .

$(d): y = x + b (b \neq 2)$  đi qua điểm  $M(-2; 4) \Rightarrow -2 + b = 4 \Rightarrow b = 6$  (thỏa mãn)

Vậy  $a = 1; b = 6$  là các giá trị cần tìm.

#### Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Yên Bái năm học 2024 - 2025)

Cho đường thẳng  $(d): y = 3mx - n + 2$  ( $m, n$  là các tham số,  $m \neq 0$ ). Tìm  $m, n$  biết đường thẳng

$(d)$  tiếp xúc với parabol  $(P): y = -x^2$  tại điểm  $A(1; -1)$ .

**Lời giải**

Phương trình hoành độ giao điểm giữa  $(d)$  và  $(P)$  là:

$$-x^2 = 3mx - n + 2 \Rightarrow x^2 + 3mx - n + 2 = 0$$

Để đường thẳng  $(d)$  tiếp xúc với parabol  $(P)$  tại điểm  $A(1; -1)$  thì:

$$\begin{cases} \Delta = 0 \Rightarrow (3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-n + 2) = 0 \Rightarrow 9m^2 + 4n - 8 = 0 \\ x_1 = x_2 = \frac{-3m}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 1 \\ m = \frac{-2}{3} \end{cases}$$

Thử lại thỏa mãn

$$\text{Vậy: } (m, n) = \left( \frac{-2}{3}; 1 \right)$$

**Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hà Nam năm học 2024 - 2025)**

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có phương trình  $y = ax^2$  và đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = bx - 1$  (với  $a, b$  là các tham số). Tìm các số hữu tỉ  $a, b$  để đường thẳng  $(d)$  cắt

parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là  $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = 4 - \sqrt{15}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$  là:  $ax^2 - bx + 1 = 0$  (\*)

Điều kiện để đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt:  $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4a > 0 \end{cases}$

$$(*) \text{ có nghiệm } x = 4 - \sqrt{15} \text{ nên } a(4 - \sqrt{15})^2 - b(4 - \sqrt{15}) + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{15}(-8a + b) + 31a - 4b + 1 = 0$$

Vì  $a, b \in \mathbb{Q}$  nên  $(-8a + b), (31a - 4b + 1) \in \mathbb{Q}$

$$\text{Nếu } 8a - b \neq 0 \text{ thì } \sqrt{15} = \frac{31a - 4b + 1}{8a - b} \in \mathbb{Q} \text{ (vô lí). Suy ra } \begin{cases} 8a - b = 0 \\ 31a - 4b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $a = 1$  và  $b = 8$  thỏa mãn yêu cầu đề.

### Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chung - tỉnh Hà Nam năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d)$  có phương trình  $y = -3x + 2$  và đường thẳng  $(\Delta)$  có phương trình  $y = (m^2 - 7)x + m$  (với  $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  song song với đường thẳng  $(\Delta)$ .

#### Lời giải

Nếu  $m^2 = 7 \Rightarrow m = \sqrt{7}$  hoặc  $m = -\sqrt{7}$ . Khi đó thì  $(\Delta)$  không song song với  $(d)$

$$\text{Nếu } m^2 \neq 7. \text{ Để } (\Delta) \text{ song song với } (d) \text{ thì: } \begin{cases} m^2 - 7 = -3 \\ m^2 \neq 7 \\ m \neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \pm 2 \\ m \neq \pm\sqrt{7} \Rightarrow m = -2 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

Vậy  $m = -2$ .

### Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Sơn La năm học 2024 - 2025)

Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = 2(m+2)x - 2m - 3$

( $m$  là tham số) và parabol  $(P): y = x^2$ .

- Xác định giá trị của  $m$  để đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(2; -3)$ .
- Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt.

#### Lời giải

a) Đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $A(2; -3)$  nên ta có:  $2(m+2).2 - 2m - 3 = -3$

$$\Rightarrow 4m + 8 - 2m - 3 = -3 \Rightarrow 2m = -8 \Rightarrow m = -4$$

Vậy  $m = -4$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

b) Xét phương trình hoành độ giao điểm:  $x^2 - 2(m+2)x + 2m + 3 = 0$  (\*)

Đường thẳng  $(d)$  cắt parabol  $(P)$  tại hai điểm phân biệt khi phương trình (\*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Rightarrow \Delta' > 0.$$

$$\text{Có } \Delta' = (m+2)^2 - 2m - 3 = m^2 + 4m + 4 - 2m - 3 = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2$$

$$\Delta' > 0 \Rightarrow (m+1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq -1. \text{ Vậy } m \neq -1 \text{ thỏa mãn yêu cầu đề.}$$

### Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Yên Bái năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2x - m - 2$ .

Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  để  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt lần lượt có hoành độ  $x_1, x_2$  thỏa mãn  $x_1^2 + 1 = 2x_2$ .

#### Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm  $x^2 - 2x + m + 2 = 0$ .

Ta có  $\Delta' = -1 - m$ .

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi  $\Delta' > 0 \Rightarrow -1 - m > 0 \Rightarrow m < -1$  (\*)

Theo định lý Viète ta được 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = m + 2 & (2) \end{cases}$$

Từ giả thiết  $x_1^2 + 1 = 2x_2$  và (1) ta được  $x_1^2 + 2x_1 - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \Rightarrow x_2 = 5 \\ x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \end{cases}$

Thay vào (2) ta có  $m = -17$  (thỏa mãn),  $m = -1$  (không thỏa mãn).

Vậy  $m = -17$  thỏa mãn yêu cầu đề.

### Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Điện Biên năm học 2024 - 2025)

Cho các hàm số  $y = -x^2$  ( $P$ ) và  $y = (2m - 2)x - 2m - 5$  ( $d$ ). Biết  $(d) \cap (P)$  tại  $A, B$  sao cho

$M(-1; -11)$  là trung điểm của  $AB$ . Gọi  $H, K$  tương ứng là hình chiếu của  $A, B$  trên trục hoành.

Tính độ dài  $HK$ .

#### Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của  $(d) \& (P)$  là:  $x^2 + 2(m - 1)x - 2m - 5 = 0$  (1)

Ta có  $\Delta' = (m - 1)^2 + 2m + 5 = m^2 + 6 > 0, \forall m$  nên luôn có  $(d) \cap (P)$  tại  $A, B$  phân biệt.

Khi đó:  $x_M = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \Rightarrow -1 = 1 - m \Rightarrow m = 2$  (thỏa mãn  $y_M = -11$ ).

Với  $m = 2$  thì phương trình (1) trở thành:  $x^2 + 2x - 9 = 0$

Ta có  $HK = |x_A - x_B| = 2\sqrt{10}$ . Vậy  $HK = 2\sqrt{10}$ .



### Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 - 2025)

Cho hai đường thẳng  $d: y = 2x - 1$  và  $d': y = x + m$  ( $m$  là tham số) cắt nhau tại điểm  $A$ . Tìm  $m$  đã đoạn thẳng  $OA$  có độ dài bằng 1 ( $O$  là gốc toạ độ).

#### Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là nghiệm của phương trình:  $2x - 1 = x + m \Rightarrow x = m + 1$

$$\text{Khi đó ta có: } A(m+1, 2m+1) \Rightarrow OA = \sqrt{(m+1)^2 + (2m+1)^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = \frac{-1}{5} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy  $m = -1$  và  $m = \frac{-1}{5}$  thỏa mãn yêu cầu đề.

### Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hưng Yên năm học 2024 - 2025)

Trong mặt phẳng toạ độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $(d): y = -2x + 3$  và parabol  $(P): y = x^2$ . Tìm toạ độ các giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$ .

#### Lời giải

$$\text{Phương trình hoành độ giao điểm: } x^2 = -2x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 9 \end{cases}$$

Vậy toạ độ giao điểm của  $(d)$  và  $(P)$  là  $A(1; 1)$  và  $B(-3; 9)$ .

### Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Hà Giang năm học 2024 - 2025)

Xác định hệ số  $a, b$  để đường thẳng  $(d): y = ax + b$  đi qua hai điểm  $A(2; 4)$  và  $B(-1; -5)$ .

#### Lời giải

$$(d): y = ax + b \text{ đi qua hai điểm } A(2; 4) \text{ và } B(-1; -5) \text{ nên ta có hệ phương trình } \begin{cases} 2a + b = 4 \\ -a + b = -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$$

Vậy  $a = 3; b = -2$ .

### Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Bình Định năm học 2024 - 2025)

Cho parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = 2x - 3m + 1$  ( $m$  là tham số). Tìm tất cả các giá trị của  $m$  để  $(P), (d)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  thỏa mãn

$$y_1^2 - y_2^2 = 2024(x_1^2 - x_2^2)$$

### Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d): x^2 = 2x - 3m + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 3m - 1 = 0$  (1)

Phương trình (1) có  $\Delta' = 2 - 3m$

Để  $(P)$  và  $(d)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm thực  $x_1, x_2$

phân biệt, tức là  $\Delta' = 2 - 3m > 0 \Rightarrow m < \frac{2}{3}$

Với  $m < \frac{2}{3}$  theo định lý Vi-ét ta có  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 3m - 1 \end{cases}$

Vì  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in (P)$  nên  $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

Khi đó biểu thức đang xét trở thành

$$x_1^4 - x_2^4 = 2024(x_1^2 - x_2^2)$$

$$(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = 2024(x_1^2 - x_2^2)$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2024) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2024 = 0 \text{ (vì } x_1 + x_2 = 2 \neq 0; x_1 \neq x_2)$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2024 = 0$$

$$2^2 - 2(3m - 1) - 2024 = 0$$

$$6m = -2018 \Rightarrow m = \frac{-1009}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

Kết luận:  $m = \frac{-1009}{3}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

### Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 - 2025)

Cho hai đường thẳng  $(d_1): y = 2x + 4$  và  $(d_2): y = (m^2 - 2)x + m + 2$ . Tìm  $m$  để  $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau tại một điểm thuộc trục hoành.

### Lời giải

+) Điều kiện  $(d_1)$  và  $(d_2)$  cắt nhau:  $m \neq -2, m \neq 2$ .

+)  $(d_1)$  cắt  $Ox$  tại  $A(-2;0)$ .

$$+) (d_2) \text{ qua } A(-2;0) \Rightarrow 0 = -2(m^2 - 2) + m + 2 \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện ta thấy chỉ có  $m = -\frac{3}{2}$  thỏa mãn.

Vậy  $m = -\frac{3}{2}$  là giá trị cần tìm.

### Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - tỉnh Quảng Nam năm học 2024 - 2025)

Cho parabol  $(P): y = -x^2$  và điểm  $A$  thuộc  $(P)$  có hoành độ bằng  $-2$ . Đường thẳng  $(d)$  đi qua điểm  $B(0;-3)$ , song song với  $OA$  ( $O$  là gốc tọa độ) và cắt  $(P)$  tại hai điểm  $M, N$ . Tìm tọa độ của  $M$  và  $N$ , biết  $M$  có hoành độ âm.

#### Lời giải

Ta có đường thẳng  $OA: y = 2x$

Vì  $MN \parallel OA$  nên đường thẳng  $MN$  có dạng:  $y = 2x + b, (b \neq 0)$

Mà  $MN$  đi qua  $B(0;-3)$  nên  $b = -3$

Hay đi  $MN$  có dạng  $y = 2x - 3$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng  $MN$  và  $CD$  có

$$-x^2 = 2x - 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

Như vậy  $M(-3;-9), N(1;-1)$ .

### Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên - TP Đà Nẵng năm học 2024 - 2025)

a) Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho Parabol  $(P): y = x^2$  và đường thẳng  $(d): y = kx - k + 5$

Chứng minh rằng  $(d)$  luôn đi qua một điểm cố định  $M$  và cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  với mọi giá trị của tham số  $k$ .

b) Cho điểm  $C(1; 2)$ , tìm tất cả giá trị của  $k$  để các tam giác  $MAC$  và  $MBC$  có diện tích bằng nhau.

#### Lời giải

a) Để thấy  $(d)$  luôn đi qua điểm  $M(1;5)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của  $(P)$  và  $(d)$ :  $x^2 = kx - k + 5 \Rightarrow x^2 - kx + k - 5 = 0$  (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn  $x$ , ta có

$$\Delta = k^2 - 4(k - 5) = k^2 - 4k + 20 = (k - 2)^2 + 16 \geq 16 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, hay đường thẳng  $(d)$  cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $A, B$  với mọi giá trị của tham số  $k$ .

b) Chú ý rằng ba điểm  $M, A, B$  thẳng hàng vì cùng thuộc đường thẳng  $(d)$ , nên hai tam giác  $MAC$  và  $MBC$  có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi  $MA = MB$ . Do hai tam giác này có chung độ dài chiều cao là khoảng cách từ điểm  $C$  đến đường thẳng  $(d)$ .

Điều này dẫn đến  $M$  là trung điểm của  $A, B$  do  $A, B$  là hai điểm phân biệt.

Gọi  $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$  do hoành độ của  $A, B$  là nghiệm của phương trình (1) nên theo định lý Vi-

et, ta có 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = k - 5 \end{cases}$$

Vì  $M(1; 5)$  là trung điểm của  $A, B$  nên ta được  $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow k = 2$

Vậy  $k = 2$  là giá trị cần tìm để các tam giác  $MAC$  và  $MBC$  có diện tích bằng nhau.

### Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán chuyên – tỉnh Thanh Hóa năm học 2024 - 2025)

Cho hai đường thẳng  $(d_1): y = x + 5$  và  $(d_2): y = 3x + 1$ . Xác định  $a, b$  để đường thẳng

$(d): y = ax + b$  đi qua điểm  $A(1; 5)$  và giao điểm của hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

#### Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng  $(d_1), (d_2)$  là nghiệm của phương trình:  $x + 5 = 3x + 1$

Giải phương trình ta được:  $x = 2 \Rightarrow y = 7$

Vậy giao điểm của hai đường thẳng  $(d_1), (d_2)$  là  $B(2; 7)$ .

Ta có đường thẳng  $(d): y = ax + b$  đi qua điểm  $A(1; 5)$  và  $B(2; 7)$  nên thay tọa độ hai điểm vào

phương trình đường thẳng ta có:  $\begin{cases} 5 = a + b \\ 7 = 2a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$ . Vậy  $a = 2; b = 3$  thỏa mãn yêu cầu đề.