TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC VÀ TỔ HỢP TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025

Bài 1 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – trường THPT chuyên Hạ Long năm học 2024 – 2025):

a) Cho $a,\ b,\ c$ là ba số nguyên khác 0 thỏa mãn $\dfrac{2025}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.

Chứng minh rằng abc chia hết cho 4.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p,\ q)$ sao cho $p^2-3pq+4q^2$ là một số chính phương.

Bài 2 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – trường THPT chuyên Hạ Long năm học 2024 – 2025):

Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 1975 lên bảng. Ta chọn hai số bất kì a,b trên bảng và xóa chúng đi, sau đó viết thêm số $|a-b|$ lên bảng. Thực hiện liên tiếp như vậy đến khi trên bảng chỉ còn một số, ta gọi số đó là c.

a) Số c có thể là 1945 hay không? Giải thích tại sao?

b) Số c có thể là 1954 hay không? Giải thích tại sao?

Bài 3 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thành phố Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho một hình vuông cạnh 8 cm có chứa bên trong 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể vẽ được một đường tròn bán kính 1,5 cm có chứa bên trong ít nhất 127 điểm trên.

Bài 4 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thành phố Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cặp số nguyên dương $(a;b)$ được gọi là cặp số "*may mắn*" của số n nếu $a+b=n$ và tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đẳng thức $\dfrac{4}{a}+\dfrac{4}{b}=\dfrac{1}{p}$. Tìm các cặp số "*may mắn*" của số 2025.

Bài 5 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương x sao cho x^2+x+10 là số chính phương.

Bài 6 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 – 2025)

Tìm ba số nguyên dương $x;\ y;\ z$ đôi một khác nhau thỏa mãn hai điều kiện:

- $x^2+xy+y^2+(3z^2-z-4)(x+y)=10z^2-3$.
- Trong bốn số $x+y+3z^2-1$; $x+y-3$; $x+z$; $y+z$ có đúng một hợp số.

Bài 7 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $n^5-6n+33$ không là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương $a,\ b$ thỏa mãn điều kiện $a+b+1$ là ước nguyên tố của $4\left(a^2+ab+b^2\right)-3$. Chứng minh rằng $a+b-1$ là ước của $4\left(a^2+ab+b^2\right)-3$.

Bài 8 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành $2n$ ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương n để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.

Bài 9 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Bình năm học 2024 – 2025)

Cho $a,\ b$ là các số nguyên thỏa mãn $(a^2+3ab)^5+(b^2-ab)^5=2^{2026}+1$.

Chứng minh $a+b$ chia hết cho 5.

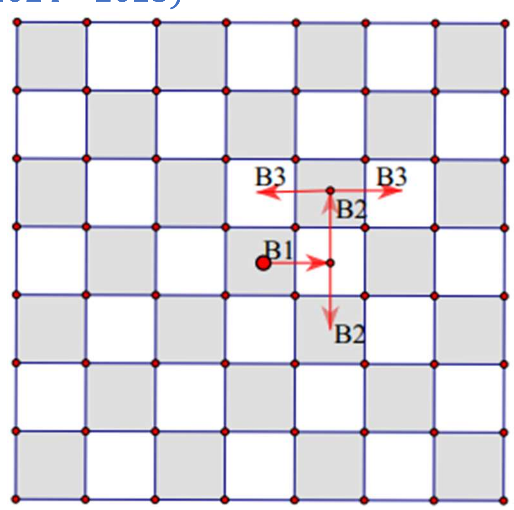
Bài 10 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

a) Cho số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương a thỏa mãn: a^p-1 chia hết cho p^3.

b) Chứng minh rằng $a-1$ chia hết cho p^2.

Bài 11 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

Cho bảng vuông 7×7 gồm 49 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ, theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở chung một ô vuông.



Bài 12 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức với các hệ số nguyên thỏa mãn đa thức $x.P(x^4)+Q(x^2)$ chia hết cho đa thức x^2+2. Chứng minh $5.P(2028)+6.Q(2022)$ chia hết cho 2024.

Bài 13 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+xy-x-3y=7$.

b) Với mỗi số thực a, gọi $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\left[\dfrac{n^4-4n^3+5n^2-1}{4n^2}\right]$ là một số nguyên tố.

c) Nhân kỷ niệm 60 năm ngày thành lập, Trường trung học phổ thông X đã chọn ra 300 học sinh tham gia cuộc diễu hành. Mỗi em tham gia diễu hành được gắn một số nguyên dương phân biệt từ 1 đến 300. Ban tổ chức xếp ngẫu nhiên 300 em học sinh đó thành bốn khối đội hình. Chứng minh rằng luôn có ba em học sinh thuộc cùng một khối đội hình mà ba số x, y, z được gắn trên các em học sinh đó thỏa mãn x chia hết cho y và y chia hết cho z.

Bài 14 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lai Châu năm học 2024 – 2025)

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+1)(y+1)=6$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3+1$ chia hết cho 2^{2024}.

Bài 15 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lai Châu năm học 2024 – 2025)

Anh Nam là một vận động viên chơi cờ. Để luyện tập, mỗi ngày anh chơi ít nhất một ván. Để khỏi mệt, mỗi tuần anh chơi không quá 12 ván. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp trong đó anh chơi đúng 20 ván.

Bài 16 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – thành phố Hải Phòng năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x và y sao cho 2^x+3^y là số chính phương.

b) Trong một hội nghị, các đại biểu đến từ n quốc gia, ngồi quanh một bàn tròn. Biết rằng với hai đại biểu cùng quốc gia bất kỳ thì người ngồi cạnh bên phải của họ luôn không cùng quốc gia. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu đại biểu?

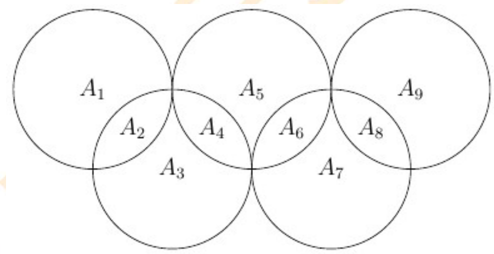
Bài 17 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2-2xy+3y-x-1=0$.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ và $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ đều là các số nguyên.

Bài 18 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

Cho 5 đường tròn có cùng bán kính và sắp xếp để tạo thành 9 miền được kí hiệu là $A_1, A_2, \dots, A_9$ (như hình vẽ). Sau đó, điền vào 9 miền trên các số được lấy từ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho mỗi miền được điền bởi một số, hai miền khác nhau được điền bởi hai số khác nhau và tổng các số trong mỗi hình tròn đều bằng 14.



a) Tính tổng các số ở các miền A_2, A_4, A_6, A_8.

b) Hỏi có bao nhiêu cách điền thỏa mãn điều kiện trên? Vì sao?

Bài 19 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Trong hình chữ nhật (H) kích thước $6cm \times 4cm$, cho năm điểm phân biệt $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$.

Chứng minh rằng:

a) Trong năm điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ luôn tồn tại ba điểm cùng thuộc một đường tròn bán kính $2,5cm$

b) Tồn tại một đường tròn đường kính $0,99\ cm$ nằm trong (H) và không có điểm chung với bất kì hình tròn nào trong năm hình tròn tâm A_i đường kính $1\ cm$ (Với $i=1,2,3,4,5$)

Bài 20 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho 10 số nguyên dương phân biệt $a_1; a_2; a_3; \dots; a_{10}$ và p là một ước nguyên tố bất kì của $A = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + 10a_{10}$. Chứng minh rằng:

a) $B = 10^{p^2} - 10$ chia hết cho p

b) $C = a_1.1^{p^{2024}} + a_2.2^{p^{2024}} + a_3.3^{p^{2024}} + \dots + a_{10}.10^{p^{2024}}$ là hợp số

Bài 21 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để lấy được một số chia hết cho 7.

Bài 22 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

a) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho x^2+2y là số chính phương.

Chứng minh rằng x^2+y là tổng của hai số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$.

Bài 23 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

a) Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố, $(p>3)$. Chứng minh rằng $2p^2+7$ là hợp số.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $3^x+40=y^2$.

Bài 24 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

Một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tham gia một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì của lớp thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh rằng có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh

Bài 25 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.

Bài 26 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn $x^2-xy+3x-2y^2-3y-3=0$.

Bài 27 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng: $10^{2023}+2024$ chia hết cho 3;

b) Chứng minh rằng: $n^3+2024n+2$ không chia hết cho $10^{2023}+2024$ với mọi số tự nhiên n.

Bài 28 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\dfrac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.

Bài 29 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình sau đây trên tập số nguyên: $2x^2y+8x^2+y=11$.

Bài 30 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Định lý Wilson phát biểu ở dạng chia hết như sau: "Cho số nguyên dương $n \ge 2$, khi đó n là số nguyên tố khi và chỉ khi $(n-1)!+1$ chia hết cho n"; với kí hiệu $n! = 1.2.3...n$ là tích của n số nguyên liên tiếp từ 1 đến n và $0! = 1$.

a) Sử dụng định lý Wilson chứng minh rằng: "n là số nguyên tố thì $(n-2)!-1$ chia hết cho n".

b) Hãy chứng minh chiều ngược của định lý Wilson: "Số nguyên dương $n \ge 2$ thỏa mãn $(n-1)!+1$ chia hết cho n thì n là số nguyên tố".

Bài 31 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Viết các số nguyên dương liên tiếp $1,\ 2,\ \ldots,\ 2022$ trên bảng; gọi $m,\ n$ là ước nguyên tố của 2025, người ta thực hiện mỗi bước như sau: Hai số bất kì a, b ở trên bảng sẽ bị xóa đi và viết thay thế lên bảng số $|ma-nb|$ hoặc $|ma+nb|$. Thực hiện liên tiếp các bước như trên, hỏi rằng cuối cùng trên bảng có thể còn lại duy nhất số 2024 hay không?

Bài 32 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng $A = 2^{2023} + 3m^2 + 6n - 23$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên $m, n.$

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(m,\ n)$ để $B = 3^{3m^2+6n-22} + 4$ là một số nguyên tố.

Bài 33 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Ban đầu, trên bảng có n số nguyên dương đầu tiên được viết liên tiếp từ trái qua phải: $1, 2, 3, \ldots, n-1, n.$ Ta thực hiện trò chơi đổi số như sau: Mỗi lượt chơi, lấy ba số đứng liền nhau a, b, c và đổi chỗ a với c thành $c, b, a.$ Hỏi sau hữu hạn lượt chơi như trên ta có thể thu được dãy số ngược lại $n, n-1, \ldots, 2, 1$ hay không, nếu:

a) $n = 5;$

b) $n = 2024.$

Bài 34 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Chứng minh rằng $2025^n + n^2 + 2024n + 5$ không phải là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

Bài 35 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tập hợp S gồm có 18 số tự nhiên khác nhau bất kỳ.

a) Lấy ra 5 phần tử bất kỳ của tập hợp $S.$ Chứng minh rằng trong 5 phần tử lấy ra đó luôn tồn tại 3 phần tử có tổng chia hết cho 3.

b) Chứng minh rằng luôn tồn tại 9 phần tử của tập hợp S có tổng chia hết cho 9.

Bài 36 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $x^2+5x+6y+3xy+1=0$.

2) Cho biết *Định lí Fermat nhỏ:* "Cho số nguyên tố p. Nếu số nguyên x không chia hết cho p thì $x^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, hay là $x^{p-1}-1 \vdots p$

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^5-a \vdots 5$.

b) Cho hai số nguyên $a,\ b$. Gọi $p=4k+3$ ($k\in\mathbb{N}$) là số nguyên tố và p là ước của a^2+b^2. Chứng minh rằng p là ước chung của a và b.

3) Cho tập hợp S gồm 2023 điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, không có bốn điểm nào nằm trên cùng một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm $A,\ B,\ C$ thuộc tập S sao cho: bên trong đường tròn ngoại tiếp ΔABC có đúng 674 điểm của tập S.

Bài 37 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x,\ y)$ thỏa mãn $4x^2+5y^2+4xy-4x-2y-8=0$.

Bài 38 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Trong một buổi tổ chức lễ tuyên dương cho các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một tỉnh, ngoại trừ bạn Bình, hai người bất kì đều bắt tay nhau. Bình chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng mỗi cặp (hai người) chỉ bắt tay không quá một lần và có tổng cộng tất cả 454 cái bắt tay. Hỏi bạn Bình có bao nhiêu người quen trong buổi lễ tuyên dương đó?

Bài 39 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025)

Kết thúc năm học 2022 - 2023, Hòa hỏi Bình: *"Bạn có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và điểm 9 vậy?"*. Bình trả lời: *"Số bài kiểm tra đạt điểm 8, điểm 9 của tớ nhiều hơn 21 và tổng số điểm của các bài kiểm tra đó là 183"*. Em hãy tính giúp Hòa xem Bình có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 9 nhé.

Bài 40 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025)

Cho $a,\ b,\ c,\ d$ là các số nguyên thỏa mãn: $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|=a^{2024}+2025$.

Chứng minh rằng $a^{12}-1$ chia hết cho 16.

Bài 41 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025)

Một hội nghị tham dự có n người $(n < 75)$, mỗi người được xếp vào m hàng. Tổng số người và số hàng cộng với tích, thương, hiệu của số người và số hàng bằng 847. Tính số người tham dự hội nghị và số người của mỗi hàng.

Bài 42 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – trường THPT chuyên Lam Sơn năm học 2024 – 2025)

Hai bạn X và Y tham gia một trò chơi. Có một tờ giấy đã viết 47 số nguyên từ 1 đến 47 và một hộp đựng n viên bi. X là người chơi trước, Y là người chơi sau và sở hữu hộp bi. Hai người luân phiên thực hiện gạch số, mỗi lượt chơi thì người chơi gạch đi 5 số. Sau khi X chơi xong lượt cuối cùng thì còn lại 2 số, hai số đó chênh lệch bao nhiêu thì Y phải đưa cho X bấy nhiêu viên bi. Nếu Y hết bi hoặc không đủ số bi để đưa cho X thì X thắng cuộc, ngược lại nếu Y còn ít nhất một viên bi thì Y thắng cuộc.

a) Với $n = 27$, chứng minh rằng Y luôn có cách chơi để thắng cuộc.

b) Với $n = 26$, chứng minh rằng X luôn có cách chơi để thắng cuộc.

Bài 43 (Đề thi vào 10– Toán chuyên –THPT chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm học 2024 – 2025)

a) Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy - yz - zx = 3$.

Chứng minh $A = (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3)$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3 + 73xy + 2025 = 3y^3$

Bài 44 (Đề thi vào 10– Toán chuyên–THPT chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm học 2024 – 2025)

Cho lục giác đều có cạnh bằng 6cm. Hỏi có thể đặt vào trong lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2cm, sao cho bất kì hai hình tròn nào trong 7 hình tròn đó không có điểm trong chung?

Bài 45 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

a) Cho phương trình $x^4 + x^2(ax + a - 1) + ax = 2 - a$ (a là tham số). Chứng minh rằng nếu a khác 2 và tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là số nguyên thì $2a^2 - 6a + 9$ là hợp số

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1) = 3abc$.

Bài 46 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

Trong hình lục giác đều có cạnh bằng 4 cho 257 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại hình vuông có cạnh bằng 1 chứa ít nhất 5 điểm (có thể thuộc cạnh hình vuông) trong số các điểm đã cho.

Bài 47 (Đề khảo sát vào 10 – Toán chuyên – trường THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$.

Bài 48 (Đề khảo sát vào 10 – Toán chuyên – trường THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Cho n là số nguyên dương và d là ước dương của $2n^2$, chứng minh n^2+d không phải là số chính phương.

Bài 49 (Đề khảo sát vào 10 – Toán chuyên – trường THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Chứng minh rằng từ 6 số vô tỉ tùy ý ta có thể chọn được 3 số a,b,c sao cho cả 3 số $a+b,\ b+c,\ c+a$ đều là số vô tỉ. Bài toán còn đúng không nếu ban đầu là 4 số?

Bài 50 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3-9n+54$ không chia hết cho 81.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $P=\sqrt{n+6}+\sqrt{n+3\sqrt{n+6}}$ là số nguyên.

Bài 51 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Trên một đường tròn, lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác không, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó, giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 2024 điểm trên.

Bài 52 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả số nguyên n sao cho n^3+2n^2+7n+7 chia hết cho n^2+3.

Bài 53 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Có 6 viên bi, ban đầu được chia thành một hoặc nhiều nhóm, mỗi nhóm ít nhất 1 bi. Ta thực hiện liên tiếp các bước sau: mỗi lần lấy ở mỗi nhóm 1 bi và lập thành một nhóm mới.

Ví dụ: Nếu ban đầu ta có hai nhóm với số bi là $5,1$ thì sau bước chuyển, nhóm 5 bi còn lại 4 bi, nhóm 1 bi không còn bi nào, và một nhóm mới được lập với 2 bi. Như vậy, sau bước chuyển ta được 2 nhóm mới có số bi lần lượt là $2,4$.

Chứng minh sau một số bước chia nhóm như trên, ta luôn chia được các bi đã cho thành ba nhóm với số bi trong mỗi nhóm lần lượt là $1,2,3$.

Bài 54 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $x^2+4y^2=2xy(x-2y)+5$

b) Cho $m,\ n$ là các số nguyên thỏa mãn $m^2-mn+4n^2$ chia hết cho 25.

Chứng minh số $m^2+mn+4n^2$ chia hết cho 25.

Bài 55 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho $x,\ y,\ k$ là các số nguyên dương sao cho số $p=\dfrac{x^k y}{x^2+y^2}$ là số nguyên tố. Tìm k

Bài 56 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông kích thước 6×6. Ở bước đầu tiên, bạn Đan tô đỏ k ô vuông bất kỳ của bảng. Sau đó, ở mỗi bước tiếp theo bạn Đan tô đỏ các ô vuông kề với ít nhất hai ô đã được tô đỏ (hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có cạnh chung)

a) Chỉ ra một cách tô đỏ 23 ô của bảng ở bước đầu tiên sao cho dù sau bao nhiêu bước, bạn Đan cũng không thể tô đỏ được tất cả các ô của bảng.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại một cách tô đỏ k ô vuông ban đầu sao cho sau một số hữu hạn bước, bạn Đan tô đỏ được tất cả các ô vuông của bảng.

Bài 57 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương thỏa mãn đẳng thức $(x+y)^3+6xy+3y^2+y=8x^3+9x^2+1$

Bài 58 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho có thể cắt hình vuông có cạnh bằng m thành đúng 5 hình chữ nhật mà độ dài 10 cạnh của 5 hình chữ nhật đó được lấy từ các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ và mỗi số được lấy đúng một lần.

Bài 59 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Sư Phạm năm học 2024 – 2025)

Giả sử ta có quy tắc * mà với mỗi cặp số nguyên dương $(a;b)$, ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu $a*b$ sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:

- $a*a=a$ với mọi số nguyên dương a;
- $a*b=b*a$ với mọi số nguyên dương a và b;
- $a*b=(a-b)*b$ với mọi số nguyên dương $a>b$.

a) Tính giá trị $16*2024$.

b) Chỉ ra một quy tắc * thỏa mãn ba điều kiện trên.

Bài 60 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng vuông kích thước 8×8 được chia thành 8 hàng, 8 cột, 64 ô vuông đơn vị có cùng kích thước. Ta lát kín bảng đó bằng các domino màu đen và domino màu trắng (mỗi domino như thế là hình gồm 2 ô vuông đơn vị có chung cạnh) thỏa mãn ba điều kiện sau:

i) Mỗi domino phủ đúng 2 ô vuông đơn vị của bảng;

ii) Hai domino không cùng phủ một ô vuông đơn vị của bảng;

iii) Mọi hình vuông gồm 4 ô vuông đơn vị của bảng đều có ít nhất một ô vuông đơn vị được phủ bởi một domino màu đen.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lát bảng ban đầu thỏa mãn ba điều kiện trên mà trong cách lát đó ta sử dụng đúng k domino màu đen.

Bài 61 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $2x^2+2xy+3y=4y^2+3$

b) Cho các số nguyên dương x, y và số nguyên tố p thỏa mãn $\dfrac{p}{(2x+y)^2}=\dfrac{x-y}{p}$.

Chứng minh $p=3y+2$.

Bài 62 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

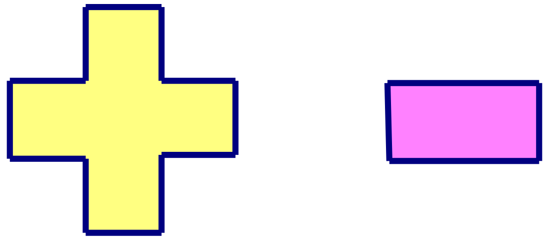
Cho a,b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{a-b^2}{b}=a(a-c^2)$. Chứng minh $b=c$.

Bài 63 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông kích thước $n\times n$ và hai loại miếng ghép hình “dấu cộng”, “dấu trừ” như hình dưới. Ta cần phủ kín bảng ô vuông đã cho bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép không được chồng lên nhau. Biết rằng mỗi ô vuông nhỏ của các miếng ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng và miếng ghép “dấu trừ” có thể xoay 90°.

a) Chỉ ra một cách phủ kín thỏa mãn yêu cầu trên với $n=6$.

b) Tìm tất cả giá trị của n để bảng ô vuông kích thước $n\times n$ có thể được phủ kín bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép trên.



Bài 64 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán - Tin – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $4k^4+1$ với k là một số tự nhiên

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để n^2+1 là ước số của $Q = 1.2.3\ldots n$

Bài 65 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán - Tin – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

Cho tập A gồm 2025 số tự nhiên liên tiếp. Một tập con B của A được gọi là tập con có tính chất "nodiv" nếu hai phần tử $a,\ b\ (a>b)$ bất kì thuộc tập B đều thỏa mãn điều kiện $a+b$ không chia hết cho $a-b$.

a) Chỉ ra một tập con B của A có tính chất "nodiv" mà B có đúng 675 phần tử

b) Nếu B là một tập con của A có tính chất "nodiv" thì B có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Bài 66 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số nguyên tố p,q thỏa mãn $p(p-1)=q(q^2-1)$.

Bài 67 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho một mảnh giấy hình vuông. Mảnh giấy này được chia thành hai mảnh giấy bằng một đường cắt thẳng. Lấy một trong hai mảnh có được, ta lại làm như trên nhiều lần. Hỏi số lần cắt ít nhất phải là bao nhiêu để có thể nhận được 100 đa giác 20 cạnh.

Bài 68 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+2y)(x-y)+5x+4y=-1$.

Bài 69 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}+\overline{ba}$ là số chính phương.

Bài 70 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

Cho hai đống sỏi, A và B. Nếu chuyển 100 viên sỏi từ đống A sang đống B thì số sỏi ở đống B gấp đôi số sỏi ở đống A. Còn nếu chuyển một số viên sỏi từ đống B sang đống A thì số sỏi ở đống A gấp 6 lần số sỏi ở đống B. Hỏi đống A có ít nhất bao nhiêu viên sỏi?

Bài 71 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho a,b là các số hữu tỉ. Chứng minh $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ là số hữu tỉ

Bài 72 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho a,b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3=2b^4+a^2b$. Chứng minh a chia hết cho b.

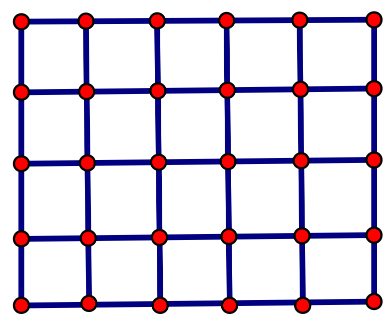
Bài 73 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;\ q)$ sao cho $p^2+q^2+4pq+52$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\ y)$ sao cho $5^x-1=4y^4$

Bài 74 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho một bảng 4×5 ô vuông gồm 4 hàng và 5 cột (như hình vẽ bên). Ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 20 vào các ô, mỗi ô chứa đúng một số và các số ở mỗi ô là khác nhau. Gọi d_i với $i\in\{1;2;3;4\}$ là hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất ở hàng thứ i. Gọi D là giá trị lớn nhất trong các giá trị d_1,d_2,d_3,d_4. Ta gọi D là "độ lệch" của hàng



a) Hãy chỉ ra một cách ghi để $D=4$

b) Hãy chỉ ra một cách ghi để $d_1=d_2=d_3=d_4=5$

c) Với mỗi cách ghi bất kì, ta tiến hành sắp xếp lại các số trong bảng theo quy luật: ở mỗi cột, các số được xếp giảm dần (số trên cùng là lớn nhất, số dưới cùng là nhỏ nhất). Chứng minh sau khi sắp xếp lại thì "độ lệch" của bảng mới không lớn hơn "độ lệch" của bảng cũ.

Bài 75 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.

Bài 76 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số tự nhiên x sao cho giá trị của biểu thức x^2+3x+5 là một số chính phương.

Bài 77 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025)

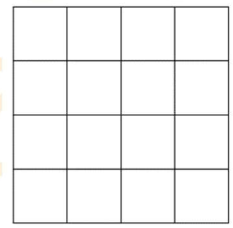
Trên bàn có 2024 viên kẹo, hai bạn A và B tiến hành trò chơi lấy viên kẹo. Hai bạn A và B thay phiên nhau lấy kẹo, đến lượt chơi mỗi bạn sẽ lấy 1, 2, 3 hoặc 4 viên kẹo. Bạn nào không còn kẹo để lấy sẽ thua cuộc. Nếu A đi trước thì bạn nào sẽ là người đó chiến thuật để luôn thắng trong trò chơi và chiến thuật đó như thế nào?

Bài 78 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – thành phố Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0$.

Bài 79 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – thành phố Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như hình sau:



Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau. Trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng ba số còn lại trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng.

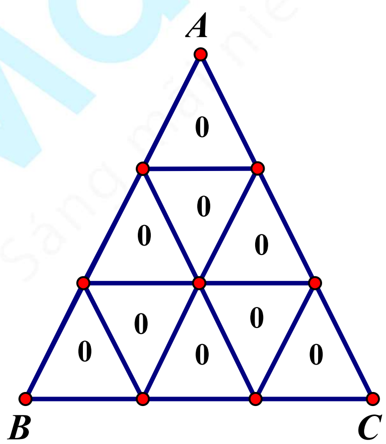
Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Bài 80 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số nguyên dương n và các số nguyên tố p, thỏa mãn: $n + 7p = (n - p)^3$

Bài 81 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Chia tam giác đều ABC thành 9 tam giác con, rồi điền vào mỗi tam giác con một số 0, như ở hình dưới đây.



Cho phép thay đổi các số trong tam giác ABC, theo quy tắc: Mỗi lần, lấy hai số nằm ở hai tam giác con có chung cạnh, rồi tăng mỗi số lên 1 đơn vị, hoặc giảm mỗi số đi 1 đơn vị.

Hỏi nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn làm phép thay đổi số nói trên, ta có thể làm cho 9 số nằm trong tam giác ABC là 9 số tự nhiên liên tiếp, từ 4 đến 12, hay không? Vì sao?

Bài 82 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tiền Giang năm học 2024 – 2025)

Cho hai số nguyên p,q thỏa mãn đẳng thức $p^2+q^2=2(3pq-4)$ (*)

a) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p,q là bội của 3

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa mãn (*)

Bài 83 (Đề thi vào 10–Toán chuyên–trường THPT Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024–2025)

Với mỗi số tự nhiên n, đặt $a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$.

a) Chứng minh rằng $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$, với mọi $n\in\mathbb{N}$.

b) Tìm tất cả n sao cho $a_n\,\vdots\,4$.

c) Tìm tất cả n sao cho $a_n\,\vdots\,14$.

Bài 84 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Toán trường THPT Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Ghi 31 số nguyên dương $a_1<a_2<\cdots<a_{31}$ lên 31 thẻ.

a) Biết rằng tổng các số trên 16 thẻ bất kỳ luôn lớn hơn tổng 15 thẻ còn lại. Chứng minh $a_1\ge 226$.

b) Biết rằng 31 thẻ này ghi các số từ 1 đến 31. Chia 31 thẻ này vào 2 hộp gọi là A và B, biết trong hộp A thì tổng hai số bất kỳ không là số chính phương. Chứng minh tồn tại 4 thẻ trong hộp B, chia ra làm 2 cặp và mỗi cặp có tổng là số chính phương.

Bài 85 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2+4xy+3x+6y=4$

Bài 86 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\text{lcm}(x,y)+2.\text{gcd}(x,y)=61$

(với $\text{lcm}(a,b)$, $\text{gcd}(a,b)$ lần lượt là ký hiệu bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a và b)

Bài 87 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

a) Tìm số nguyên tố p để $n=2^p+p^2$ là số nguyên tố

b) Chứng minh rằng với mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong 12 số nguyên dương đầu tiên, ta luôn tìm được hai số a và b trong 7 số đó sao cho $ab+1$ là số chính phương

Bài 88 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

Khi bạn Hòa hỏi số căn cước công dân của bạn Bình, bạn Bình cho biết: "Số đó dạng $\overline{06820900abcd}$ với $\overline{abcd}$ là số chính phương và $\overline{ab}-\overline{cd}=1$". Em hãy giúp bạn Hoà xác định số căn cước công dân của bạn Bình.

Bài 89 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x, y) của phương trình: $xy-x+3y=6$.

Bài 90 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025)

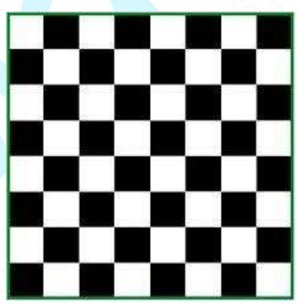
Cho tập hợp $A=\{201; 203; \ldots; 2021; 2023\}$ gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp A sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

Bài 91 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương x, y để A, B đồng thời là các số chính phương biết $A=x^2+y+1$ và $B=y^2+x+4$.

Bài 92 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025)

Cho bàn cờ vua có 64 ô vuông như hình vẽ. Trong mỗi ô vuông của bàn cờ ghi ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 10 đồng thời hai số được ghi trong hai ô vuông có chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trên bàn cờ tồn tại một số xuất hiện ít nhất 11 lần.



Bài 93 (Đề thi vào 10 – Toán chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2xy+2x+x+y=0$.

Bài 94 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa năm học 2024 – 2025)

a) Cho $p, q (p>q>5)$ là 2 số nguyên tố. Chứng minh p^8-q^4 chia hết cho 240.

b) Tìm tất cả số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa mãn $n^{2044}+4n+p^2$ chia hết cho np.

Bài 95 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa năm học 2024 – 2025)

Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_{2024}$ là đa giác đều 2024 đỉnh, trong đó đỉnh A_{2009} được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh. Đổi màu các đỉnh của đa giác theo quy tắc:

Mỗi lần chọn 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật rồi đổi màu đồng thời 4 đỉnh ấy (đỏ thành xanh và xanh thành đỏ). Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy, có thể thu được kết quả đỉnh A_{2009} và A_{997} cùng màu hay không? Vì sao?

Bài 96 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025)

Hãy xác định n số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tổng của n số đó bằng 2024.

Bài 97 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn phương trình sau $2x^2-y^2+xy+2x+2y=7$

Bài 98 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $6x^2-2y^2-xy+4x+2y=7$.

Bài 99 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là một số nguyên dương. Chứng minh $8\sqrt{12n^2+1}+8$ là một số chính phương.

Bài 100 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh từ 5 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3 .

b) Chứng minh từ 161 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 81 số mà tổng của chúng chia hết cho 81.

Bài 101 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

a) Cho số nguyên a, biết a chia cho 3 dư 2 và a chia cho 7 dư 3. Tìm số dư khi a chia cho 21.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $x^2-xy=-4x+2y+1$.

Bài 102 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Cho số nguyên $n\ge 6$. Xét một đa giác lồi n cạnh $A_1A_2\cdots A_n$. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác sao cho các đường chéo này chia đa giác thành đúng k lục giác lồi không có điểm trong chung.

a) Với $n=2022$ và $k=505$, hãy chỉ ra một cách chia đa giác đó.

b) Với $n=2023$ và $k=505$, ta có thể chia đa giác được không? Hãy giải thích.

Bài 103 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a>1, b>1, c>1$ và $abc+1$ chia hết cho $ab-b+1$.

Chứng minh b chia hết cho a.

Bài 104 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Lê Quý Đôn Đà Nẵng năm học 2024 – 2025) Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn $x^2-kxy+y^2+1=0$

Bài 105 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3+27x^2+10y=(x+3z)^3 \\ 27y^3+27y^2+10x=(y+3z)^3 \end{cases}$

Bài 106 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông kích thước (2023×2023), ô vuông có kích thước (1×1) được gọi là ô vuông đơn vị. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng được tô bằng một tròn hai màu đen hoặc trắng sao cho mỗi ô vuông đơn vị tô màu đen được kề với ít nhất ba ô vuông đơn vị tô màu trắng (hai ô vuông đơn vị có cạnh chung được gọi là kề nhau). Hỏi số ô vuông đơn vị được tô màu đen nhiều nhất là bao nhiêu?

Bài 107 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm số thực x thỏa mãn $x+\sqrt{2024}$ và $\dfrac{185}{x}-\sqrt{2024}$ đều là số nguyên

Bài 108 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho 45 số $a_1;a_2;\ldots;a_{45}$ sao cho mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị 0, 2, 3. Biết

$(a_1-2)^2+(a_2-2)^2+\ldots+(a_{45}-2)^2=65$; $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+\ldots+(a_{45}-3)^3=-280$. Trong 45 số trên, có bao nhiêu số nhận giá trị 0?

Bài 109 (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán (hệ chuyên Nga – Pháp – Trung) – tỉnh Hoà Bình năm học 2024 – 2025)

Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2+5y^2=12y-2xy+1$

Bài 110 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – Trường THPT Chuyên Lam Sơn năm học 2024 – 2025)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+2y^2-5xy+2x-y-3=0$.

Bài 111 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình

$x^3-(m-1)x^2-2x+2m-9=0$ có nghiệm nguyên.

Bài 112 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+2y)(x-y)+5x+4y=-1$.

Bài 113 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả nghiệm nguyên (x, y) của phương trình $x^2-4xy+5y^2=2(x-y+1)$

Bài 114 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2xy+2x+x+y=0$.

Bài 115 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình sau $2x^2-y^2+xy+2x+2y=7$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – trường THPT chuyên Hạ Long năm học 2024 – 2025):

a) Cho $a,\ b,\ c$ là ba số nguyên khác 0 thỏa mãn $\dfrac{2025}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$. Chứng minh: abc chia hết cho 4.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p,\ q)$ sao cho $p^2-3pq+4q^2$ là một số chính phương.

Lời giải:

a) $\dfrac{2025}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\Rightarrow 2025bc=a(b+c)$

Nếu b và c cùng lẻ $\Rightarrow$ Vế trái lẻ, vế trái chẵn (vô lý)

Nếu b và c cùng chẵn $\Rightarrow abc$ chia hết cho 4

Nếu b và c khác tính chẵn lẻ $\Rightarrow bc$ chẵn $\Rightarrow$Vế trái chẵn$\Rightarrow$ $a(b+c)$ chẵn mà $b+c$ lẻ $\Rightarrow$ a chẵn

$\Rightarrow$ abc chia hết cho 4.

Ta được điều phải chứng minh

b) $p^2-3pq+4q^2=(p^2+q^2)-3(pq-q^2)$

Nếu cả p và q đều không chia hết cho 3 $\Rightarrow p^2\equiv 1(\text{mod } 3)$, $q^2\equiv 1(\text{mod } 3)$

$\Rightarrow$ $p^2-3pq+4q^2=(p^2+q^2)-3(pq-q^2)\equiv 2(\text{mod}\,3)$, vô lý vì $p^2-3pq+4q^2$ chính phương.

Vậy trong hai số $p,\ q$ có 1 số chia hết cho 3, mà $p,\ q$ nguyên tố nên $p=3$ hoặc $q=3$.

Với $p=3\Rightarrow r^2=4q^2-9q+9$ $(r\in\mathbb{N})$

$(2q-3)^2<r^2<(2q-1)^2\Rightarrow 4q^2-9q+9=(2q-2)^2\Rightarrow q=5$ (thỏa mãn)

Với $q=3\Rightarrow r^2=p^2-9p+36>p^2-10p+25=(p-5)^2$ (do $p>0$)

Với $p=2$, ta có $r^2=2^2-9.2+36=22$ (không thỏa mãn).

Với $p=3$, ta có $r^2=3^2-9.3+36=18$ (không thỏa mãn).

Với $p=5$, ta có $r^2=5^2-9.5+36=16$ (thỏa mãn).

Với $p=7$, ta có $r^2=7^2-9.7+36=22$ (không thỏa mãn).

Với p là số nguyên tố lớn hơn 7, ta có: $r^2=p^2-9p+36<p^2-6p+9=(p-3)^2$,

nên $(p-5)^2 < r^2 < (p-3)^2$. Do đó $r^2 = (p-4)^2$

Với $r^2 = (p-4)^2 \Rightarrow p^2 - 9p + 36 = p^2 - 8p + 16 \Rightarrow p = 20$ (không thỏa mãn).

Vậy $(p;q) = \{(3;5);(5;3)\}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 2 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – trường THPT chuyên Hạ Long năm học 2024 – 2025):

Viết các số tự nhiên liên tiếp từ 1 đến 1975 lên bảng. Ta chọn hai số bất kì a,b trên bảng và xóa chúng đi, sau đó viết thêm số $|a-b|$ lên bảng. Thực hiện liên tiếp như vậy đến khi trên bảng chỉ còn một số, ta gọi số đó là c.

a) Số c có thể là 1945 hay không? Giải thích tại sao?

b) Số c có thể là 1954 hay không? Giải thích tại sao?

Lời giải:

a) Từ 1 đến 1975 có $(1975-1):2+1=988$ (số lẻ)

Xét các khả năng có thể xảy ra:

Nếu a và b cùng lẻ, sau phép biến đổi ta xóa đi hai số lẻ và thêm vào bảng một số chẵn

$\Rightarrow$ số các số lẻ giảm đi 2

Nếu a và b cùng chẵn, sau phép biến đổi, ta xóa đi hai số chẵn và thêm vào bảng một số chẵn

$\Rightarrow$ số các số lẻ giữ nguyên

Nếu a và b khác tính chẵn lẻ, sau phép biến đổi ta xóa đi một số chẵn, một số lẻ và thêm vào một số lẻ $\Rightarrow$ số số lẻ giữ nguyên

Vậy sau mỗi lần biến đổi, số số lẻ còn lại luôn chia hết cho 2 nên số cuối cùng còn lại trên bảng không thể là số lẻ. Vậy số cuối cùng trên bảng không thể là 1945.

b) Ta thực hiện các phép biến đổi đối với các cặp số sau: $(1;2);(3;4);...;(1951;1952)$; $(1953;1955);(1956;1957)$;....$(1972;1973);(1974;1975)$. Như vậy sau 987 phép biến đổi trên bảng còn 986 số 1, 1 số 2 và số 1954. Tiếp tục biến đổi cặp $(1;2)$ thì trên bảng còn 986 số 1 và số 1954.

Các phép biến đổi tiếp theo với các cặp số (1;1) thì sau 493 phép biến đổi trên bảng còn số 1954

và toàn số 0, tiếp tục thực hiện các phép biến đổi với cặp số bất kì thì số số 0 giảm dần và cuối cùng trên bảng còn số 1954.

Vậy c có thể là 1954.

Bài 3 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thành phố Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho một hình vuông cạnh 8 cm có chứa bên trong 2024 điểm phân biệt. Chứng minh rằng có thể vẽ được một đường tròn bán kính 1,5 cm có chứa bên trong ít nhất 127 điểm trên.

Lời giải:

Chia hình vuông cạnh $8cm$ thành các hình vuông nhỏ cạnh $2cm$ (như hình vẽ).

1	*2*	*3*	*4*
2			
3			
4			

Theo nguyên lý Dirichlet sẽ có ít nhất một hình vuông chứa $\left[\frac{2024}{16}\right]+1=127$ (điểm)

Hình vuông này nội tiếp trong đường tròn có đường kính $\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}\,(cm)$.

Như vậy tồn tại đường tròn có bán kính $\sqrt{2}\,(cm)$ chứa 127 điểm trên.

Vì $\sqrt{2}<1,5$ nên đường tròn bán kính $1,5cm$ (có tâm là tâm đường tròn trên) chứa tất cả 127 điểm trên. Ta được điều phải chứng minh

Bài 4 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thành phố Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cặp số nguyên dương $(a;b)$ được gọi là cặp số "*may mắn*" của số n nếu $a+b=n$ và tồn tại số nguyên tố p thỏa mãn đẳng thức $\frac{4}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1}{p}$. Tìm các cặp số "*may mắn*" của số 2025.

Lời giải:

Gọi $(a;b)$ là cặp số *"may mắn"* của số $n=2025=a+b$.

Ta có: $\frac{4}{a}+\frac{4}{b}=\frac{1}{p}\Rightarrow 4ap+4bp=ab$

Xét $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=2025^2-16p(a+b)=2025^2-16p.2025=45^2.(2025-16p)$

$\Rightarrow 2025-16p=k^2\ (k\in\mathbb{Z})\Rightarrow (45+k)(45-k)=16p\ (*)$

- Xét $p=2\ (*)\Rightarrow\begin{cases}45+k=2^m\\45-k=2^n\end{cases}(m>n;m+n=5)$

Dễ thấy $n=\{0;1\}$ vô lí $\Rightarrow n>1\Rightarrow 45=2^{n-1}.(2^{m-n}+1)$ (vô lí)

- Xét $p\geq 3: 16p=2.8p=4.4p=8.2p$; Giả sử $45+k\geq 45-k$ (ngược lại chứng minh tương tự).

TH 1: $\begin{cases}45+k=8\\45-k=2p\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-37\\p=41\end{cases}\Rightarrow (a-b)^2=45^2.(2025-16.41)\Rightarrow a-b=1665$

Kết hợp $a+b=2025\Rightarrow\begin{cases}a=1845\\b=180\end{cases}$. Thử lại: $\frac{4}{1845}+\frac{4}{180}=\frac{1}{41}$ (thỏa mãn)

TH 2: $\begin{cases}45+k=4p\\45-k=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=41\\p\notin\mathbb{N}\end{cases}$ (loại)

TH 3: $\begin{cases}45+k=8p\\45-k=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=43\\p=11\end{cases}\Rightarrow (a-b)^2=45^2.(2025-16.11)\Rightarrow a-b=1935$

Kết hợp $a+b=2025\Rightarrow\begin{cases}a=1980\\b=45\end{cases}$. Thử lại: $\frac{4}{1980}+\frac{4}{45}=\frac{1}{11}$ (thỏa mãn)

Kết luận: Có 04 (02 cặp và hoán vị) cặp số "*may mắn*" thỏa mãn yêu cầu bài toán:

$(1845;180)$; $(1980;45)$; $(180;1845)$; $(45;1980)$

Bài 5 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương x sao cho x^2+x+10 là số chính phương.

Lời giải:

Ta có: $4\left(x^2+x+10\right)=4x^2+4x+40=\left(2x+1\right)^2+39$ là số chính phương.

Đặt $\left(2x+1\right)^2+39=a^2$, với $a\in\mathbb{N}\Rightarrow a^2-\left(2x+1\right)^2=39\Rightarrow\left(a-2x-1\right)\left(a+2x+1\right)=39=13.3=39.1$.

Vì x nguyên dương nên $a-2x-1<a+2x+1$

Ta có bảng:

$a+2x+1$	39	13
$a-2x-1$	1	3
x	9	2
a	20	8

Vậy $x=2$, $x=9$ thỏa mãn.

Bài 6 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 – 2025)

Tìm ba số nguyên dương $x;\, y;\, z$ đôi một khác nhau thỏa mãn hai điều kiện:

- $x^2+xy+y^2+\left(3z^2-z-4\right)\left(x+y\right)=10z^2-3$.
- Trong bốn số $x+y+3z^2-1$; $x+y-3; x+z$; $y+z$ có đúng một hợp số.

Lời giải:

Ta có: $x^2+xy+y^2+\left(3z^2-z-4\right)\left(x+y\right)=10z^2-3\Rightarrow\left(x+y+3z^2-1\right)\left(x+y-3\right)=\left(x+z\right)\left(y+z\right)$

Giả sử $x+y+3z^2-1$ không là hợp số, mà $x+y+3z^2-1>1$ nên $x+y+3z^2-1$ là số nguyên tố.

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+z\,\vdots\left(x+y+3z^2-1\right)\\ y+z\,\vdots\left(x+y+3z^2-1\right)\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+z\ge x+y+3z^2-1\\ y+z\ge x+y+3z^2-1\end{array}\right.\text{ (vô lý).}$$

Vậy $x+y+3z^2-1$ là hợp số duy nhất trong bốn số đã cho.

$\Rightarrow x+z=p$ nguyên tố; $y+z=q$ nguyên tố; $x+y+3z^2-1=p.q$; $x+y-3=1$

Vì $x+y=4$ và x,y nguyên dương nên $\left(x;y\right)=\left(1;3\right)$ hoặc $\left(x;y\right)=\left(3;1\right)$.

Trường hợp nào ta cũng thu được $13+4\left(3z^2-z-4\right)=10z^2-3 \Rightarrow 2z^2-4z=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z=2 \\ z=0 \end{array}\right.$

Vì $x;\, y;\, z$ nguyên dương nên $z=0$ không thỏa mãn.

Thử lại chỉ có hai bộ $(x;y;z)=(1;3;2)$, thỏa mãn.

Bài 7 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n, số $n^5-6n+33$ không là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương $a,\, b$ thỏa mãn điều kiện $a+b+1$ là ước nguyên tố của $4\left(a^2+ab+b^2\right)-3$. Chứng minh rằng $a+b-1$ là ước của $4\left(a^2+ab+b^2\right)-3$.

Lời giải:

a) Có $n^5-6n+33=\left(n^5-n\right)-5n+33$.

Theo định lí Fermat có $n^5 \equiv n \pmod 5$ nên $\left(n^5-n\right) \equiv 0 \pmod 5$

Do $5n \equiv 0$, $33 \equiv 3 \pmod 5$ nên suy ra $n^5-6n+33 \equiv 3 \pmod 5$ (*).

Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể cho số dư thuộc $\{0;1;4\}$. Vậy từ (*) suy ra $n^5-6n+33$ không thể là số chính phương.

b) Theo giả thiết có $0 \equiv 4a^2+4ab+4b^2-3 \equiv 4a^2+4a(-a-1)+4(-a-1)^2-3 \pmod{a+b+1}$

hay $(2a+1)^2 \equiv 0 \pmod{a+b+1}$.

Từ $a+b+1$ là số nguyên tố suy ra $(2a+1) \vdots (a+b+1)$.

Ta có $0<2a+1<2(a+b+1)$ nên xảy ra $a+b+1=2a+1 \Rightarrow a=b$.

Khi đó có $\begin{cases} a+b-1=2a-1 \\ 4\left(a^2+ab+b^2\right)-3=12a^2-3=3(2a+1)(2a-1) \end{cases}$, suy ra $\left(4\left(a^2+ab+b^2\right)-3\right) \vdots (a+b-1)$

Bài 8 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành $2n$ ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương n để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.

Lời giải:

Xét n là số lẻ:

Ta tô màu các ô vuông đơn vị theo kiểu xen kẽ như bàn cờ vua bởi hai màu đen, trắng. Gọi B, W lần lượt là số bi nằm ở ô đơn vị màu đen, số bi nằm ở ô đơn vị màu trắng.

- Lúc đầu: $B = n$ và $W = n$. Như vậy B, W là các số lẻ.

Chỉ ra được bất biến: Sau mỗi lần thực biến đổi (T) thì tính chẵn lẻ của B, W là không thay đổi.

- Suy ra lúc nào cũng có bi nằm ở ô đen và lúc nào cũng có bi nằm ở ô trắng (vì B, W luôn là số lẻ), vậy không thể dồn hết tất cả các viên bi về một ô vuông đơn vị.

+ Xét n là số chẵn: Ta chỉ ra cách dồn được bi theo yêu cầu.

- Đầu tiên ta chọn hai ô vuông phân biệt mà mỗi ô vuông tương ứng đều nằm ở cuối cùng của mỗi dòng và phải có bi, thực hiện biến đổi (T) để dồn hết bi từ hai ô này về hai ô đứng liền trước chúng. Lại thực hiện tiếp biến đổi (T) với hai ô đơn vị có bi mà mỗi ô nằm ở đầu ngoài cùng của mỗi dòng để dồn hết bi của hai ô này về hai ô đứng liền sau chúng. Tiếp tục với hai cách chọn ô như vậy (chọn cặp ô có bi ở cuối dòng rồi lại chọn cặp ô có bi ở đầu dòng) ta đi đến trạng thái bi chỉ còn nằm ở bảng con 2×2 ở chính giữa của bảng ban đầu như hình 1 (các chữ cái ghi trong ngoặc là để chỉ tên của ô, các số chỉ số lượng bi đang có ở ô tương ứng đó).

$\frac{n}{2}$ (A)	$\frac{n}{2}$ (B)
$\frac{n}{2}$ (C)	$\frac{n}{2}$ (D)

(Hình 1)

- Tiếp theo chọn cặp ô B, C và thực hiện $\frac{n}{2}$ lần biến đổi (T) (bi từ ô B đưa sang ô A, bi từ ô C đưa sang ô D) thì thu được trạng thái như hình 2.
- Tiếp tục, ta liên tục chọn cặp ô A, D cho đến khi hết bi và chuyển bi ở hai ô này sang ô C thì sau cùng đưa được $2n$ viên bi về hết ô C.
- Vậy tập hợp tất cả các số n cần tìm là tập các số nguyên dương chẵn.

n (A)	0 (B)
0 (C)	n (D)

(Hình 2)

Bài 9 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Bình năm học 2024 – 2025)

Cho $a,\ b$ là các số nguyên thỏa mãn $(a^2+3ab)^5+(b^2-ab)^5=2^{2026}+1$.

Chứng minh $a+b$ chia hết cho 5.

Lời giải:

Ta có $2^{2026}+1=2^{2.1013}+1=4^{1013}+1=5.M\,\vdots\,5$ (*)

Đặt $x=a^2+3ab; y=b^2-ab$ (vì $a,b\in\mathbb{Z}\Rightarrow x,y\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow x+y=(a+b)^2$ và $x^5+y^5=2^{2026}+1$ (**)

Từ (*) và(**) suy ra $\left(x^5+y^5\right)\vdots\,5$ (1)

Xét hiệu : $\left(x^5+y^5\right)-(x+y)=\left(x^5-x\right)+\left(y^5-y\right)$

Ta có $x^5-x=(x-2)(x-1)x(x+1)(x+2)+5x\left(x^2-1\right)$

Suy ra $\left(x^5-x\right)\vdots\,5$. Tương tự $\left(y^5-y\right)\vdots\,5$

Do đó $\left[\left(x^5+y^5\right)-(x+y)\right]\vdots\,5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $(x+y)\,\vdots\,5\Rightarrow(a+b)^2\,\vdots\,5$

Mà 5 là số nguyên tố do đó $(a+b)\,\vdots\,5$

Vậy $a+b$ chia hết cho 5.

Bài 10 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên dương $x,\ y$ thỏa mãn $\left(x^2-x-1\right)\left(y^2+xy-9\right)=2x+1$.

b) Cho số nguyên tố lẻ p và số nguyên dương a thỏa mãn: a^p-1 chia hết cho p^3.

Chứng minh rằng $a-1$ chia hết cho p^2.

Lời giải:

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x^2-x-1)(y^2+xy-9)=2x+1$.

Cách 1: Vì $(x^2-x-1)(y^2+xy-9)=2x+1$ nên $(2x+1)\,\vdots\,(x^2-x-1) \Rightarrow (2x+1)(2x-3)\,\vdots\,(x^2-x-1)$

$\Rightarrow (4x^2-4x-3)\,\vdots\,(x^2-x-1) \Rightarrow \left[4(x^2-x-1)+1\right]\vdots\,(x^2-x-1) \Rightarrow 1\,\vdots\,(x^2-x-1)$

$\Rightarrow (x^2-x-1) \in \{-1;1\} \Rightarrow x \in \{-1;0;1;2\}$

Mà x nguyên dương nên $x \in \{1;2\}$.

Với $x=1$ thì $-(y^2+y-9)=3$ nên $y^2+y-6=0$, ta được $y=2$ (thỏa mãn) và $y=-3$ (loại).

Với $x=2 \Rightarrow y^2+2y-14=0 \Rightarrow y=-1\pm\sqrt{15}$ (loại do y nguyên dương).

Thử lại $(x;y)=(1;2)$ thoả mãn phương trình đã cho.

Cách 2: Vì $(x^2-x-1)(y^2+xy-9)=2x+1$ nên $(2x+1)\,\vdots\,(x^2-x-1)$

Do $2x+1>0$ nên $2x+1 \geq x^2-x-1 \Rightarrow x^2-3x-2 \leq 0$.

Nếu $x \geq 4$ thì $x^2-3x \geq 4.1=4$. (Loại). Suy ra $x \in \{1;2;3\}$

Nếu $x=1$ thì $-(y^2+y-9)=3$ nên $y^2+y-6=0$, ta được $y=2$ (thỏa mãn) hoặc $y=-3$ (loại).

Nếu $x=2$ thì $y^2+2y-14=0$ nên $y=-1\pm\sqrt{15}$ (loại do y nguyên dương).

Nếu $x=3$ thì $5(y^2+3y-9)=7$. Mâu thuẫn do 7 không chia hết cho 5

Vậy các số nguyên dương thỏa mãn đề bài là $(x;y)=(1;2)$.

b) Ta có $a^p \equiv 1 \pmod{p}$ do $a^p \equiv 1 \pmod{p^3}$

Theo định lý Fermat nhỏ thì $a^p \equiv a \pmod{p}$. Từ đó thì $a \equiv 1 \pmod{p}$

Đặt $a=1+kp$ với k nguyên dương.

Ta có $a^p-1=(a-1).S$ với $S=a^{p-1}+a^{p-2}+\cdots+a+1$ $=(a^{p-1}-1)+(a^{p-2}-1)+\cdots+(a-1)+p$

$=(a-1)\left[(a^{p-2}+a^{p-3}+a^{p-4}+\cdots+a+1)+(a^{p-3}+a^{p-4}+\cdots+a+1)+(a^{p-4}+a^{p-5}+\cdots+a+1)+\right.$

$\left.+\cdots+(a+1)+1\right]+p$

Vậy $S=(a-1)\cdot Q+p$ với $Q=a^{p-2}+2a^{p-3}+3a^{p-4}+\cdots+(p-2)a+(p-1)$

Mặt khác $a \equiv 1 \pmod{p}$ nên $Q \equiv 1+2+3+\cdots+(p-1) = \dfrac{(p-1)p}{2} \equiv 0 \pmod{p}$

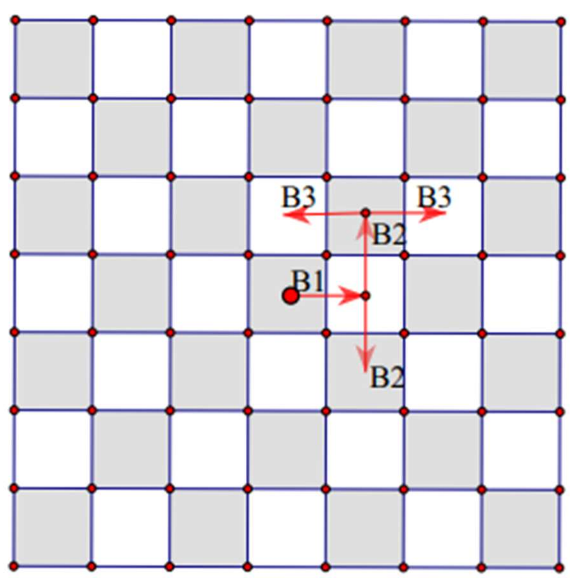
Tức là $S \equiv p\left(\bmod p^2\right)$, tức là $S = p + mp^2$ suy ra $a^p - 1 = kp\left(p+mp^2\right) = kp^2 + kmp^3$

Giả sử k không chia hết cho p thì $a^p - 1$ không chia hết cho p^3 (mâu thuẫn giả thiết)

Điều giả sử là sai, suy ra k chia hết cho p hay $a-1$ chia hết cho p^2 (Điều phải chứng minh).

Bài 11 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

Cho bảng vuông 7×7 gồm 49 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ, theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở chung một ô vuông.



Lời giải:

Giả sử tồn tại một cách xếp mà với mọi thời điểm thì không tồn tại 2 con robot đứng cùng 1 ô.

Ta điền cách số $1,2,3,4$ cho bảng 7×7 như sau:

1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1

- **Nhận xét 1**. Sau mỗi bước di chuyển thì đó là ô con robot đứng lúc sau khác tính chẵn lẻ với số ở ô con robot đứng lúc trước.

Chứng minh. Do các ô chung cạnh với các ô số lẻ (1,3) đều là các ô số chẵn (2,4) và ngược lại, nếu sau mỗi bước số ở ô con robot đứng sau thay đổi tính chẵn lẻ.

- **Nhận xét 2.** Sau 2 bước di chuyển thì số ở ô con robot đứng lúc sau sẽ bằng 2 cộng với số ở con robot đứng lúc trước theo mod 4 .

Chứng minh. Xét hình vuông 3×3 mà có 1 con robot làm tâm, sau 2 bước di chuyển thì con robot đó chỉ có thể di chuyển đến các ô ở góc của hình vuông 3×3. Ta thấy các số ở các ô góc đó không bằng với số ở tâm. Theo Nhận xét 1 thì sau 2 bước số ở ô sau và trước cùng tính chẵn lẻ, từ đó ta có Nhận xét 2.

- **Nhận xét 3**. Sau lượt đầu tiên (lượt đầu tiên này các con robot đi không có quy luật) có không quá 9 con robot cùng đứng ở các ô số 1 .

Chứng minh. Giả sử sau lượt đầu có lớn hơn hoặc bằng 10 con robot cùng đứng ở các ô có được điền số 1. Xét 2 lượt tiếp theo và sử dụng Nhận xét 2 thì lớn hơn bằng 10 con robot đó sẽ cùng đi vào các ô số 3. Để ý rằng trên bảng 7×7 ta chỉ có đúng 9 ô được điền số 3 nên theo nguyên lí Dirichlet thì tồn tại một ô số 3 mà có 2 con robot, mâu thuẫn với giả sử ban đầu. Nên giả sử ở trên là sai, suy ra Nhận xét 3

- **Nhận xét 4.** Sau lượt đầu tiên có không quá 18 con robot đứng ở vị trí các ô số lẻ.

Chứng minh: Áp dụng Nhận xét 3 thì chỉ có nhỏ hơn hoặc bằng 9 robot đứng ở vị trí được điền số 1 , để ý thêm rằng chỉ có tất cả 9 ô được điền số 2 nên khi kết hợp lại ta thấy có không quá 18 con robot đứng ở vị trí các ô số lẻ.

- **Nhận xét 5.** Sau lượt đầu tiên có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot đứng ở vị trí các ô số chẵn.

Chứng minh: Áp dụng Nhận xét 4 và chỉ có 37 con robot nên có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot đứng ở vị trí các ô số chẵn.

Quay trở lại bài toán

Sau lượt đầu tiên, kết hợp Nhận xét 5 và Nhận xét 1 thì ngay ở lượt thứ 2, có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot ở vị trí các ô số lẻ. Tuy nhiên điều này lại mâu thuẫn với Nhận xét 4 nên suy ra giả sử ở đầu lời giải là sai. Từ đó rút ra kết luận rằng với mọi cách xếp thì tồn tại một thời điểm.

Bài 12 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

Cho $P(x)$ và $Q(x)$ là hai đa thức với các hệ số nguyên thỏa mãn đa thức $x.P(x^4)+Q(x^2)$ chia hết cho đa thức x^2+2. Chứng minh $5.P(2028)+6.Q(2022)$ chia hết cho 2024.

Lời giải:

Xét đa thức $R(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ với a_0, a_1, ..., $a_n\in\mathbb{Z}$.

Ta có $R(A)-R(B)=\left[a_n\left(A^n-B^n\right)+a_{n-1}\left(A^{n-1}-B^{n-1}\right)+\ldots+a_1(A-B)\right]\vdots(A-B)$

vì $\left(A^n-B^n\right)\vdots(A-B),\forall n\in\mathbb{N}$

Do đó : $\left[P(x^4)-P(4)\right]\vdots(x^4-4)\Rightarrow\left[P(x^4)-P(4)\right]\vdots(x^2+2)$ vì $(x^4-4)=(x^2+2).(x^2-2)$

và $\left[Q\left(x^2\right)-Q(-2)\right] \vdots \left(x^2+2\right)$

Mặt khác, ta có: $x.P\left(x^4\right)+Q\left(x^2\right)=x.\left[P\left(x^4\right)-P(4)\right]+\left[Q\left(x^2\right)-Q(-2)\right]+P(4).x+Q(-2)$

Ta có: $P\left(x^4\right)-P(4)$, $Q\left(x^2\right)-Q(-2)$ và $x.P\left(x^4\right)+Q\left(x^2\right)$ chia hết cho đa thức x^2+2

nên $\begin{cases} P(4)=0 \\ Q(-2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(x) \vdots (x-4) \\ Q(x) \vdots (x+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P(2028) \vdots 2024 \\ Q(2022) \vdots 2024 \end{cases} \Rightarrow 5.P(2028)+6.Q(2022)$ chia hết cho 2024.

Bài 13 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn $x^2+xy-x-3y=7$.

b) Với mỗi số thực a, gọi $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $\left[\dfrac{n^4-4n^3+5n^2-1}{4n^2}\right]$ là một số nguyên tố.

c) Nhân kỷ niệm 60 năm ngày thành lập, trường trung học phổ thông X đã chọn ra 300 học sinh tham gia cuộc diễu hành. Mỗi em tham gia diễu hành được gắn một số nguyên dương phân biệt từ 1 đến 300. Ban tổ chức xếp ngẫu nhiên 300 em học sinh đó thành bốn khối đội hình. Chứng minh rằng luôn có ba em học sinh thuộc cùng một khối đội hình mà ba số x, y, z được gắn trên các em học sinh đó thỏa mãn x chia hết cho y và y chia hết cho z.

Lời giải:

a) Ta có $x^2+xy-x-3y=7 \Rightarrow (x-3)(x+y+2)=1$ (*)

Do x, y nguyên nên từ (*) ta có $\begin{cases} x-3=1 \\ x+y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Hoặc $\begin{cases} x-3=-1 \\ x+y+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên là $(x;y)=(4;-5)$ và $(x;y)=(2;-5)$.

b) Ta có: $A=\dfrac{n^4-4n^3+5n^2-1}{4n^2}=\dfrac{n^2}{4}-n+\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{4n^2}$.

*** Trường hợp 1:** Xét $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$. Ta có $A=(k-1)^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16k^2}$.

Vì $0<\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{16k^2}<1,\forall k\in\mathbb{N}^*$, nên $[A]=(k-1)^2$ không phải là số nguyên tố (loại).

*** Trường hợp 2:** Xét $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$. Ta có $A=k^2-k+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4(2k+1)^2}=k(k-1)+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4(2k+1)^2}$

Vì $0<\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4(2k+1)^2}<1,\forall k\in\mathbb{N}$, nên $[A]=k(k-1)$

Nên để $[A]$ là số nguyên tố $\Rightarrow k(k-1)=2.1\Rightarrow k=2\Rightarrow n=5$ (thỏa mãn).

Vậy $n=5$ thỏa mãn yêu cầu đề.

c) Gọi $\Omega=\{1;2;3;4;...;300\}$ và $A=\{2^0;2^1;2^2;...;2^8\}\subset\Omega$ (Tập A có 9 phần tử)

Ta có 9 chia 4 được 2 dư 1 nên theo nguyên lý Dirichlet khi chia Ω thành 4 tập con, tồn tại ít nhất một tập con chứa ít nhất 3 phần tử của tập A.

Gọi ba phần tử đó là $x=2^a$, $y=2^b$, $z=2^c$ với $a>b>c$

Khi đó ta thấy ba số thỏa mãn điều kiện $2^a\,\vdots\,2^b$ và $2^b\,\vdots\,2^c$

Từ đó suy ra $x\,\vdots\,y$ và $y\,\vdots\,z$ (Điều phải chứng minh).

Bài 14 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lai Châu năm học 2024 – 2025)

a) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $(x+1)(y+1)=6$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $(2n+1)^3+1$ chia hết cho 2^{2024}.

Lời giải:

a) Ta có: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1=2\\y+1=3\end{cases}\\\begin{cases}x+1=3\\y+1=2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}\\\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}\end{array}\right.$. Vậy $(x,y)=\{(1;2);(2;1)\}$

b) Ta có: $(2n+1)^3+1 \vdots 2^{2024} \Rightarrow (2n+2)\left(4n^2+2n+1\right) \vdots 2^{2024} \Rightarrow 2(n+1)\left(4n^2+2n+1\right) \vdots 2^{2024}$

$\Rightarrow (n+1)\left(4n^2+2n+1\right) \vdots 2^{2023} \Rightarrow n+1 \vdots 2^{2023} \quad \left(\text{do } 4n^2+2n+1 \equiv 1(\bmod 2)\right) \Rightarrow n=2^{2023}k-1\left(k \in \mathbb{Z}^+\right)$

Bài 15 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lai Châu năm học 2024 – 2025)

Anh Nam là một vận động viên chơi cờ. Để luyện tập, mỗi ngày anh chơi ít nhất một ván. Để khỏi mệt, mỗi tuần anh chơi không quá 12 ván. Chứng minh rằng tồn tại một số ngày liên tiếp trong đó anh chơi đúng 20 ván.

Lời giải:

Gọi số ván cờ mà anh Nam chơi ngày thứ nhất, thứ hai, thứ ba,..., thứ hai mươi trong ba tuần liên tiếp là: $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{20}$.

Xét 20 tổng : $s_1 = a_1; s_2 = a_1 + a_2; s_3 = a_1 + a_2 + a_3; \ldots; s_{20} = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$

Ta có: $1 \le s_1 < s_2 < s_3 < \ldots < s_{20} \le 35$

Dễ thấy tồn tại $s_k \vdots 20$ hoặc $(s_m - s_n) \vdots 20$ với $1 \le m, n, k \le 20$

Suy ra $s_k = 20$ hoặc $s_m - s_n = 20$ với $m > n$. Từ đây ta thu được điều cần chứng minh.

Bài 16 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – thành phố Hải Phòng năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên dương x và y sao cho $2^x + 3^y$ là số chính phương.

b) Trong một hội nghị, các đại biểu đến từ n quốc gia, ngồi quanh một bàn tròn. Biết rằng với hai đại biểu cùng quốc gia bất kỳ thì người ngồi cạnh bên phải của họ luôn không cùng quốc gia. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu đại biểu?

Lời giải:

a) Giả sử $2^x + 3^y = z^2$ với $z \in \mathbb{Z}^+$.

Xét theo $\bmod 3$ cả hai vế ta được $(-1)^x \equiv 0; 1 \pmod 3$, suy ra x chẵn.

Đặt $x = 2m,\ m \in \mathbb{Z}^+$, ta có phương trình $4^m + 3^y = z^2 \Rightarrow 3^y = \left(z + 2^m\right)\left(z - 2^m\right)$.

Do đó tồn tại $a, b \in \mathbb{N}$ sao cho $z + 2^m = 3^a$, $z - 2^m = 3^b$ và $a > b,\ a + b = y$.

Suy ra $2^{m+1} = 3^a - 3^b = 3^b\left(3^{a-b} - 1\right)$. Do $2^{m+1} \not\vdots\, 3$ nên ta phải có $b = 0,\ a = y$.

Như vậy $2^{m+1} = 3^y - 1$. Từ đó $3^y - 1 \vdots 4$ nên y chẵn.

Đặt $y = 2n,\ n \in \mathbb{Z}^+$. Ta có $2^{m+1} = 3^{2n} - 1 = \left(3^n + 1\right)\left(3^n - 1\right)$.

Vì ƯCLN$\left(3^n + 1;\ 3^n - 1\right) = 2$ nên ta phải có $3^n - 1 = 2,\ 3^n + 1 = 2^m$.

Vậy $n = 1,\ m = 2$, suy ra $x = 4,\ y = 2$.

b) Ta chứng minh có nhiều nhất n^2 đại biểu.

Nếu có ít nhất $n^2 + 1$ đại biểu, thì có quốc gia có ít nhất $n + 1$ đại biểu.

$n + 1$ đại biểu này có $n + 1$ người ngồi cạnh bên phải, và do chỉ có n quốc gia nên chắc chắn có hai người cùng quốc gia, điều này mâu thuẫn.

Tiếp theo ta chỉ ra cách sắp xếp thỏa mãn với n^2 đại biểu bằng quy nạp.

Ta ký hiệu tất cả các đại biểu cùng quốc gia thứ i đều bằng số i.

Với $n = 2$ ta sắp xếp theo dạng $(1,1,2,2)$.

Giả sử ta đã sắp xếp xong cho k quốc gia theo dạng $\left(a_1, a_2, \ldots, a_{k^2}\right)$, trong đó mỗi cặp cạnh nhau dạng (i, j) với $1 \le i, j \le k$ đều xuất hiện đúng một lần.

Với $k + 1$ quốc gia, ta sắp xếp thỏa mãn bằng cách:

- Thay cặp (i,i) thành $(i, k+1, i, i)$ với mọi $i = \overline{1, k-1}$.

- Thay cặp (k,k) thành $(k, k+1, k+1, k, k)$.

Kết luận: có nhiều nhất n^2 đại biểu.

Cách 2: Một cách sắp xếp khác thỏa mãn với n^2 đại biểu là

$(1,1,2,1,3,\ldots,1,n,2,2,3,2,4,\ldots,2,n,3,3,4,3,5\ldots,3,n,\ldots,n-1,n-1,n,n)$.

Bài 17 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 2xy + 3y - x - 1 = 0$.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(a;b)$ sao cho $\dfrac{a^3b - 1}{a + 1}$ và $\dfrac{b^3a + 1}{b - 1}$ đều là các số nguyên.

Lời giải:

a) Phương trình trở thành $x^2-(1+2y)x+3y-1=0$

Xét $\Delta_x=(1+2y)^2-4(3y-1)=4y^2-8y+5$.

Để x,y là các số nguyên thì Δ_x phải là số chính phương

Đặt $\Delta_x=4y^2-8y+5=m^2$ $(m\in\mathbb{N})$ $\Rightarrow(2y-2)^2-m^2=-1\Rightarrow(2y-2+m)(2y-2-m)=-1$

Suy ra $\begin{cases}2y-2+m=1\\2y-2-m=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\m=1\end{cases}$

Với $y=1$, thay vào phương trình đã cho ta được: $x^2-3x+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2.\end{array}\right.$

Vậy các bộ số $(x;y)$ thỏa mãn là $(1;1)$, $(2;1)$.

b) Ta có $\dfrac{a^3b-1}{a+1}=\dfrac{b\left(a^3+1\right)-(b+1)}{a+1}=\dfrac{b(a+1)\left(a^2-a+1\right)-(b+1)}{a+1}=b(a^2-a+1)-\dfrac{b+1}{a+1}$

Vì $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ là số nguyên nên $(b+1)\,\vdots\,(a+1)$ (1)

Ta có $\dfrac{b^3a+1}{b-1}=\dfrac{a\left(b^3-1\right)+(a+1)}{b-1}=\dfrac{a(b-1)\left(b^2+b+1\right)+(a+1)}{b-1}=a(b^2+b+1)+\dfrac{a+1}{b-1}$

Vì $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ là số nguyên nên $(a+1)\,\vdots\,(b-1)$ (2)

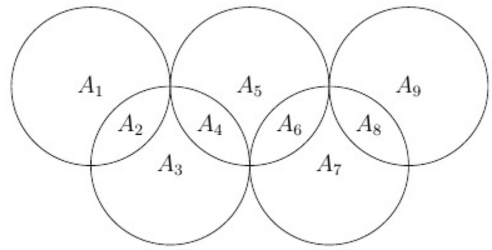
Từ (1) và (2) suy ra $(b+1)\,\vdots\,(b-1)\Rightarrow 2\,\vdots\,(b-1)$ $\Rightarrow b\in\{2;3\}$.

- Với $b=2$, thay vào (1) ta được $3\,\vdots\,(a+1)\Rightarrow a=2$.
- Với $b=3$, thay vào (1) ta được $4\,\vdots\,(a+1)\Rightarrow a\in\{1;3\}$.

Vậy các cặp số $(a;b)$ thỏa mãn điều kiện là $(2;2)$, $(1;3)$, $(3;3)$.

Bài 18 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

Cho 5 đường tròn có cùng bán kính và sắp xếp để tạo thành 9 miền được kí hiệu là $A_1, A_2, \ldots, A_9$ (như hình vẽ). Sau đó, điền vào 9 miền trên các số được lấy từ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sao cho mỗi miền được điền bởi một số, hai miền khác nhau được điền bởi hai số khác nhau và tổng các số trong mỗi hình tròn đều bằng 14.



a) Tính tổng các số ở các miền A_2, A_4, A_6, A_8.

b) Hỏi có bao nhiêu cách điền thỏa mãn điều kiện trên? Vì sao?

Lời giải:

a) Gọi $a_1, a_2, \ldots, a_9$ lần lượt là các số được điền vào các miền $A_1, A_2, \ldots, A_9$ để thỏa mãn điều kiện.

Mỗi hình tròn có tổng là 14, suy ra năm hình tròn có tổng là $14 \cdot 5 = 70$.

Ta có $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) = 70$

$\Rightarrow (1+2+3+4+5+6+7+8+9) + (a_2 + a_4 + a_6 + a_8) = 70 \Rightarrow a_2 + a_4 + a_6 + a_8 = 25$

b) Ta có $a_1 + a_2 = a_8 + a_9 = 14$, suy ra ta chỉ có hai cặp thỏa mãn là $(9;5)$ và $(8;6)$

$\Rightarrow a_2 + a_8 \in \{11;13;15;17\}$.

- **TH1:** $a_2 + a_8 = 11 \Rightarrow a_4 + a_6 = 25 - 11 = 14$.

Mà các cặp số có tổng bằng 14 là $(5;9)$ và $(6;8)$ (mâu thuẫn).

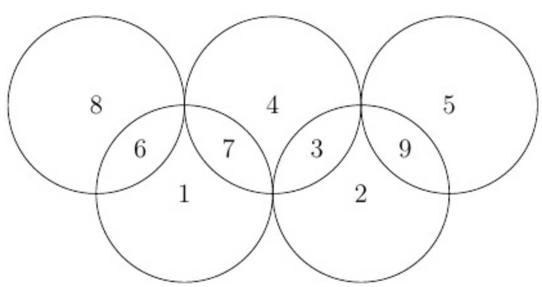
- **TH2:** $a_2 + a_8 = 13 \Rightarrow a_4 + a_6 = 25 - 13 = 12$.

Mà các cặp số có tổng bằng 12 là $(3;9), (4;8)$ và $(5;7)$ (mâu thuẫn).

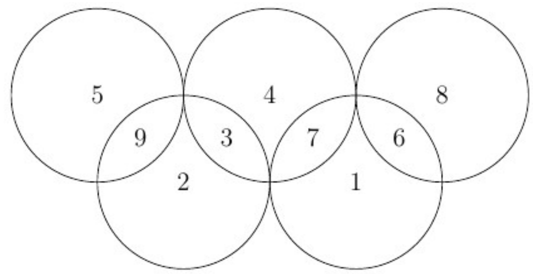
- **TH3:** $a_2 + a_8 = 15 \Rightarrow a_4 + a_6 = 25 - 15 = 10$.

Cặp số có tổng bằng 10 thỏa mãn là $(7;3)$. Không mất tính tổng quát, giả sử $a_4 = 7$; $a_6 = 3$.

Khi đó: $a_1 = 8; a_2 = 6; a_3 = 1; a_4 = 7; a_5 = 4; a_6 = 3; a_7 = 2; a_8 = 9; a_9 = 5$

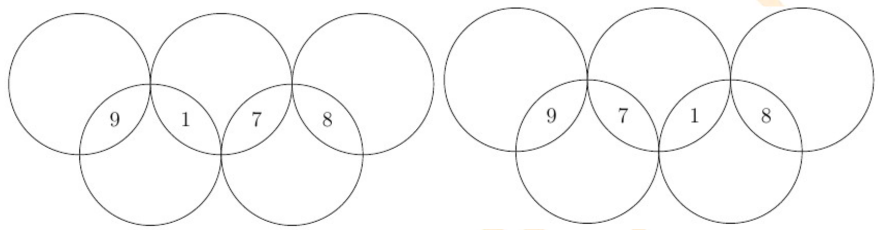


Và lấy đối xứng lại ta được cách xếp thứ 2 như bên dưới:



- **TH4:** $a_2 + a_8 = 17 \Rightarrow a_4 + a_6 = 25 - 17 = 8$.

Mà các cặp số có tổng bằng 8 là $(1;7)$ và $(2;6)$. Khi đó tổng các số trong một hình tròn lớn hơn 14, điều này mâu thuẫn giả thiết (quan sát hình vẽ).



Vậy có 2 cách điền các số thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 19 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Trong hình chữ nhật (H) kích thước $6cm \times 4cm$, cho năm điểm phân biệt $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$.

Chứng minh rằng:

a) Trong năm điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ luôn tồn tại ba điểm cùng thuộc một đường tròn bán kính $2,5cm$

b) Tồn tại một đường tròn đường kính $0,99\ cm$ nằm trong (H) và không có điểm chung với bất kì hình tròn nào trong năm hình tròn tâm A_i đường kính $1\ cm$ (Với $i = 1,2,3,4,5$).

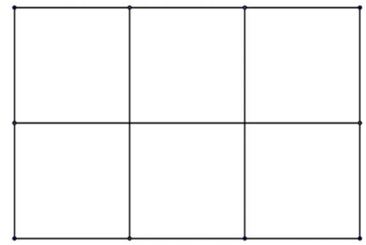
Lời giải:

a) Chia hình chữ nhật (H) thành hai hình chữ nhật con kích thước $3cm \times 4cm$ khi đó mỗi hình chữ nhật con sẽ nội tiếp đường tròn bán kính $2,5\ cm$.

Theo nguyên lí Dirichle, có $5 > 2.2$ nên tồn tại một hình chữ nhật con chứa 3 trong 5 điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$

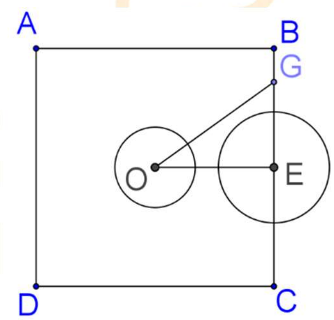
Từ đó suy ra trong 5 điểm $A_1; A_2; A_3; A_4; A_5$ luôn tồn tại 3 điểm cùng thuộc một đường tròn bán kính $2,5\ cm$

b) Chia hình chữ nhật (H) thành 6 hình vuông con kích thước $2cm \times 2cm$ như hình vẽ dưới đây



Vì có 6 hình vuông con và 5 điểm nên tồn tại một hình vuông không chứa điểm A_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ nào nằm trong hình vuông đó, giả sử là hình vuông $ABCD$.

Trong hình vuông, ta gọi đường tròn (O) là đường tròn có tâm là tâm hình vuông, bán kính $0,495cm$, ta sẽ chứng minh (O) là đường tròn cần tìm.



Gọi E là trung điểm BC, đường tròn (E) có bán kính $0,5cm$

Xét G là điểm bất kì không nằm trong hình vuôn

g $ABCD$

Gọi đường tròn (G) là đường tròn tâm G, bán kính $0,5cm$

Khi đó $OG > OE = 1\ cm$

$R_O + R_G = R_O + R_E = 0,495 + 0,5 = 0,995cm$

Suy ra (O) và (G) không giao nhau, vậy (O) chính là đường tròn cần tìm.

Bài 20 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho 10 số nguyên dương phân biệt $a_1; a_2; a_3; ....; a_{10}$ và p là một ước nguyên tố bất kì của $A = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + ... + 10a_{10}$. Chứng minh rằng:

a) $B = 10^{p^2} - 10$ chia hết cho p.

b) $C = a_1.1^{p^{2024}} + a_2.2^{p^{2024}} + a_3.3^{p^{2024}} + ... + a_{10}.10^{p^{2024}}$ là hợp số.

Lời giải:

a) Ta có $B = 10^{p^2} - 10 = 10 \cdot \left(10^{p^2-1} - 1\right) = 10 \cdot \left(10^{(p-1)(p+1)} - 1\right)$

+) Nếu $p \mid 10 \left(p \in \mathbb{P}\right) \Rightarrow p \in \{2;5\} \Rightarrow p \mid 10^{p^2} - 10$ hay $B = 10^{p^2} - 10$ chia hết cho p.

+) Nếu $(p,10) = 1$ theo định lý nhỏ Fermat:

$10^{p-1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow \left(10^{p-1}\right)^{p+1} \equiv 1 (\bmod p) \Rightarrow 10^{p^2-1} - 1 \equiv 0 (\bmod p)$

Vậy $B = 10^{p^2} - 10$ chia hết cho p, $\forall p \in \mathbb{P}$.

b) Xét $D = C - A = \left(a_1 \cdot 1^{p^{2024}} + a_2 \cdot 2^{p^{2024}} + a_3 \cdot 3^{p^{2024}} + \ldots + a_{10} \cdot 10^{p^{2024}}\right) - \left(a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + 10a_{10}\right)$

$=\left(a_1\cdot 1^{p^{2024}}-a_1\right)+\left(a_2\cdot 2^{p^{2024}}-2a_2\right)+\ldots+\left(a_{10}\cdot 10^{p^{2024}}-10a_{10}\right)$

Xét k với $k=\overline{1,10}$. Ta có $k^{p^{2024}}-k=k\left(k^{p^{2024}-1}-1\right)$.

+) Trường hợp 1: $(p,k)=1$ $(p\in\mathbb{P})$. Theo định lí nhỏ Fermat:

$k^{p-1}\equiv 1(\text{mod } p)\Rightarrow k^{p-1}-1\equiv 0(\text{mod } p)\Rightarrow p\mid k^{p-1}-1$ mà $k^{p-1}-1\mid k^{p^{2024}-1}-1$ nên $p\mid k^{p^{2024}-1}-1$.

+) Trường hợp 2: $p\mid k$. Ta cũng suy ra được: $p\mid k\left(k^{p^{2024}-1}-1\right)$. Vậy $p\mid k\left(k^{p^{2024}-1}-1\right)$ trong mọi trường hợp.

Thay k vào D ta được $D=C-A$ chia hết cho p. Mà từ giả thiết ta có A chia hết cho p suy ra C cũng chia hết cho p. (1)

Mặt khác ta cũng có:

$p\le A=a_1+2a_2+3a_3+\ldots+10a_{10}<a_1\cdot 1^{p^{2024}}+a_2\cdot 2^{p^{2024}}+a_3\cdot 3^{p^{2024}}+\ldots+a_{10}\cdot 10^{p^{2024}}=C$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $C=a_1\cdot 1^{p^{2024}}+a_2\cdot 2^{p^{2024}}+a_3\cdot 3^{p^{2024}}+\ldots+a_{10}\cdot 10^{p^{2024}}$ là hợp số.

Bài 21 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Lấy ngẫu nhiên một số từ tập hợp S. Tính xác suất để lấy được một số chia hết cho 7.

Lời giải:

Ta có $S=\{100;101;102;\ldots;999\}$. Suy ra không gian mẫu $\Omega=S\Rightarrow n(\Omega)=900$

Gọi A là biến cố "lấy được số chia hết cho 7" $\Rightarrow A=\{105;112;\ldots;994\}$

$\Rightarrow n(A)=\dfrac{994-105}{7}+1=128$.

Vậy xác suất xảy ra biến cố A là $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{128}{900}=\dfrac{32}{225}$.

Bài 22 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

a) Cho x, y là các số nguyên dương sao cho x^2+2y là số chính phương. Chứng minh rằng x^2+y là tổng của hai số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$.

Lời giải:

a) Theo đề bài: $x^2+2y=m^2$ với $m\in\mathbb{N}\Rightarrow 2y=m^2-x^2$

$\Rightarrow m$ và x cùng tính chẵn lẻ $\Rightarrow \dfrac{m+x}{2};\ \dfrac{m-x}{2}$ là các số nguyên.

Ta có: $x^2+y=x^2+\dfrac{m^2-x^2}{2}=\dfrac{2\left(m^2+x^2\right)}{4}=\left(\dfrac{m-x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m+x}{2}\right)^2$

Ta có điều phải chứng minh.

b) $\left(x^2+1\right)\left(y^2+1\right)+2(x-y)(1-xy)=4(1+xy)$

$x^2+y^2-2xy+x^2y^2-2xy+1+2(x-y)(1-xy)=4$

$(x-y)^2+(1-xy)^2+2(x-y)(1-xy)=4$

$(x-y+1-xy)^2=4$

$(1-y)^2(x+1)^2=4$

$(y-1)(x+1)=2$ (vì x, y nguyên dương)

Do x nguyên dương $\Rightarrow x+1\geq 2$ nên ta có $\begin{cases}x+1=2\\y-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

Vậy $(x;y)=(1;2)$.

Bài 23 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

a) Cho p và $2p+1$ là các số nguyên tố, $(p>3)$. Chứng minh rằng $2p^2+7$ là hợp số.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $3^x+40=y^2$.

Lời giải:

a) Ta có: p là số nguyên tố, $p>3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} p \equiv 1(\bmod 3) \\ p \equiv -1(\bmod 3) \end{array}\right.$

+ Nếu $p \equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow 2p+1 \equiv 0(\bmod 3), 2p+1>3 \Rightarrow 2p+1$ là hợp số, mâu thuẫn với giả thiết $2p+1$ là số nguyên tố, (loại)

+ Do đó, $p \equiv -1(\bmod 3) \Rightarrow p^2 \equiv 1(\bmod 3) \Rightarrow 2p^2+7 \equiv 0(\bmod 3), 2p^2+7>3 \Rightarrow 2p^2+7$ là hợp số.

Ta được điều phải chứng minh.

b)

*** TH1:** Nếu x lẻ, $3^x+1 \equiv 0(\bmod 4) \Rightarrow 3^x+40 \equiv 3(\bmod 4)$ mà $y^2 \equiv 0,1(\bmod 4)$

Suy ra trường hợp này không thỏa mãn.

*** TH2:** Nếu x chẵn, đặt $x=2n,(n \in \mathbb{N})$, ta có:

$3^x+40=y^2,(1) \Rightarrow 3^{2n}+40=y^2 \Rightarrow y^2-\left(3^n\right)^2=40 \Rightarrow \left(y-3^n\right)\left(y+3^n\right)=40$

Do $n \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{Z}^+$ nên $y+3^n>y-3^n$ nên ta có bảng giá trị

$y-3^n$	1	2	4	5
$y+3^n$	40	20	10	8
3^n	$\frac{39}{2}$	9	3	$\frac{3}{2}$
n	Không thỏa mãn	2	1	Không thỏa mãn
x		4	2	
		Thỏa mãn	Thỏa mãn	

+ Với $x=2$, thay vào (1) ta được $y=7$

+ Với $x=4$, thay vào (1) ta được $y=11$

Vậy, các cặp số nguyên dương (x, y) cần tìm là $(2;7)$ và $(4;11)$.

Bài 24 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

Một lớp học có 35 học sinh, các học sinh này tham gia một số câu lạc bộ môn học. Mỗi học sinh tham gia đúng một câu lạc bộ. Nếu chọn ra 10 học sinh bất kì của lớp thì luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ. Chứng minh có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh.

Lời giải:

Nếu số câu lạc bộ môn học nhiều hơn hoặc bằng 5. Ta chọn ở mỗi câu lạc bộ 1 hoặc 2 học sinh để được 10 học sinh, thì 10 học sinh này không thỏa mãn điều kiện luôn có ít nhất 3 học sinh tham gia cùng một câu lạc bộ.

Do đó, số câu lạc bộ môn học sẽ nhỏ hơn 5.

Giả sử tất cả các câu lạc bộ môn học có nhiều nhất 8 học sinh tham gia, lúc đó số học sinh tham gia các câu lạc bộ này không vượt quá $4.8 = 32$ học sinh ít hơn 35 học sinh, dẫn đến giả sử trên là sai.

Vậy có một câu lạc bộ gồm ít nhất 9 học sinh. Điều phải chứng minh.

Bài 25 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.

Lời giải:

Vì $6n-13$ là số nguyên tố và $n \in \mathbb{N}$ nên $n \geq 3$.

Ta có $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên $2n-1=a^2$; $3n+1=b^2$ với $a;b \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2b^2-3a^2=5$ (1)

Ta có $6n-13=3(2n-1)-10=3a^2-2(2b^2-3a^2) = 9a^2-4b^2=(3a-2b)(3a+2b)$ (2)

Vì $6n-13$ là số nguyên tố, mà $3a-2b \leq 3a+2b$ nên từ (2) ta có $3a-2b=1 \Rightarrow b=\dfrac{3a-1}{2}$

Thay $b=\dfrac{3a-1}{2}$ vào (1) ta được $2\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)^2-3a^2=5 \Rightarrow 3a^2-6a-9=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$

Vì $a \in \mathbb{N}$ nên $a=-1$ không thỏa mãn.

Với $a=3$ thì $b=4, n=5$ và $6n-13=17$ (thỏa mãn).

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

Bài 26 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\, y)$ thỏa mãn $x^2-xy+3x-2y^2-3y-3=0$.

Lời giải:

Có $x^2-xy+3x-2y^2-3y-3=0 \Rightarrow x^2-(y-3)x-2y^2-3y+2=5$

Xét phương trình bậc hai: $x^2-(y-3)x-2y^2-3y+2=0$

$\Delta=(3y+1)^2 \Rightarrow x=2y-1,\ x=-y-2$

Có $x^2-(y-3)x-2y^2-3y+2=(x-2y+1)(x+y+2)$

Vậy phương trình đã cho có dạng : $(x-2y+1)(x+y+2)=5$

TH1: $\begin{cases} x-2y+1=1 \\ x+y+2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} x-2y+1=5 \\ x+y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (loại)

TH3: $\begin{cases} x-2y+1=-5 \\ x+y+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases}$

TH4: $\begin{cases} x-2y+1=-1 \\ x+y+2=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{16}{3} \\ y=-\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (loại)

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x;\ y)$ cần tìm là: $(2;1),(-4;1)$.

Bài 27 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng $10^{2023}+2024$ chia hết cho 3;

b) Chứng minh rằng $n^3+2024n+2$ không chia hết cho $10^{2023}+2024$ với mọi số tự nhiên n.

Lời giải:

a) Vì 10 chia cho 3 dư 1 nên 10^{2023} chia cho 3 dư 1.

2024 chia cho 3 dư 2.

Vậy $10^{2023}+2024$ chia hết cho 3. (1)

b) $n^3+2024n+2=n^3-n+2025n+2$

$=n(n-1)(n+1)+2025n+2$

Với mọi số tự nhiên n thì $n-1,\ n,\ n+1$ là 3 số nguyên liên tiếp nên trong 3 số đó có đúng một số chia hết cho 3.

Do đó $n(n-1)(n+1)$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n.

Vì 2025 chia hết cho 3 nên $2025n$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên n.

Do đó $n(n-1)(n+1)+2025n+2$ chia cho 3 dư 2 với mọi số tự nhiên n. (2)

Từ (1), (2) suy ra $n^3+2024n+2$ không chia hết cho $10^{2023}+2024$ với mọi số tự nhiên n.

Bài 28 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\dfrac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.

Lời giải:

Giả sử, tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\dfrac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.

Khi đó, tồn tại $k,\ m \in \mathbb{N}$ sao cho: $\begin{cases} n=k^2 \\ \dfrac{n-10}{3}=m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=k^2 \\ n-10=3m^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=k^2 \\ n=10+3m^2 \end{cases}.$

Do đó $k^2=10+3m^2 \Rightarrow k^2-3m^2=10.$ (1)

Suy ra $k^2 \equiv 3m^2 \pmod 5.$ (2)

Ta có nhận xét sau: Một số chính phương khi chia cho 5 thì số dư chỉ có thể là một trong các số: 0; 1; hoặc 4.

Từ đó, suy ra $3m^2$ chia cho 5 thì số dư chỉ có thể là một trong các số: 0; 3; 2. (3)

k^2 chia cho 5 thì số dư chỉ có thể là một trong các số: 0; 1; 4. (4)

Từ (2), (3), (4) suy ra $\begin{cases} k^2 \equiv 0 \pmod 5 \\ 3m^2 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}.$

Vì 3 và 5 là hai số nguyên tố cùng nhau nên từ $3m^2 \equiv 0 \pmod 5$ suy ra $m^2 \equiv 0 \pmod 5.$

Vì 5 là số nguyên tố nên từ $\begin{cases} k^2 \equiv 0 \pmod 5 \\ m^2 \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} k \equiv 0 \pmod 5 \\ m \equiv 0 \pmod 5 \end{cases}$.

Do đó $\begin{cases} k^2 \equiv 0 \pmod{25} \\ m^2 \equiv 0 \pmod{25} \end{cases}$ suy ra $k^2 - 3m^2 \equiv 0 \pmod{25}$. (5)

Từ (1), (5) suy ra $10 \equiv 0 \pmod{25}$. Điều này vô lý.

Do đó, điều giả sử là sai.

Vậy không tồn tại số tự nhiên n để cả hai số n và $\dfrac{n-10}{3}$ đều là các số chính phương.

Bài 29 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình sau đây trên tập số nguyên: $2x^2y + 8x^2 + y = 11$

Lời giải:

$2x^2y + 8x^2 + y = 11 \Rightarrow 2x^2(y+4) + y + 4 = 15 \Rightarrow (2x^2+1)(y+4) = 15$

Vì x, y nguyên nên $2x^2+1$; $y+4$ là ước của 15, chú ý $2x^2+1>0$ từ đó ta được

$2x^2+1$	15	1	3	5
$y+4$	1	15	5	3
x	(loại)	0	1 hoặc -1	(loại)
y	(loại)	11	1	(loại)

Vậy phương trình có các nghiệm $(x;y) \in \{(0;11);(1;1);(-1;1)\}$

Bài 30 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Định lý Wilson phát biểu ở dạng chia hết như sau: "Cho số nguyên dương $n \geq 2$, khi đó n là số nguyên tố khi và chỉ khi $(n-1)!+1$ chia hết cho n"; với kí hiệu $n! = 1.2.3...n$ là tích của n số nguyên liên tiếp từ 1 đến n và $0! = 1$.

a) Sử dụng định lý Wilson chứng minh rằng: "n là số nguyên tố thì $(n-2)!-1$ chia hết cho n".

b) Hãy chứng minh chiều ngược của định lý Wilson: "Số nguyên dương $n \geq 2$ thỏa mãn $(n-1)!+1$ chia hết cho n thì n là số nguyên tố".

Lời giải:

a) Xét $(n-1)!+1=(n-1)(n-2)!-(n-1)+n=(n-1)[(n-2)!-1]+n$

Theo định lý Wilson, có $(n-1)!+1 \vdots n,\ \ n \vdots n \Rightarrow (n-1)[(n-2)!-1] \vdots n$

Mà $(n-1;\ n)=1$ với mọi n nên $(n-2)!-1 \vdots n$ (Điều phải chứng minh).

b) Do $(n-1)!+1 \vdots n \Rightarrow (n-1)! \equiv -1 \pmod{n}$

Giả sử n không phải số nguyên tố $\Rightarrow n \geq 4$

Với $n=4$ thì $(n-1)!=3! \equiv 2 \pmod{4}$ (không thỏa mãn)

Với $n>4,$ do n không nguyên tố, đặt $n=pq$ với $1<p \leq q<n$

TH1: $p<q \Rightarrow p;q \in \{2;3;...;n-1\}$ khi đó $\Rightarrow (n-1)! \vdots pq \Rightarrow (n-1)! \vdots n$ (mâu thuẫn)

TH2: $p=q \Rightarrow n=p^2$

Khi đó $(n-1)! \vdots p$ mà $p>1 \Rightarrow (n-1)!+1 \not\vdots\ p \Rightarrow (n-1)!+1 \not\vdots\ p^2=n$ (mâu thuẫn)

Từ đó ta có điều giả sử là sai. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 31 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Viết các số nguyên dương liên tiếp $1,\ 2,\ \ldots,\ 2022$ trên bảng; gọi $m,\ n$ là ước nguyên tố của 2025, người ta thực hiện mỗi bước như sau: Hai số bất kì a,b ở trên bảng sẽ bị xóa đi và viết thay thế lên bảng số $|ma-nb|$ hoặc $|ma+nb|$. Thực hiện liên tiếp các bước như trên, hỏi rằng cuối cùng trên bảng có thể còn lại duy nhất số 2024 hay không?

Lời giải:

Vì ban đầu có 2022 số nên sẽ có 1011 số lẻ

Gọi số các số lẻ còn lại trên bảng sau lần thay thế thứ k là n_k (ví dụ khi chưa thay thế lần nào thì $n_k=n_0=1011$)

Ta có: 2025 là số lẻ suy ra $m;n$ là các số lẻ, khi đó ta có các nhận xét sau

+ Nếu $a,\ b$ có 1 số chẵn, 1 số lẻ thì $ma-nb$ và $ma+nb$ đều là các số lẻ

$\Rightarrow$ nếu thực hiện thay thế thì số các số lẻ không đổi

+ Nếu $a,\ b$ là 2 số chẵn thì $ma-nb$ và $ma+nb$ cùng chẵn

$\Rightarrow$ nếu thực hiện thay thế thì số các số lẻ không đổi

+ Nếu $a,\ b$ là 2 số lẻ thì $ma-nb$ và $ma+nb$ cùng chẵn

$\Rightarrow$ nếu thực hiện thay thế thì số các số lẻ giảm đi 2 số

Như vậy sau mỗi lần xóa thì số các số lẻ hoặc không đổi, hoặc giảm đi 2 số. Nghĩa là sau k lần thay thế thì tất cả các n_k đều chung tính chất chẵn lẻ mà $n_0 = 1011$ là lẻ nên n_k là lẻ với mọi k.

$\Rightarrow n_k$ không thể bằng 0

Do vậy nếu xóa đến khi còn lại số cuối cùng thì số đó bắt buộc phải là số lẻ.

Vậy số cuối cùng trên bảng không thể bằng 2024.

Bài 32 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng $A = 2^{2023} + 3m^2 + 6n - 23$ chia hết cho 3 với mọi số tự nhiên m, n.

b) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên (m, n) để $B = 3^{3m^2+6n-22} + 4$ là một số nguyên tố.

Lời giải:

a) Ta có $2 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 2^{2023} \equiv -1 \pmod 3$. Suy ra $A = 2^{2023} + 3m^2 + 6n - 23 \equiv -1 - 23 \equiv 0 \pmod 3$.

b) Nếu $X = 3m^2 + 6n - 22 < 0$ thì $B \notin \mathbb{Z}$, do đó $X = 3m^2 + 6n - 22 \geq 0$.

Ta có $X = 3\left(m^2 + 2n - 8\right) + 2 \Rightarrow X \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow X = 3k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$.

Do đó $B = 3^{3k+2} + 4 = 9.27^k + 4 \equiv 9.1 + 4 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow B = 13$.

Từ $B = 13$ suy ra $k = 0 \Rightarrow 3m^2 + 6n - 22 = 2$

$$m^2 + 2n - 8 = 0$$

$$2n = 8 - m^2 \Rightarrow \begin{cases} 8 - m^2 \geq 0 \\ 8 - m^2 \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 \leq 8 \\ m \vdots 2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = 0 \\ m^2 = 4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = 2 \end{array}\right..$$

Vậy cặp số tự nhiên cần tìm là $(0,4)$, $(2,2)$.

Bài 33 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Ban đầu, trên bảng có n số nguyên dương đầu tiên được viết liên tiếp từ trái qua phải: $1, 2, 3, \ldots, n-1, n.$ Ta thực hiện trò chơi đổi số như sau: Mỗi lượt chơi, lấy ba số đứng liền nhau a, b, c và đổi chỗ a với c thành c, b, a. Hỏi sau hữu hạn lượt chơi như trên ta có thể thu được dãy số ngược lại $n, n-1, \ldots, 2, 1$ hay không, nếu:

a) $n = 5$; b) $n = 2024$.

Lời giải:

a) Với $n=5$ ta thực hiện các bước biến đổi như sau:

1	2	3	4	5
1	4	3	2	5
3	4	1	2	5
3	4	5	2	1
5	4	3	2	1

Ở trường hợp này ta thu được dãy ngược lại sau 5 lần biến đổi.

b) Với $n=2024$: Ta thấy rằng với cách đổi như trên thì các số lẻ luôn ở vị trí lẻ còn số chẵn luôn ở vị trí chẵn. Ban đầu số 2024 ở vị trí chẵn, do đó nó không thể chuyển về vị trí đầu tiên trong dãy số $2024,\ 2023,\ldots,\ 2,\ 1$ được. Vì vậy sẽ không thu được dãy ngược lại nếu $n=2024$.

Bài 34 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Chứng minh rằng $2025^n+n^2+2024n+5$ không phải là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

Lời giải:

Ta có nhận xét sau: Một số chính phương sẽ có dạng $4k$ hoặc $4k+1$ với $k\in\mathbb{N}$.

Vì 2025 chia cho 4 dư 1 nên 2025^n chia cho 4 dư 1 (với mọi số tự nhiên n).

$2024n$ chia hết cho 4 (với mọi số tự nhiên n).

5 chia cho 4 dư 1.

Vì n^2 là số chính phương nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: n^2 chia hết cho 4.

Khi đó, $2025^n+n^2+2024n+5$ chia cho 4 dư 2.

Theo nhận xét trên thì $2025^n+n^2+2024n+5$ không phải là số chính phương.

Trường hợp 2: n^2 chia cho 4 dư 1.

Khi đó, $2025^n+n^2+2024n+5$ chia cho 4 dư 3.

Theo nhận xét trên thì $2025^n+n^2+2024n+5$ không phải là số chính phương.

Vậy $2025^n+n^2+2024n+5$ không phải là số chính phương với mọi số tự nhiên n.

Bài 35 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tập hợp S gồm có 18 số tự nhiên khác nhau bất kỳ.

a) Lấy ra 5 phần tử bất kỳ của tập hợp S. Chứng minh rằng trong 5 phần tử lấy ra đó luôn tồn tại 3 phần tử có tổng chia hết cho 3.

b) Chứng minh rằng luôn tồn tại 9 phần tử của tập hợp S có tổng chia hết cho 9.

Lời giải:

a) Một số tự nhiên bất kỳ khi chia cho 3 sẽ có số dư là một trong các số: 0; 1; 2.

Theo nguyên lý Dirichlet, trong 5 phần tử bất kỳ của tập hợp S khi chia cho 3 sẽ có ít nhất 2 số có cùng số dư. Khi đó, có thể xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: Có 2 số chia cho 3 có cùng số dư r_1, 2 số chia cho 3 có cùng số dư r_2 và 1 số chia cho 3 có số dư r_3. Trong đó r_1, r_2, r_3 là 3 số đôi một khác nhau và $r_1 + r_2 + r_3 = 3$.

Khi đó, chọn ra 3 số gồm: 1 số chia cho 3 có số dư r_1, 1 số chia cho 3 có số dư r_2 và 1 số chia cho 3 có số dư r_3. Tổng của 3 số đó chia hết cho 3.

Trường hợp 2: Có ít nhất 3 số khi chia cho 3 có cùng số dư.

Khi đó, luôn lấy ra được 3 số mà khi chia cho 3 có cùng số dư. Tổng của 3 số đó chia hết cho 3.

b) Chia tập hợp S thành 3 tập hợp con là: Tập hợp S_1 có 5 phần tử, S_2 có 5 phần tử, S_3 có 8 phần tử (S_1, S_2, S_3 đôi một không có phần tử chung).

Theo ý a, ta có:

Trong S_1 ta lấy ra được 3 phần tử có tổng chia hết cho 3. Kí hiệu là a_1, a_2, a_3.

Trong S_2 ta lấy ra được 3 phần tử có tổng chia hết cho 3. Kí hiệu là a_4, a_5, a_6.

Trong S_3 ta lấy ra được 3 phần tử có tổng chia hết cho 3. Kí hiệu là a_7, a_8, a_9.

Số phần tử còn lại của các tập hợp S_1, S_2, S_3 là: 9 phần tử.

Trong 9 phần tử đó, ta lấy ra được 3 phần tử có tổng chia hết cho 3.

Kí hiệu là $a_{10},\, a_{11},\, a_{12}$.

Trong 6 phần tử còn lại, ta lấy ra được 3 phần tử có tổng chia hết cho 3.

Kí hiệu là $a_{13},\, a_{14},\, a_{15}$.

Giả sử $a_1 + a_2 + a_3 = 3n_1$; $a_4 + a_5 + a_6 = 3n_2$; $a_7 + a_8 + a_9 = 3n_3$;

$a_{10} + a_{11} + a_{12} = 3n_4$; $a_{13} + a_{14} + a_{15} = 3n_5$ với $n_1,\, n_2,\, n_3, n_4,\, n_5 \in \mathbb{N}$.

Trong 5 số tự nhiên $n_1,\, n_2,\, n_3, n_4,\, n_5$ (có thể có các số bằng nhau) ta lấy được 3 số có tổng chia hết cho 3. Không mất tính tổng quát, giả sử 3 số đó là $n_1,\, n_2,\, n_3$. Ta có: $n_1 + n_2 + n_3 = 3k$ $(k \in \mathbb{N})$. Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 = 3(n_1 + n_2 + n_3) = 9k$ chia hết cho 9 (điều phải chứng minh).

Bài 36 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 + 5x + 6y + 3xy + 1 = 0$.

2) Cho biết *Định lí Fermat nhỏ:* "Cho số nguyên tố p. Nếu số nguyên x không chia hết cho p thì $x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, hay là $x^{p-1} - 1 \vdots p$

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên a thì $a^5 - a \vdots 5$.

b) Cho hai số nguyên $a,\, b$. Gọi $p = 4k + 3$ $(k \in \mathbb{N})$ là số nguyên tố và p là ước của $a^2 + b^2$. Chứng minh rằng p là ước chung của a và b.

3) Cho tập hợp S gồm 2023 điểm trên mặt phẳng sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng, không có bốn điểm nào nằm trên cùng một đường tròn. Chứng minh rằng tồn tại ba điểm $A,\, B,\, C$ thuộc tập S sao cho: bên trong đường tròn ngoại tiếp ΔABC có đúng 674 điểm của tập S.

Lời giải:

1) $x^2 + 5x + 6y + 3xy + 1 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3y+3) = 5$

$x+2$	1	5	-1	-5
$x+3y+3$	5	1	-5	-1
x	-1	3	-3	-7

y	1	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1
Kết luận	Thỏa mãn	Loại	Loại	Thỏa mãn

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên $(x;y) \in \{(-1;1);(-7;1)\}$.

2) a) Nếu $a \vdots 5$ thì $a^5 - a \vdots 5$;

Nếu $a \not\vdots 5$, áp dụng định lí Fermat thì $a^4 - 1 \vdots 5$, do đó $a^5 - a = a(a^4 - 1) \vdots 5$.

Ta có điều phải chứng minh.

b) Nếu $a \vdots p$, vì $a^2 + b^2$ chia hết cho p nên $b^2 \vdots p \Rightarrow b \vdots p$ (vì p là số nguyên tố).

Suy ra p là ước chung của a và b.

Nếu $a \not\vdots p$, vì $a^2 + b^2$ chia hết cho p nên $b^2 \not\vdots p \Rightarrow b \not\vdots p$.

Từ $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod p \Rightarrow a^2 \equiv -b^2 \pmod p$, chú ý rằng $\frac{p-1}{2} = 2k + 1$ là số lẻ,

do đó $\left(a^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(-b^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \pmod p \Rightarrow a^{p-1} \equiv -b^{p-1} \pmod p$ (*)

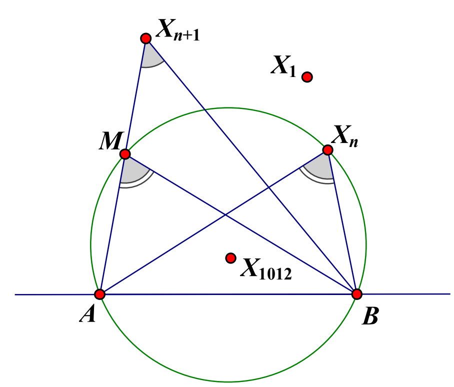
theo định lí Fermat thì $\begin{cases} a^{p-1} \equiv 1 \pmod p \\ b^{p-1} \equiv 1 \pmod p \end{cases}$ (**)

Từ (*) và (**) thì ta suy ra $1 \equiv -1 \pmod p \Rightarrow 2 \equiv 0 \pmod p$ hay là $2 \vdots p$

điều này vô lí vì p là số lẻ.

Do đó điều giả sử sai, tức là $a,\ b \vdots p$ hay là p là ước chung của a và b.

3) Lấy 2 điểm A, B sao cho tất cả các điểm của tập S nằm về cùng một phía của đường thẳng AB.



Nhận xét: Với điểm X_n và X_{n+1} bất kì. Xét đường tròn ngoại tiếp tam giác ABX_n (như hình vẽ). Thế thì: X_{n+1} ở ngoài đường tròn này khi và chỉ khi $\widehat{AX_{n+1}B} < \widehat{AX_nB}$.

Chứng minh nhận xét: X_{n+1} ở ngoài đường tròn ngoại tiếp tam giác ABX_n khi và chỉ khi một trong hai đường AX_{n+1}, BX_{n+1} cắt (ABX_n) như hình vẽ, giả sử

AX_{n+1} cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABX_n tại M. Khi đó, theo tính chất góc ngoài tam giác thì $\widehat{AX_{n+1}B} < \widehat{AMB} = \widehat{AX_nB}$ (các trường hợp hình vẽ suy biến khác có thể lập luận tương tự).

Vì 4 điểm bất kì không nằm trên đường tròn, do đó ta đánh số các điểm còn lại của tập S (trừ A, B) là $X_1, X_2, ..., X_{2021}$ sao cho $\widehat{AX_1B} > \widehat{AX_2B} > .... > \widehat{AX_{674}B} > \widehat{AX_{675}B} > ... > \widehat{AX_{2021}B}$.

Chọn đường tròn $(AX_{675}B)$, thì có đúng các điểm $X_1, X_2, ..., X_{674}$ nằm trong đường tròn này.

Bài 37 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $4x^2 + 5y^2 + 4xy - 4x - 2y - 8 = 0$.

Lời giải:

Ta có: $(2x + y - 1)^2 + 4y^2 = 9 \Rightarrow 9 \ge 4y^2 \Rightarrow y^2 \le \dfrac{9}{4} \Rightarrow y^2 \in \{0;1;2\}$

Với $y^2 = 0 \Rightarrow (2x - y + 1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 1 = \pm 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; y = 0 \\ x = -2; y = 0 \end{array}\right.$ (Thử lại thỏa mãn).

Với $y^2 = 1 \Rightarrow (2x + y - 1)^2 = 5 \Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nguyên.

Với $y^2 = 2 \Rightarrow (2x + y - 1)^2 = 5 \Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm nguyên

Vậy $(x; y) \in \{(1;0);(-2;0)\}$.

Bài 38 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Trong một buổi tổ chức lễ tuyên dương cho các học sinh có thành tích học tập xuất sắc của một tỉnh, ngoại trừ bạn Bình, hai người bất kì đều bắt tay nhau. Bình chỉ bắt tay với những người mình quen. Biết rằng mỗi cặp (hai người) chỉ bắt tay không quá một lần và có tổng cộng tất cả 454 cái bắt tay. Hỏi bạn Bình có bao nhiêu người quen trong buổi lễ tuyên dương đó?

Lời giải:

Xét nhóm n học sinh gồm tất cả các học sinh ngoại trừ Bình $(n \in \mathbb{N}, n \ge 2)$

Vì hai người bất kì đều bắt tay nhau và bắt tay không quá 1 lần

$\Rightarrow$ Số cái bắt tay trong nhóm là $\dfrac{n(n-1)}{2}$

Do số người quen của Bình không vượt quá n nên $454 \le \frac{n(n-1)}{2} + n \Rightarrow n \ge 30$

Lại có $\frac{n(n-1)}{2} \le 454 \Rightarrow n \le 30$. Suy ra $n = 30$.

Do đó, số người quen của Bình là $454 - \frac{30(30-1)}{2} = 19$ (người)

Bài 39 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025)

Kết thúc năm học 2022 - 2023, Hòa hỏi Bình: *"Bạn có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và điểm 9 vậy?"*. Bình trả lời: *"Số bài kiểm tra đạt điểm 8, điểm 9 của tớ nhiều hơn 21 và tổng số điểm của các bài kiểm tra đó là 183"*. Em hãy tính giúp Hòa xem Bình có bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 8 và bao nhiêu bài kiểm tra đạt điểm 9 nhé.

Lời giải:

Gọi số bài điểm 8 và điểm 9 của Bình đạt được lần lượt là x, y (bài) $\left(x, y \in \mathbb{N}^*\right)$.

Theo giả thiết $x + y > 21$.

Tổng số điểm của tất cả các bài kiểm tra đó là 183 nên ta có: $8x + 9y = 183$.

Ta có $183 = 8x + 9y \ge 8(x + y) \Rightarrow x + y \le \frac{183}{8}$.

Do $x + y \in \mathbb{N}^*$ và $21 < x + y \le \frac{183}{8}$ nên $x + y = 22$.

Ta có hệ $\begin{cases} x + y = 22 \\ 8x + 9y = 183 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy Bình được 15 bài điểm 8 và 7 bài điểm 9.

Bài 40 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025)

Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn: $|a-b| + |b-c| + |c-d| + |d-a| = a^{2024} + 2025$.

Chứng minh rằng $a^{12} - 1$ chia hết cho 16.

Lời giải:

Đặt $a-b=x, b-c=y, c-d=z, d-a=t$, khi đó $x+y+z+t=0$ và

$P=|x|+|y|+|z|+|t|=|x|+|y|+|x+y+t|+|t|$

Ta xét các trường hợp sau.

Trường hợp 1: $x+y$ là số chẵn, khi đó $|x|+|y|$ chẵn. Mặt khác $x+y+t$ và t cùng chẵn hoặc cùng lẻ nên $|x+y+t|+|t|$ chẵn suy ra P là số chẵn.

Trường hợp 2: $x+y$ là số lẻ, khi đó: $|x|+|y|$ lẻ. Mặt khác $|x+y+t|+|t|$ có thể nhận 4 kết quả sau: $x+y+2t$, $x+y$, $-x-y$, $-x-y-2t$ đều là số lẻ nên P là số chẵn.

Vậy $a^{2024}+2025$ là số chẵn suy ra a là số lẻ.

Có: $a^{12}-1=(a^6-1)(a^6+1)=(a^2-1)(a^4+a^2+1)(a^6+1)$

Do a là số lẻ nên a^2-1 chia hết cho 8 và a^6+1 chia hết cho 2 nên $a^{12}-1$ chia hết cho 16 suy ra điều phải chứng minh.

Bài 41 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025)

Một hội nghị tham dự có n người $(n<75)$, mỗi người được xếp vào m hàng. Tổng số người và số hàng cộng với tích, thương, hiệu của số người và số hàng bằng 847. Tính số người tham dự hội nghị và số người của mỗi hàng.

Lời giải:

Ta có phương trình sau: $m+n+mn+n-m+\frac{n}{m}=847$ tương đương $2n+mn+\frac{n}{m}=847$

Do $2n+mn$ là số tự nhiên nên $\frac{n}{m}$ cũng là số tự nhiên suy ra $n=km\,(k\in\mathbb{N})$, thay vào phương trình ta có: $2km+km^2+k=847\Rightarrow k(m+1)^2=847=7.11^2$ nên $m+1=11\Rightarrow m=10$ và $k=7$

Vậy tổng có 70 người và mỗi hàng 7 người.

Bài 42 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – trường THPT chuyên Lam Sơn năm học 2024 – 2025)

Hai bạn X và Y tham gia một trò chơi. Có một tờ giấy đã viết 47 số nguyên từ 1 đến 47 và một hộp đựng n viên bi. X là người chơi trước, Y là người chơi sau và sở hữu hộp bi. Hai người luân phiên thực hiện gạch số, mỗi lượt chơi thì người chơi gạch đi 5 số. Sau khi X chơi xong lượt cuối cùng thì còn lại 2 số, hai số đó chênh lệch bao nhiêu thì Y phải đưa cho X bấy nhiêu viên bi. Nếu Y hết bi hoặc không đủ số bi để đưa cho X thì X thắng cuộc, ngược lại nếu Y còn ít nhất một viên bi thì Y thắng cuộc.

a) Với $n=27$, chứng minh rằng Y luôn có cách chơi để thắng cuộc.

b) Với $n=26$, chứng minh rằng X luôn có cách chơi để thắng cuộc.

Lời giải:

a) Với $n=27$ thì số bi Y giữ là 27 và có chiến thuật để Y thắng như sau

+ Mỗi lần X xóa 5 số bất kì thì Y xóa 5 số bé nhất còn lại, trò chơi cứ tiếp tục và Y sẽ thắng.

+ Giải thích: Mỗi người được xóa 5 số nên X sẽ được chơi 5 lượt, Y được chơi 4 lượt. Vì Y sẽ xóa những số bé nhất có thể nên chắc sẽ có những số sau bị xóa 1, 2, 3, 4, ... , 19,20 (số).

Như vậy 2 số còn lại sau khi thực hiện trò chơi xong sẽ nằm trong tập {21; 22; 23; ... ; 46; 47}

Mà hiệu số này lớn nhất là 47 – 21 = 26 tức là Y sẽ luôn còn ít nhất 27 – 26 = 1 viên nên Y thắng cuộc.

b) Với $n=26$, X có chiến thuật để thắng như sau:

+ Ở lượt đầu tiên X xóa 5 số sau: 22, 23, 24, 25, 26

+ Chia 47 – 5 = 42 số còn lại vào 21 nhóm sau: (1; 27); (2; 28); (3; 29);...; (21; 47) các nhóm này đều có hiệu giữa số lớn và số bé là 26

+ Cứ mỗi lượt Y xóa 5 số thuộc 5 nhóm khác nhau thì X xóa 5 số còn lại của 5 nhóm đó, trường hợp Y xóa cả 2 số của 1 nhóm thì X cũng xóa 2 số của 1 nhóm khác.

Như vậy 2 số cuối cùng luôn cùng 1 nhóm, chúng có hiệu là 26.

Vậy X thắng cuộc.

Bài 43 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm học 2024 – 2025)

a) Cho x, y, z là các số nguyên thỏa mãn đẳng thức $xy - yz - zx = 3$. Chứng minh $A = (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3)$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình $3x^3 + 73xy + 2025 = 3y^3$.

Lời giải:

a) Theo giả thiết, thay $3 = xy - yz - zx$ vào biểu thức, ta có biến đổi như sau

$$A = (x^2 - 2xz - 3)(y^2 - 2yz - 3)(-z^2 - 3) = (x^2 - xz - xy + yz)(y^2 - yz - xy + zx)(-z^2 - xy + yz + zx)$$

$$= (x-z)(x-y)(y-z)(x-z)(z-y)(y-x) = \left((x-y)(y-z)(z-x)\right)^2$$

Vì x, y, z là các số nguyên nên $(x-y)(y-z)(z-x)$ là số nguyên

Do đó A là số chính phương. Bài toán được chứng minh.

b) Giả sử tồn tại x, y nguyên thỏa mãn bài toán.

Đặt $y = x + d$ ta biến đổi phương trình như sau: $3x^3 + 73xy + 2025 = 3y^3$

$$\Rightarrow 3(3d^2x + 3dx^2 + d^3) = 73x(x+d) + 2025 \Rightarrow x^2(9d - 73) + x(9d^2 - 73d) + 3d^3 - 2025 = 0$$

Xem như phương trình bậc 2 ẩn x, ta xét biệt thức Δ

$$\Delta = (9d^2 - 73d)^2 - 4(9d - 73)(3d^3 - 2025) = (9d - 73)(d^2(9d - 73) - 4(3d^3 - 2025))$$

$$= (9d - 73)(-3d^3 - 73d^2 + 2025.4) = (9d - 73)(9 - d)(3d^2 + 100d + 900)$$

Vì $3d^2 + 100d + 900 = 3\left(d + \frac{50}{3}\right)^2 + \frac{200}{3} > 0$ mà $\Delta \ge 0$ ta được $\frac{73}{9} \le d \le 9 \Rightarrow d = 9$

Thay vào phương trình ta được $8x^2 + 72x + 162 = 0 \Rightarrow x = -\frac{9}{2} \notin \mathbb{Z}$

Vậy phương trình vô nghiệm nguyên.

Bài 44 (Đề thi vào 10– Toán chuyên–THPT chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm học 2024 – 2025)

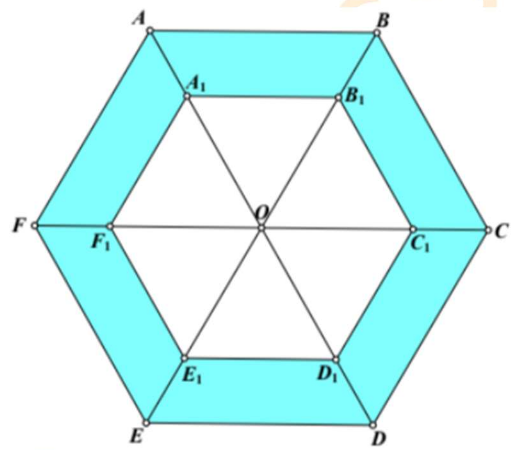
Cho lục giác đều có cạnh bằng 6cm. Hỏi có thể đặt vào trong lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2cm, sao cho bất kì hai hình tròn nào trong 7 hình tròn đó không có điểm trong chung?

Lời giải:

Ta chứng minh kết quả của bài toán là phủ định, thật vậy

Xét hình lục giác đều $ABCDEF$, tâm O có cạnh bằng 6.

Giả sử có thể đặt vào trong hình lục giác đó 7 hình tròn có bán kính bằng 2.



Lấy các điểm $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ trên OA, OB, OC, OD, OE, OF thỏa mãn

$OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 = OE_1 = OF_1 = 3,9$

Gọi O_i là tâm đường trong thứ i

Ký hiệu S là vùng diện tích được tạo bởi các điểm $A, A_1, B, B_1, C, C_1, D, D_1, E, E_1, F, F_1$ (được tô bởi màu xanh lam)

Nhận xét: O_i không thuộc S với mọi $i = 1, 2, \ldots, 7$

Chứng minh: Giả sử có $O_1 \in S, O_1$ thuộc miền ABB_1A_1

Lúc này ta có $d(O_1, AB) < d(A_1B_1, AB) = AA_1.\sin 60^\circ = 2$

Dẫn đến $(O_2, 2)$ không nằm trọn vẹn trong lục giác $ABCDEF$ (vô lý)

Tại vì $(O_i, 2), (O_j, 2)$ không có điểm trong chung với mọi i, j nên ta có $O_iO_j \geq 4, \forall i, j$

Ta chia hình lục giác $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ thành 6 hình tam giác đều có cạnh bằng 3,9 là: $OA_1B_1, \ldots, OF_1A_1$

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại O_i, O_j cùng thuộc 1 hình tam giác, giả sử là OA_1B_1

Lúc này áp dụng định lý cosin cho tam giác OO_iO_j ta có

$O_iO_j^2 = OO_i^2 + OO_j^2 - 2\cos\widehat{OO_iO_j}.OO_i.OO_j \leq OO_i^2 + OO_j^2 - OO_i.OO_j$ (Vì $\cos\widehat{OO_iO_j} \leq 1$) (1)

Để chỉ ra điều vô lý, ta đặt $OO_i = x$, $OO_j = y$ $(x, y \leq 3,9)$

Lúc này: $x^2+y^2-xy\le 3,9x+3,9y-xy=3,9^2-(x-3,9)(y-3,9)\le 3,9^2$

Từ đây kết hợp với (1) và $O_iO_j\ge 4\Rightarrow 4^2\le 3,9^2$ (vô lý). Ta có điều phải chứng minh.

Bài 45 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

a) Cho phương trình $x^4+x^2(ax+a-1)+ax=2-a$ (a là tham số). Chứng minh rằng nếu a khác 2 và tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là số nguyên thì $2a^2-6a+9$ là hợp số

b) Tìm tất cả các số nguyên dương a,b,c thỏa mãn $(a+1)(b+1)(c+1)=3abc$

Lời giải:

a) Ta có: $x^4+x^2(ax+a-1)+ax=2-a\Rightarrow x^2(x^2+1)+ax(x^2+1)-2(x^2+1)+a(x^2+1)=0$

$\Rightarrow (x^2+1)(x^2+ax+a-2)=0\Rightarrow x^2+ax+a-2=0$ (vì $x^2+1>0$)

Ta có: $\Delta=a^2-4a+8>0,\forall a$.

Do đó phương trình có 2 nghiệm phân biệt với mọi a. Vì $a\ne 2\Rightarrow x\ne 0$.

Khi đó, theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-a\\ x_1x_2=a-2\end{cases}\Rightarrow 2a^2-6a+9=a^2+(a-3)^2$

$=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$.

Vì x_1,x_2 là các số nguyên và $x_1\ne x_2$ nên $\begin{cases}x_1^2+1\ne 1\\ x_2^2+1\ne 1\end{cases}$

$\Rightarrow (x_1^2+1)(x_2^2+1)$ là hợp số hay $2a^2-6a+9$ là hợp số. Từ đó ta có điều phải chứng minh.

b) Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Ta có $(a+1)(b+1)(c+1)=3abc$ (1)

Nếu $c=1$ thì $2ab+2a+2b=3ab\Rightarrow ab-2a-2b+4=6\Rightarrow (a-2)(b-2)=6\Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=5,b=4\\ a=8,b=3\end{array}\right.$

Nếu $c=2$ $\Rightarrow ab+a+b+1=2ab\Rightarrow (a-1)(b-1)=2\Rightarrow a=3,b=2$

Nếu $c\ge 3$ thì (1) $\Rightarrow 2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{abc}<3.\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}.3+\frac{1}{3^3}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{27}=\frac{37}{27}<2$ (vô lý)

Vậy $(a,b,c)\in\{(5;4;1);(8;3;1);(3;2;2)\}$ và các hoán vị.

Bài 46 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

Trong hình lục giác đều có cạnh bằng 4 cho 257 điểm phân biệt. Chứng minh rằng tồn tại hình vuông có cạnh bằng 1 chứa ít nhất 5 điểm (có thể thuộc cạnh hình vuông) trong số các điểm đã cho.

Lời giải:

Gọi (O) ngoại tiếp lục giác đều cạnh 4

Khi đó (O) có bán kính R = 4

Gọi ABCD là hình vuông ngoại tiếp (O) $\Rightarrow$ Cạnh hình vuông là 8

Chia hình vuông thành 64 hình vuông nhỏ cạnh bằng 1

Có 257 điểm phân biệt mà có 64 hình vuông

Theo nguyên lý Dirichle tồn tại 1 hình vuông cạnh bằng 1 chứa ít nhất 5 điểm trong số các điểm đã cho.

Bài 47 (Đề khảo sát vào 10 – Toán chuyên – trường THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$.

Lời giải:

Từ giả thiết suy ra: $7(x+2y)\,\vdots\,5 \Rightarrow (x+2y)\,\vdots\,5 \Rightarrow x+2y=5m \Rightarrow x=5m-2y \quad \left(m\in\mathbb{N}^*\right)$

Thay vào phương trình ta có: $(5m-2y)^2+(5m-2y)y+y^2-7m=0 \Rightarrow 3y^2-15my+25m^2-7m=0$

Phương trình (ẩn y)có nghiệm nên $\Delta=225m^2-12\left(25m^2-7m\right)\geq 0 \Rightarrow 75m^2-84m\leq 0 \Rightarrow 0\leq m\leq \dfrac{84}{75}$

Do m là số nguyên dương nên $m=1$

Với $m=1$, ta được $\begin{cases} x=5-2y \\ 3y^2-15y+18=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5-2y \\ (y-2)(y-3)=0 \end{cases} \Rightarrow (x,y)=(1,2)$

Nhận xét. Cũng có thể giải câu 3a) theo cách sau:

Giải phương trình nghiệm nguyên dương: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)$.

Vì $x,y\in\mathbb{N}^*$, ta có: $5(x^2+xy+y^2)=7(x+2y)\Rightarrow 5(4x^2+4xy+4y^2)=28(x+2y)$

$$\Rightarrow 15x^2+5(x+2y)^2=28(x+2y)\Rightarrow 5(x+2y)^2<28(x+2y)\Rightarrow x+2y<\frac{28}{5}\Rightarrow 3\le x+2y\le 5$$

Từ phương trình suy ra: $7(x+2y)\,\vdots\,5\Rightarrow(x+2y)\,\vdots\,5$ (vì $(5;7)=1$)

Dẫn đến $x+2y=5\Rightarrow\begin{cases}x+2y=5\\x^2+xy+y^2=7\end{cases}\Rightarrow(x,y)=(1,2)$

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương: $(x,y)=(1,2)$.

Bài 48 (Đề khảo sát vào 10 – Toán chuyên – trường THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm học 2024 – 2025) Cho n là số nguyên dương và d là ước dương của $2n^2$, chứng minh n^2+d không phải là số chính phương.

Lời giải:

Giả sử n^2+d là số chính phương, ta có $\begin{cases}n^2+d=m^2\\2n^2=d.k\end{cases}(m,k\in\mathbb{N}^*)$

$$\Rightarrow\begin{cases}n^2+d=m^2\\\dfrac{2n^2}{k}=d\end{cases}\Rightarrow n^2+\frac{2n^2}{k}=m^2\Rightarrow n^2k^2+2n^2k=m^2k^2$$

$\Rightarrow k^2+2k=\left(\dfrac{mk}{n}\right)^2$ vì $k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(\dfrac{mk}{n}\right)^2\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\dfrac{mk}{n}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow\left(\dfrac{mk}{n}\right)^2$ là số chính phương $\Rightarrow k^2+2k$ là số chính phương. Nhưng ta có $k^2<k^2+2k<(k+1)^2$ nên vô lý, dẫn đến giả sử sai.

Vậy n^2+d không chính phương.

Bài 49 (Đề khảo sát vào 10 – Toán chuyên – trường THPT Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Chứng minh rằng từ 6 số vô tỉ tùy ý ta có thể chọn được 3 số a, b, c sao cho cả 3 số $a+b,\ b+c,\ c+a$ đều là số vô tỉ. Bài toán còn đúng không nếu ban đầu là 4 số?

Lời giải:

Xét một số A bất kỳ trong sáu số đó, xét năm tổng của A với năm số còn lại. Ta thấy trong năm tổng này ít nhất có ba tổng cùng là số vô tỉ hoặc cùng là hữu tỉ.

*) Nếu có ít nhất ba tổng là vô tỷ chẳng hạn $A+B_1; A+B_2; A+B_3$ là vô tỉ, xét ba số $B_1+B_2; B_1+B_3; B_3+B_2$ nếu có một số vô tỷ chẳng hạn B_1+B_2 thì bộ ba số (A, B_1, B_2) thỏa mãn yêu cầu bài toán. Nếu không có số nào vô tỉ thì cả ba số đó hữu tỉ, điều này dẫn đến $(B_1+B_2)+(B_1+B_3)-(B_3+B_2)=2B_1$ hữu tỉ , vô lý.

Trường hợp nếu có ít nhất ba tổng là hữu tỉ chẳng hạn $A+B_1; A+B_2; A+B_3$ hữu tỉ

Thì ta cũng lập luận như trên đối với bộ (B_1, B_2, B_3).

Vậy bài toán đã được chứng minh.

Bài toán không còn đúng nếu ban đầu là bốn số, chẳng hạn bộ bốn số sau: $\{a, 1+a, 1-a, -a\}$ với a vô tỉ không thể chọn được ra ba số có tổng đôi một vô tỉ.

Bài 50 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Hùng Vương – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì $n^3-9n+54$ không chia hết cho 81.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $P=\sqrt{n+6}+\sqrt{n+3\sqrt{n+6}}$ là số nguyên.

Lời giải:

a) Giả sử tồn tại số tự nhiên n để $n^3-9n+54$ chia hết cho 81 $\Rightarrow n^3-9n+54 \vdots 3 \Rightarrow n \vdots 3$

Đặt $n=3k, k\in\mathbb{N}$. Khi đó: $n^3-9n+54=27k^3-27k+54=27\left(k^3-k+2\right)$.

Mà $n^3-9n+54 \vdots 81$ nên $k^3-k+2 \vdots 3$

Nhưng $k^3-k+2=(k-1)k(k+1)+2$ không chia hết cho $3, \forall k\in\mathbb{N}$.

Vậy với mọi số tự nhiên n thì $n^3-9n+54$ không chia hết cho 81.

b) Ta có $P=\sqrt{n+6}+\sqrt{n+3\sqrt{n+6}}, P\in\mathbb{Z}.$

$\Rightarrow n+3\sqrt{n+6}=\left(P-\sqrt{n+6}\right)^2=P^2+n+6-2P\sqrt{n+6}\Rightarrow\sqrt{n+6}=\dfrac{P^2+6}{2P+3}\in\mathbb{Q}$

Do đó $\sqrt{n+6}\in\mathbb{Q}$ mà $n+6\in\mathbb{Z}\Rightarrow\sqrt{n+6}\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4\sqrt{n+6}\in\mathbb{Z}.$

Có $4\sqrt{n+6}=\dfrac{4P^2+24}{2P+3}=2P-3+\dfrac{33}{2P+3}.$

Do $4\sqrt{n+6}\in\mathbb{Z}, P\in\mathbb{Z}\Rightarrow 2P+3$ là ước của 33 (mà $P\geq\sqrt{6}+\sqrt{3\sqrt{6}}$), ta tìm được $P=15\Rightarrow n=43.$

Vậy $n=43.$

Bài 51 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Trên một đường tròn, lấy 2024 điểm phân biệt, các điểm được tô màu xanh và màu đỏ xen kẽ nhau. Mỗi điểm được gán với một giá trị là một số thực khác không, giá trị của mỗi điểm màu xanh bằng tổng giá trị của hai điểm màu đỏ kề với nó, giá trị của mỗi điểm màu đỏ bằng tích giá trị của hai điểm màu xanh kề với nó. Tính tổng giá trị của 2024 điểm trên.

Lời giải:

Gọi a,b lần lượt là hai giá trị được gán vào hai điểm màu xanh liền kề $(ab\neq 0)$, khi đó giá trị được gán vào điểm màu đỏ xen kẽ nó theo chiều kim đồng hồ được viết dạng $a.b$.

Theo quy luật điểm màu xanh và màu đỏ, ta suy ra giá trị của 5 điểm tiếp theo theo chiều kim đồng hồ thứ tự sẽ là: $b-ab, 1-a, (1-a)(1-b), 1-b, a(1-b)$.

Khi đó tổng của 8 giá trị được gán ở trên là :

$a+ab+b+(b-ab)+(1-a)+(1-a)(1-b)+(1-b)+a(1-b)=3.$

Mặt khác theo quy luật đó, giá trị điểm thứ 9 theo chiều kim đồng hồ là a

Như vậy 2024 giá trị trên được chia thành $\dfrac{2024}{8}=253$ nhóm, mỗi nhóm gồm 8 giá trị theo quy luật trên.

Suy ra tổng giá trị 2024 điểm trên bằng $253.3=759.$

Bài 52 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả số nguyên n sao cho n^3+2n^2+7n+7 chia hết cho $n^2+3.$

Lời giải:

Ta có $n^3+2n^2+7n+7=(n^2+3)(n+2)+4n+1$.

Suy ra $4n+1$ chia hết cho n^2+3.

Lại có $(4n+1)(4n-1)=16n^2-1=16(n^2+3)-49$.

Suy ra 49 chia hết cho n^2+3. Do $n^2+3\ge 3$ nên ta được $\left[\begin{array}{l} n^2+3=7 \\ n^2+3=49 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n=-2 \\ n=2 \\ n^2=46 \end{array}\right.$.

Thử lại ta được $n=-2$ là số thỏa mãn đề bài.

Bài 53 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Có 6 viên bi, ban đầu được chia thành một hoặc nhiều nhóm, mỗi nhóm ít nhất 1 bi. Ta thực hiện liên tiếp các bước sau: mỗi lần lấy ở mỗi nhóm 1 bi và lập thành một nhóm mới.

Ví dụ: Nếu ban đầu ta có hai nhóm với số bi là $5,1$ thì sau bước chuyển, nhóm 5 bi còn lại 4 bi, nhóm 1 bi không còn bi nào, và một nhóm mới được lập với 2 bi. Như vậy, sau bước chuyển ta được 2 nhóm mới có số bi lần lượt là $2,4$.

Chứng minh sau một số bước chia nhóm như trên, ta luôn chia được các bi đã cho thành ba nhóm với số bi trong mỗi nhóm lần lượt là $1,2,3$.

Lời giải:

Tất cả cách viết 6 thành tổng của một hoặc nhiều số nguyên dương là:

$6=5+1=4+2=3+2+1=1+1+4=1+1+1+3=1+1+1+1+2$

$=1+1+1+1+1+1=1+1+2+2=2+2+2=3+3$.

Ta có sơ đồ sau:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & \lbrack 2,1,1,1,1\rbrack & & \lbrack 2,2,1,1\rbrack & \rightarrow & \lbrack 4,1,1\rbrack & \rightarrow & \lbrack 3,3\rbrack \\
 & & & & \downarrow & & & & & & \downarrow \\
\lbrack 1,1,1,1,1,1\rbrack & \rightarrow & \lbrack 6\rbrack & \rightarrow & \lbrack 5,1\rbrack & \rightarrow & \lbrack 4,2\rbrack & \leftarrow & \lbrack 3,1,1,1\rbrack & \leftarrow & \lbrack 2,2,2\rbrack \\
 & & & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & & & \lbrack 3,1,2\rbrack & & & &
\end{array}$$

Nên sau một số bước ta sẽ thu được 3 nhóm và số bi ở mỗi nhóm là $1,2,3$.

Bài 54 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $x^2+4y^2=2xy(x-2y)+5$

b) Cho $m,\ n$ là các số nguyên thỏa mãn $m^2-mn+4n^2$ chia hết cho 25.

Chứng minh số $m^2+mn+4n^2$ chia hết cho 25.

Lời giải:

a) Ta có $x^2+4y^2=2xy(x-2y)+5 \Rightarrow (x-2y)^2-4-2xy(x-2y-2)=1$

$\Rightarrow (x-2y-2)(x-2y+2)-2xy(x-2y-2)=1 \Rightarrow (x-2y-2)(x-2y+2-2xy)=1$

Do x,y nguyên nên ta có các trường hợp

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-2y-2=1 \\ x-2y+2-2xy=1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4-2xy=0 \Rightarrow xy=2$ và $x-2y=3 \Rightarrow 2y^2+3y-2=0 \Rightarrow y=-2; x=-1$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-2y-2=-1 \\ x-2y+2-2xy=-1 \end{cases}$

$\Rightarrow 4-2xy=0 \Rightarrow xy=2$ và $x-2y=1 \Rightarrow 2y^2+3y-1=0$ (không thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=-1; y=-2$

b) Ta có: $m^2-mn+4n^2=(m+2n)^2-5mn \vdots 25 \Rightarrow (m+2n)^2-5mn \vdots 5 \Rightarrow (m+2n)^2 \vdots 5$

$\Rightarrow m+2n \vdots 5 \Rightarrow (m+2n)^2 \vdots 25 \Rightarrow 5mn \vdots 25 \Rightarrow mn \vdots 5 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m \vdots 5 \\ n \vdots 5 \end{array}\right.$

Nếu $m \vdots 5$ thì từ $m^2-mn+4n^2 \vdots 25 \Rightarrow m^2-mn+4n^2 \vdots 5 \Rightarrow 4n^2 \vdots 5 \Rightarrow n^2 \vdots 5 \Rightarrow n \vdots 5$

Nếu $n \vdots 5$ thì từ $m^2-mn+4n^2 \vdots 25 \Rightarrow m^2-mn+4n^2 \vdots 5 \Rightarrow 4m^2 \vdots 5 \Rightarrow m^2 \vdots 5 \Rightarrow m \vdots 5$

Vậy ta luôn có $\begin{cases} m \vdots 5 \\ n \vdots 5 \end{cases}$. Suy ra $m^2+mn+4n^2 \vdots 25$

Bài 55 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho x, y, k là các số nguyên dương sao cho số $p=\dfrac{x^k y}{x^2+y^2}$ là số nguyên tố. Tìm k

Lời giải:

Đặt $(x,y)=d$; $x=x_1.d$, $y=y_1.d$, $\left(d \in \mathbb{N}^*\right)$ trong đó $(x_1,y_1)=1$

Ta có: $x^k y = p\cdot\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow d^{k+1}x_1^k\cdot y_1 = p\cdot\left(x_1^2+y_1^2\right)$. (*)

Mà x_1y_1 nguyên tố cùng nhau với $x_1^2+y_1^2 \Rightarrow p \vdots x_1^k\cdot y_1$

Hiển nhiên $k=1$ không thỏa mãn ($p\le\dfrac{1}{2}$)

TH1: $x_1=1; y_1=1$. Ta có: $x=y=\dfrac{x^k}{2}=p \Rightarrow x=2, k=2, p=2$.

TH2: $x_1=1; y_1=p$. Ta có: $x=d; y=dp \Rightarrow \dfrac{d^{k+1}p}{d^2+d^2p^2}=p \Rightarrow d^{k+1}=d^2+d^2p^2$

Với $d^{k-1}=1+p^2 \Rightarrow p^2=d^{k-1}-1=(d-1)\cdot\left(d^{k-2}+\ldots+1\right)$.

Nếu $k=2$ thì $p^2=d-1$. Thay vào (*) thỏa mãn.

Nếu $k\ge3 \Rightarrow d-1<d^{k-2}+\ldots+1 \Rightarrow d-1=1$ thì $d=2 \Rightarrow d^{k-1}-1\equiv3\pmod 4$ vô lý vì p^2 là số chính phương.

TH3: $x_1=p;\ y_1=1$. Theo (*) không thỏa mãn.

Vậy $k=2$ thỏa mãn đề.

Bài 56 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Sở GD & ĐT TP Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông kích thước 6×6. Ở bước đầu tiên, bạn Đan tô đỏ k ô vuông bất kỳ của bảng. Sau đó, ở mỗi bước tiếp theo bạn Đan tô đỏ các ô vuông kề với ít nhất hai ô đã được tô đỏ (hai ô vuông được gọi là kề nhau nếu chúng có cạnh chung)

a) Chỉ ra một cách tô đỏ 23 ô của bảng ở bước đầu tiên sao cho dù sau bao nhiêu bước, bạn Đan cũng không thể tô đỏ được tất cả các ô của bảng.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại một cách tô đỏ k ô vuông ban đầu sao cho sau một số hữu hạn bước, bạn Đan tô đỏ được tất cả các ô vuông của bảng.

Lời giải:

a) Ta tô đỏ 23 ô vuông thuộc hình chữ nhật 4×6 trong hình vuông ban đầu

Dễ thấy bước tiếp theo chỉ có thể tô được một ô thuộc hình chữ nhật và không thể tô được ra ngoài hình chữ nhật. Suy ra không thể tô hết hình vuông 6×6.

b) Ta chứng minh $k\ge6$. Thật vậy giả sử với $k\le5$ tồn tại một cách tô thỏa mãn đề bài

Khi đó sẽ tồn tại 1 hàng i không có ô vuông nào được tô từ đầu (vì bảng có 6 hàng)

Nếu hàng hoặc cột này ở vị trí biên thì hàng hoặc cột d đó sẽ không thể tô màu nên không thể phủ kín hình vuông.

Dễ thấy không có hai hàng liên tiếp nào không cùng có ô vuông nào được tô từ đầu

Nếu hàng này không phải vị trí biên thì hàng này chia bảng ô vuông thành hai phần trên và dưới. Ta tiến hành tô màu riêng biệt hai phần này theo quy tắc.

Sau đó để tô được hết hàng ô vuông thì mỗi cặp ô vuông đối diện nhau qua hàng i phải có ít nhất một ô được tô màu đỏ và có ít nhất một cặp ô được tô màu đỏ. Ta xét các trường hợp sau (*)

TH1: Một phần có 1 ô và một phần có 4 ô.

Dễ thấy phần chứa 1 ô là hàng ở biên không mất tính tổng quát giả sử hàng 1

Khi đó theo (*) thì phần chứa 4 ô phải tô được tất cả các ô của hình có kích thước 4×6 do có ít nhất một ô ở hàng thứ 6. Hai hàng 4 và 5 có ít nhất một ô nên hàng thứ 3 có nhiều nhất hai ô.

Nên ta không thể tô hết hàng thứ 3. Nên không thể tô hết bảng ô vuông sau hữu hạn bước.

TH2: Một phần có 2 ô và một phần có 3 ô

Lý luận như trên ta thấy không thể tô hết bảng ô vuông sau hữu hạn bước

Với $k=6$ ta tô theo đường chéo bảng thì thỏa mãn đề bài.

Bài 57 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương thỏa mãn đẳng thức $(x+y)^3+6xy+3y^2+y=8x^3+9x^2+1$

Lời giải:

Cách 1. Ta biến đổi phương trình như sau $(x+y)^3+6xy+3y^2+y=8x^3+9x^2+1$

$$8x^3-(x+y)^3+6x^2-6xy+3x^2-3y^2=y-1$$

$$(x-y)\left(7x^2+4xy+y^2+9x+3y\right)=y-1$$

Vì x,y nguyên dương nên $VP\geq 0$, kéo theo $x\geq y$. Nếu $x\neq y$ thì $x-y\geq 1$ suy ra $VP=y-1>3y$ hay $2y<-1$ vô lí vì y nguyên dương. Do vậy, $x=y$ kéo theo $y=1$.

Vậy có đúng một cặp số $(x;y)$ thoả mãn $(1;1)$.

Cách 2. Phương trình đã cho có thể viết lại thành $(x+y)^3+3(x+y)^2+6x+y=(2x+1)^3$

Suy ra $(x+y)^3+3(x+y)^2+6x+y$ là một lập phương đúng.

Ta có $(x+y)^3<(x+y)^3+3(x+y)^2+6x+y<(x+y+2)^3$

Nên $(x+y)^3+3(x+y)^2+6x+y=(x+y+1)^3$

Khai triển và rút gọn, ta được $3x=2y+1 \quad (1)$

Hơn nữa vì $(x+y)^3+3(x+y)^2+6x+y=(2x+1)^3$ nên $(x+y+1)^3=(2x+1)^3$ và từ đây ta có ngay $x+y+1=2x+1$ kéo theo $x=y \qquad (2)$

Từ (1), (2) ta tìm được $x = y = 1$ và cặp $(x;y) = (1;1)$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 58 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số nguyên dương m sao cho có thể cắt hình vuông có cạnh bằng m thành đúng 5 hình chữ nhật mà độ dài 10 cạnh của 5 hình chữ nhật đó được lấy từ các số $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ và mỗi số được lấy đúng một lần.

Lời giải:

Gọi kích thước của các hình chữ nhật là $a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, \cdots, a_5 \times b_5$. Thế thì áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $m^2 = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_5b_5 \geq 5\sqrt[5]{a_1a_2\ldots a_5b_1b_2\ldots b_5} = 5\sqrt[5]{10!} > 100$

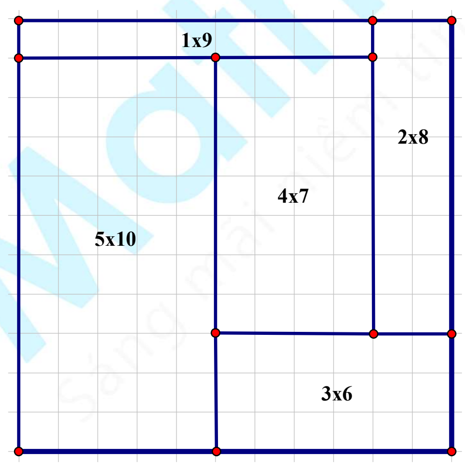
Suy ra $m \geq 11$. Hơn nữa, vì $a_ib_i \leq \dfrac{a_i^2 + b_i^2}{2}$ nên ta lại có

$$m^2 \leq \frac{a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + \cdots + a_5^2 + b_5^2}{2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2}{2} < 196$$

Do đó, $11 \leq m \leq 13$

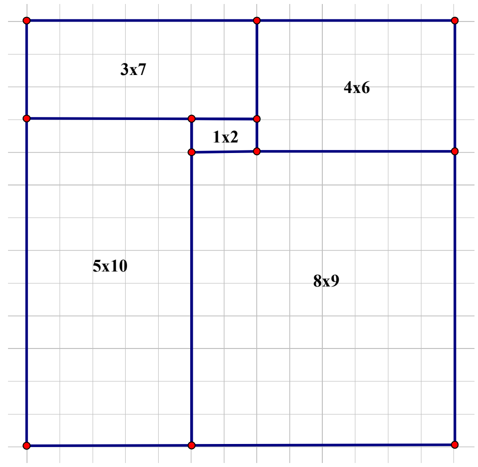
+ Khi $m = 11$, có thể cắt hình vuông cạnh 11 thành 5 hình chữ nhật gồm $1\times 9, 2\times 8, 3\times 6, 4\times 7, 5\times 10$.

Xem hình vẽ dưới đây

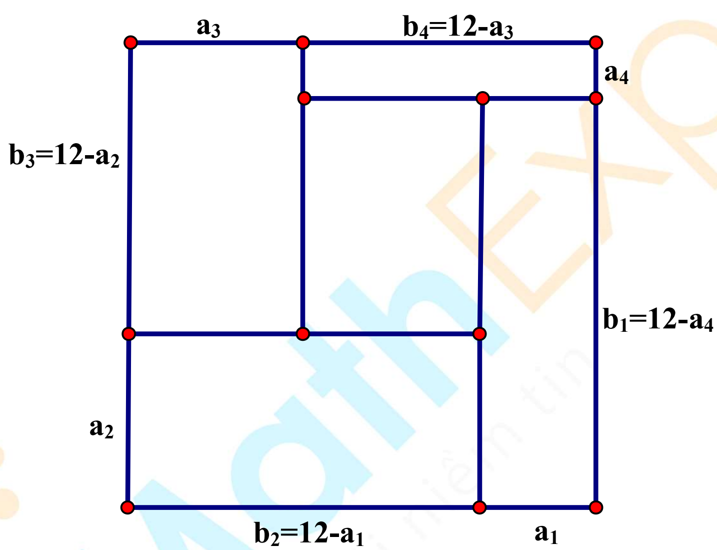


+ Khi $m = 13$, có thể cắt hình vuông cạnh 11 thành 5 hình chữ nhật gồm $1\times 2,\ 3\times 7,\ 4\times 6,\ 5\times 10,\ 8\times 9$.

Xem hình vẽ dưới đây



Khi $m=12$, ta sẽ chứng minh $m=12$ không thoả mãn. Thật vậy, có 4 hình chữ nhật nằm ở bốn góc của hình vuông. Xem hình vẽ dưới đây



Mỗi cạnh hình vuông được chia thành hai cạnh có tổng bằng 12. Tuy nhiên vì hai đoạn độ dài 1 và 6 không có cạnh tương ứng để tổng bằng 12.

Điều này có nghĩa là hình chữ nhật ở giữa phải là hình 1×6. Suy ra $\begin{cases}12-(a_1+a_3)=6\\12-(a_2+a_4)=1\end{cases}$

Từ đó ta tìm được $a_1+a_3=6, a_2+a_4=11$. Suy ra (a_1,a_3) là $(2,4)$ hoặc $(4,2)$; còn (a_2,a_4) là $(3,8)$ hoặc $(8,3)$. Không mất tổng quát có thể giả sử $(a_1,a_3)=(2,4)$. Nhưng khi đó $b_4=12-a_3=8$, tức là cạnh có độ dài 8 xuất hiện hai lần, trái với yêu cầu bài toán.

Bài 59 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Sư Phạm năm học 2024 – 2025)

Giả sử ta có quy tắc * mà với mỗi cặp số nguyên dương $(a;b)$, ta luôn xác định được chỉ một số nguyên dương tương ứng kí hiệu $a*b$ sao cho ba điều kiện sau được thỏa mãn:

- $a*a=a$ với mọi số nguyên dương a;
- $a*b=b*a$ với mọi số nguyên dương a và b;
- $a*b=(a-b)*b$ với mọi số nguyên dương $a>b$.

a) Tính giá trị $16*2024$.

b) Chỉ ra một quy tắc * thỏa mãn ba điều kiện trên.

Lời giải:

a) Từ giả thiết, dễ thấy với $a>kb$, với k nguyên dương thì

$a*b=(a-b)*b=(a-2b)*b=\cdots=(a-kb)*b$

Sử dụng kết quả này với chú ý $2024=126\cdot16+8$, ta được

$16*2024=2024*16=(2024-126\cdot16)*16=8*16=16*8=8*8=8$

b) Ta sẽ chứng minh với a,b là hai số nguyên dương bất kỳ thì $a*b=(a,b)$

trong đó (a,b) là ước chung lớn nhất của hai số a và b, là một quy tắc của phép toán * thỏa mãn yêu cầu đề bài. Thật vậy, hiển nhiên $a*a=(a,a)=a$ và $a*b=(a,b)=(b,a)=b*a$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $(a,b)=(a-b,b)$

Đặt $m=(a,b)$ và $n=(a-b,b)$. Ta thấy rằng

- Cả hai số a,b đều chia hết cho m nên $a-b$ và b cũng chia hết cho m. Suy ra $(a-b,b)$ chia hết cho m, hay n chia hết cho m.
- Cả hai số $a-b,b$ đều chia hết cho n nên $a-b+b=a$ và b cũng chia hết cho n. Suy ra (a,b) chia hết cho n, hay m chia hết cho n.

Như vậy $(a,b)=(a-b,b)$. Từ đây, ta suy ra, với $a>b$ thì $a*b=(a,b)=(a-b,b)=(a-b)*b$

Tóm lại, $a*b=(a,b)$ là một quy tắc của phép toán $*$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Tóm lại, $a*b=(a,b)$ là một quy tắc của phép toán $*$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài 60 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng vuông kích thước 8×8 được chia thành 8 hàng, 8 cột, 64 ô vuông đơn vị có cùng kích thước. Ta lát kín bảng đó bằng các domino màu đen và domino màu trắng (mỗi domino như thế là hình gồm 2 ô vuông đơn vị có chung cạnh) thỏa mãn ba điều kiện sau:

i) Mỗi domino phủ đúng 2 ô vuông đơn vị của bảng;

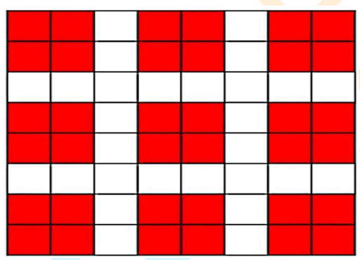
ii) Hai domino không cùng phủ một ô vuông đơn vị của bảng;

iii) Mọi hình vuông gồm 4 ô vuông đơn vị của bảng đều có ít nhất một ô vuông đơn vị được phủ bởi một domino màu đen.

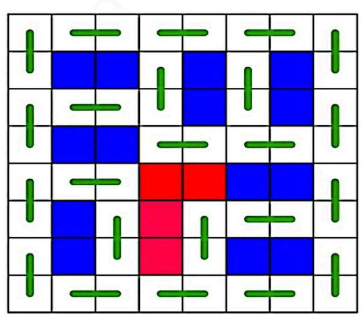
Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách lát bảng ban đầu thỏa mãn ba điều kiện trên mà trong cách lát đó ta sử dụng đúng k domino màu đen.

Lời giải:

Xét các bảng con 2×2 được đánh dấu như hình vẽ bên dưới.



Trong mỗi bảng con sẽ có ít nhất một ô vuông được tô màu đen. Do đó, số miếng domino màu đen cần sử dụng không ít hơn 9, tức $k\geq9$. Mặt khác, với $k=9$, cách lát sau thỏa mãn yêu cầu đề bài (các đoạn thẳng màu xanh lá cây là các vị trí lát các miếng domino màu trắng).



Vậy $k_{\min}=9$.

Bài 61 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên x và y thỏa mãn $2x^2+2xy+3y=4y^2+3$

b) Cho các số nguyên dương x,y và số nguyên tố p thỏa mãn $\dfrac{p}{(2x+y)^2}=\dfrac{x-y}{p}$. Chứng minh $p=3y+2$.

Lời giải:

a) Ta có: $4x^2+4xy+y^2=9y^2-6y+1+5$

$$(2x+y)^2=(3y-1)^2+5$$

$$(2x-2y+1)(2x+4y-1)=5$$

Do x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau

TH1: $\begin{cases}2x-2y+1=1\\2x+4y-1=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-2y=0\\2x+4y=6\end{cases}\Rightarrow x=y=1$

Tương tự với các trường hợp $(5;1);(-1;-5);(-5;-1)$ ta được các nghiệm $(x,\ y)$ thỏa mãn là $(-2;1)$

Vậy hệ phương trình có 2 cặp nghiệm $(x,\ y)$ thỏa mãn là $(-2;1)$ và $(1;1)$

b) Rõ ràng $x\neq y\Rightarrow p^2=(x-y)(2x+y)^2$

Từ đó p^2 chia hết cho $(2x+y)^2$ nên p chia hết cho $2x+y$

Vì x,y nguyên dương nên $2x+y\geq 3\Rightarrow 2x+y=p$

Thay vào $p^2=(x-y)(2x+y)^2\Rightarrow x-y=1\Rightarrow x=y+1$

Vì vậy $p=2x+y=2(y+1)+y=3y+2$ và ta có điều phải chứng minh.

Bài 62 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho a,b và c là các số nguyên dương thỏa mãn $\dfrac{a-b^2}{b}=a(a-c^2)$. Chứng minh $b=c$.

Lời giải:

Ta có: $c^2=\dfrac{a^2b+b^2-a}{ab}\Rightarrow a^2b+b^2-a\,\vdots\,ab\Rightarrow b^2-a\,\vdots\,ab\Rightarrow a\,\vdots\,b$

Vì vậy tồn tại số nguyên dương k sao cho $a=bk$.

Lúc này ta có được $b^3k+b^2-bk\,\vdots\,b^2k\Rightarrow b^2k+b-k\,\vdots\,bk$

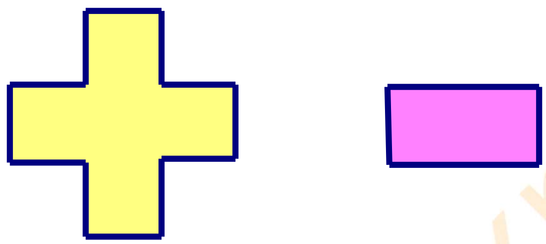
Do đó $b-k\,\vdots\,bk\Rightarrow\begin{cases}b\,\vdots\,k\\k\,\vdots\,b\end{cases}\Rightarrow k=b$. Vì vậy $a=b^2\Rightarrow a-c^2=0\Rightarrow a=c^2\Rightarrow kb=c^2\Rightarrow b^2=c^2\Rightarrow b=c$..

Bài 63 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông kích thước $n\times n$ và hai loại miếng ghép hình "dấu cộng", "dấu trừ" như hình dưới. Ta cần phủ kín bảng ô vuông đã cho bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép, các miếng ghép không được chồng lên nhau. Biết rằng mỗi ô vuông nhỏ của các miếng ghép chồng khít với một ô vuông nhỏ trong bảng và miếng ghép "dấu trừ" có thể xoay 90°.

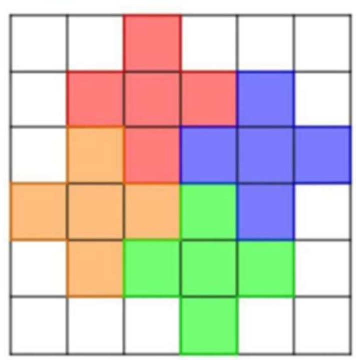
a) Chỉ ra một cách phủ kín thỏa mãn yêu cầu trên với $n=6$.

b) Tìm tất cả giá trị của n để bảng ô vuông kích thước $n\times n$ có thể được phủ kín bằng cách sử dụng cả hai loại miếng ghép trên.



Lời giải:

a) Ta có cách phủ kín bảng trong trường hợp $n=6$ như sau: (phần màu trắng được ghép bởi các "dấu trừ")



b) Tô màu bảng $n\times n$ như hình bàn cờ thì một "dấu trừ" sẽ luôn phủ 1 ô trắng, 1 ô đen, một "dấu cộng" luôn phủ 4 trắng, 1 đen hoặc 4 đen, 1 trắng

Gọi số "dấu trừ" được sử dụng là a, số "dấu cộng" 4 trắng – 1 đen và 4 đen – 1 trắng lần lượt được sử dụng là $b,\ c$.

Khi đó:

+ Số ô trắng được phủ là: $a+4b+c$

+ Số ô đen được phủ là: $a+b+4c$

Mà bảng tô theo hình bàn cờ, nên hiệu số ô trắng trừ số ô đen trong bảng luôn thuộc $\{-1,0,1\}$ nên $3(b-c)\in\{-1,0,1\}$

Do đó $b=c$

Dẫn đến tổng số ô trong bảng là $2a+10b$, là một số chẵn, hay n phải chẵn.

Với $n=2,\ n=4$ dễ thấy không thể phủ được.

Vì $n=6$ phủ được nên với n chẵn, $n\geq 8$ bất kì, ta chỉ cần phủ bảng con 6×6 ở một góc như ý 1), phần còn lại phủ bởi các "dấu trừ" là xong

Vậy để bảng có thể phủ được thì n chẵn và $n\geq 6$.

Bài 64 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán - Tin – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p có dạng $4k^4+1$ với k là một số tự nhiên

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để n^2+1 là ước số của $Q = 1.2.3\ldots n$.

Lời giải:

a) Ta có: $p=4k^4+1=(2k^2-2k+1)(2k^2+2k+1)$

Vì p là một số nguyên tố và $(2k^2-2k+1)\leq(2k^2+2k+1)$ nên $2k^2-2k+1=1\Rightarrow k\in\{0;1\}$

Thử lại, ta được $k=1$ và $p=5$

Vậy có duy nhất một số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài là $p=5$.

b) Ta chọn $n=2k^2$ với k chia 5 dư 1, $k\geq 6$. Khi đó $n^2+1=4k^4+1=\left(2k^2-2k+1\right)\left(\dfrac{2k^2+2k+1}{5}\right)\cdot 5$

Các số $2k^2-2k+1,\dfrac{2k^2+2k+1}{5},5$ là các số nguyên phân biệt bé hơn $n=2k^2$. Do đó n^2+1 là ước của $1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 65 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán - Tin – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

Cho tập A gồm 2025 số tự nhiên liên tiếp. Một tập con B của A được gọi là tập con có tính chất "nodiv" nếu hai phần tử $a,\ b\ (a>b)$ bất kì thuộc tập B đều thỏa mãn điều kiện $a+b$ không chia hết cho $a-b$.

a) Chỉ ra một tập con B của A có tính chất "nodiv" mà B có đúng 675 phần tử

b) Nếu B là một tập con của A có tính chất "nodiv" thì B có thể có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

Lời giải:

a) Đặt $A=\{n,n+1,...,n+2024\}$, với n là số tự nhiên

Xét các trường hợp sau:

+ TH1: n chia hết cho 3

Xét tập hợp $B=\{n+1,n+4,n+7,...,n+2023\}$

Tập này có 675 phần tử và thỏa mãn điều kiện

b) Ta chứng minh tập B có nhiều nhất 675 phần tử

Thật vậy, giả sử tập B có không ít hơn 676 phần tử

Ta chia tập A thành các nhóm nhỏ như sau

$\{n,n+1,n+2\}$

$\{n+3,n+4,n+5\}$

....

$\{n+2022,n+2023,n+2024\}$

Có tất cả 675 nhóm và hai số a_i,a_j phân biệt bất kỳ ở mỗi nhóm đều thỏa mãn a_i+a_j chia hết cho a_i-a_j. Vì tập B có không ít hơn 676 phần tử nên tồn tại hai phần tử của tập B thuộc cùng một nhóm nhỏ, hai phần tử này sẽ không có tính chất "nodiv", mâu thuẫn

Như vậy tập B có không quá 675 phần tử.

Mặt khác, cách xây dựng tập B như ở câu a thỏa mãn yêu cầu bài toán

Vậy tập B có nhiều nhất 675 phần tử.

Bài 66 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số nguyên tố p,q thỏa mãn $p(p-1)=q(q^2-1)$.

Lời giải:

Từ giả thiết, do $q+1>1$ và $p(p-1)=q(q^2-1)$ $\Rightarrow p(p-1)>q(q-1)\Rightarrow p>q$

Lại có: $q(q-1)(q+1)\,\vdots\, p$, mà p là số nguyên tố, nên có ít nhất 1 trong 3 số $q,q-1,q+1$ chia hết cho p.

Mặt khác, do $p > q \geq 2 \Rightarrow 0 < q-1 < q < q+1 \leq p$

Suy ra $q+1 = p \Rightarrow q = 2; p = 3$ (do p,q đều là số nguyên tố).

Thử lại thỏa mãn, ta kết luận bài toán có nghiệm duy nhất $(p;q) = (3;2)$.

Bài 67 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

Cho một mảnh giấy hình vuông. Mảnh giấy này được chia thành hai mảnh giấy bằng một đường cắt thẳng. Lấy một trong hai mảnh có được, ta lại làm như trên nhiều lần. Hỏi số lần cắt ít nhất phải là bao nhiêu để có thể nhận được 100 đa giác 20 cạnh.

Lời giải:

Trước tiên ta đưa ra một số nhận xét sau (trong phòng thi bạn đơn giản chỉ cần lấy thước cắt giấy nháp là sẽ thấy nha):

Nhận xét 1: Mỗi nhát cắt, số mảnh giấy tăng đúng 1. Mỗi mảnh giấy được cắt ra đều là một đa giác lồi. Điều này hiển nhiên, cẩn thận có thể chứng minh bằng quy nạp.

Nhận xét 2: Mỗi nhát cắt, tổng số cạnh của tất cả các mảnh giấy tăng lên tối đa 4.

Điều này suy ra từ nhận xét 1, ta thấy một đường cắt chỉ đi qua tối đa 2 cạnh của mảnh giấy đa giác lồi, thêm cạnh sinh ra từ đường cắt được tính 2 lần, thì chỉ có tối đa 4 cạnh tăng thêm.

Từ 2 điều trên, ta biết rằng qua k lần cắt, thì sẽ có đúng $k+1$ mảnh giấy và tối đa $4+4k$ cạnh trong tất cả các mảnh giấy.

Vậy để có 100 đa giác 20 cạnh, ta cần số lần cắt $k \geq 99$, và đồng thời

sẽ có ít nhất $k+1-100 = k-99$ đa giác khác ngoài 100 đa giác 20 cạnh đang xét. Ta có bất đẳng thức: $4+4k \geq 100 \cdot 20 + 3(k-99) \Rightarrow k \geq 1699$.

Đến đây, ta chỉ ra cách cắt, không quá phức tạp như sau. Với đa giác n cạnh, ta cắt đường đi qua 2 cạnh kề nhau, sẽ sinh ra được đa giác $n+1$ cạnh và 1 tam giác. Theo cách này, sau 16 bước cắt đầu, ta ra được 1 đa giác 20 cạnh và 16 tam giác. Mỗi lần sau, ta dùng 17 bước cắt sẽ tạo ra thêm được 1 đa giác 20 cạnh. Tức cuối cùng sẽ cần: $16 + 17 \cdot 99 = 1699$, thỏa mãn dấu bằng. Vậy cần ít nhất 1699 bước cắt để thỏa mãn bài toán.

Bài 68 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+2y)(x-y)+5x+4y=-1$.

Lời giải:

Ta có: $(x+2y)(x-y)+5x+4y=-1 \Rightarrow (x+2y)(x-y)+3(x+2y)+2(x-y)=-1$

$\Rightarrow (x-y+3)(x+2y+2)=5$

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên: $(x-y+3;x+2y+2)=\{(5;1),(1;5),(-5;-1),(-1;-5)\}$.

TH1: $\begin{cases}x-y+3=5\\x+2y+2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$ (Thỏa mãn)

TH2: $\begin{cases}x-y+3=1\\x+2y+2=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ (Không thỏa mãn)

TH3: $\begin{cases}x-y+3=-5\\x+2y+2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-19}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\end{cases}$ (Không thỏa mãn)

TH4: $\begin{cases}x-y+3=-1\\x+2y+2=-5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\y=-1\end{cases}$ (Thỏa mãn)

Vậy $(x;y)=\{(1;-1),(-5;-1)\}$.

Bài 69 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}+\overline{ba}$ là số chính phương.

Lời giải : Đặt $A=\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11(a+b)$.

Vì $\overline{ab}$ là số có hai chữ số nên $a\neq 0$. Ta thấy $1\leq a+b\leq 18$.

Giả sử A là số chính phương, thì khi phân tích A thành các thừa số nguyên tố thì số mũ các thừa số nguyên tố phải chẵn, tức là giả sử $A=p_1^{a_1}\cdot p_2^{\,a_2}\dots p_i^{a_i}$, với các $p_1,p_2,\dots p_i$ là có số nguyên tố thì $a_1,a_2,\dots,a_i$ đều là số chẵn.

Do đó, nếu A không chia hết cho 11 thì số mũ của số nguyên 11 khi phân tích sẽ là 1, mẫu thuẫn.

Khi đó $a+b\,\vdots\,11\Rightarrow a+b=11$. Hay ta có các cặp giá trị sau thoả mãn:

$(a;b)\in\{(2;9);(3;8);(4;7);(5;6);(6;5);(7;4);(8;3);(9;2)\}$

Thử lại ta thấy thoả mãn. Vậy có số có hai chữ số $\overline{ab}$ cần tìm là:

$\overline{ab}\in\{29;38,47,56,65,74,83,92\}$.

Bài 70 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

Cho hai đống sỏi, A và B. Nếu chuyển 100 viên sỏi từ đống A sang đống B thì số sỏi ở đống B gấp đôi số sỏi ở đống A. Còn nếu chuyển một số viên sỏi từ đống B sang đống A thì số sỏi ở đống A gấp 6 lần số sỏi ở đống B. Hỏi đống A có ít nhất bao nhiêu viên sỏi?

Lời giải:

Gọi số viên sỏi ở hai đống A, B là x, y. Theo bài ta có:

Nếu chuyển 100 viên từ đống A sang đống B thì số sỏi ở B gấp 2 lần số sỏi ở A, tức là $2(x-100)=y+100\,(1)$.

Nếu chuyển một số viên từ đống B (giả sử là a) sang đống A thì số sỏi ở A gấp 6 lần số sỏi ở B, tức là $x+a=6(y-a)$ (2)

Từ (1)(2), có:

$$\begin{cases}2x-y=300\\6y-x=7a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=300\\12y-2x=14a\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6y-7a=6\cdot\dfrac{14a+300}{11}-7a=\dfrac{7a+1800}{11}\\y=\dfrac{14a+300}{11}=27+a+\dfrac{3(a+1)}{11}\end{cases}$$

Vì y nguyên nên $\dfrac{3(a+1)}{11}$ nguyên hay $a+1\,\vdots\,11$, do $\text{UCLN}(11,3)=1$.

Suy ra $a=11k-1,\ k$ là số nguyên dương. Khi đó: $\begin{cases}x=7k+163\geq 7.1+163=170\\y=14k+26\end{cases}$.

Khi $k=1$. Thử lại với $x=170, y=40$ thoả mãn.

Vậy số sỏi ít nhất của đống A là: 170.

Bài 71 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho a, b là các số hữu tỉ. Chứng minh $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ là số hữu tỉ

Lời giải:

Ta có: $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}=\sqrt{a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4}=\sqrt{(a^2-ab+b^2)^2}=\left|a^2-ab+b^2\right|$

Do $a,\ b$ hữu tỉ nên a^2, ab, b^2 hữu tỉ. Suy ra $\left|a^2-ab+b^2\right|$ hữu tỉ.

Vậy $\sqrt{(a^2+b^2)(a-b)^2+a^2b^2}$ hữu tỉ.

Bài 72 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $a^3=2b^4+a^2b$. Chứng minh a chia hết cho b.

Lời giải:

Trước hết, ta sẽ chứng minh a và b cùng tính chẵn lẻ

Thật vậy, nếu a là số lẻ thì dễ dàng chứng minh được b cũng là số lẻ

Nếu a là số chẵn thì từ $2b^4 = a^2(a-b) \vdots 4$ ta thu được b là số chẵn

Ta có: $a^3 = 2b^4 + a^2b = b(2b^3 + a^2)$ nên a^3 chia hết cho b

Ngoài ra, do $\frac{a-b}{2} = \left(\frac{b^2}{a}\right)^2$ và a, b cùng tính chẵn lẻ nên $b^2 \vdots a$

Vì vậy a và b có cùng tập ước nguyên tố, giả sử đó là $\{p_1, p_2, ..., p_n\}$

Đặt $a = p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n}, b = p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$. Trong đó α_1, β_i là các số nguyên dương

Ta có: $\prod_{i=1}^{n} p_i^{3\alpha_i} = a^3 = 2b^4 + a^2b = 2\prod_{i=1}^{n} p_i^{4\beta_i} + \prod_{i=1}^{n} p_i^{2\alpha_i+\beta_i}$ (1)

Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n\}$ sao cho $\alpha_i < \beta_i$, chia hai vế của đẳng thức (1) cho $p_i^{3\alpha_i}$,

$$\prod_{1\le j\le n, j\ne i} p_j^{3\alpha_j} = 2p_i^{4\beta_i - 3\alpha_i} \prod_{1\le j\le n, j\ne i} p_j^{4\beta_j} + p_i^{\beta_i - \alpha_i} \prod_{1\le j\le n, j\ne i} p_j^{2\alpha_j+\beta_j} \quad (2)$$

Ta nhận thấy vế trái của (2) không chia hết cho p_i do $(\beta_i > \alpha_i)$

Từ đó, ta có điều mâu thuẫn. Vì vậy $\alpha_i \ge \beta_i$, với mọi $i = \overline{1, n}$. Vậy a chia hết cho b.

Bài 73 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p;\, q)$ sao cho $p^2 + q^2 + 4pq + 52$ là số chính phương.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;\, y)$ sao cho $5^x - 1 = 4y^4$

Lời giải:

a) Giả sử trong hai số p, q không có số nào bằng 2

Khi đó p, q là các số nguyên tố nên p, q lẻ, do đó $p^2 \equiv 1 \pmod 4, q^2 \equiv 1 \pmod 4$

Cho nên $p^2 + q^2 + 4pq + 52 \equiv 2 \pmod 4$ không thể là số chính phương, vì số chính phương chia 4 chỉ có thể có số dư là 0 hoặc 1.

Do đó phải có một số bằng 2, giả sử đó là p.

Khi đó $q^2 + 8q + 56$ là số chính phương

Đặt $q^2 + 8q + 56 = t^2 (t \in \mathbb{N})$

Suy ra $(t - q - 4)(t + q + 4) = 40$

Vì vậy, $t-q-4$ và $t+q+4$ đều là ước của 40, hơn nữa $t-q-4 < t+q+4$

Và $t-q-4$, $t+q+4$ cùng tính chẵn lẻ

Xét bảng sau

$t-q-4$	-20	-10	2	4
$t+q+4$	-2	-4	20	10
t	-11	-7	11	7
q	5	-1	5	-1
	Loại	Loại	Thỏa mãn	Loại

Vậy $(p,q)\in\{(2;5);(5;2)\}$

b) Ta có: $5^x-1=4y^4 \Rightarrow 5^x=4y^4+1 \Rightarrow 5^x=(2y^2+1)^2-(2y)^2 \Rightarrow 5^x=(2y^2-2y+1)(2y^2+2y+1)$

Do đó $\begin{cases}2y^2-2y+1=5^a\\2y^2+2y+1=5^b\end{cases}(a,b\in\mathbb{N},a<b,a+b=x)$

Suy ra $(2y^2+2y+1)\,\vdots\,(2y^2-2y+1)$

Hay $4y\,\vdots\,(2y^2-2y+1)$ (1)

Thử với $y=1,\ 2,\ 3$ được cặp $(x,\ y)=(1,1)$ thỏa mãn

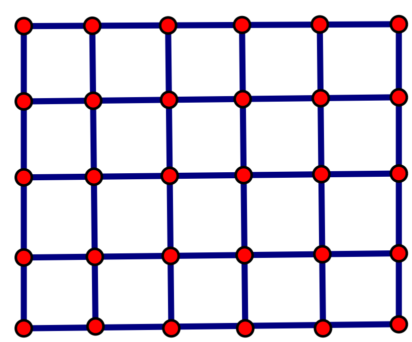
Với $y>3$ thì $4y-(2y^2-2y+1)=-2y(y-3)-1<0$

Mà $2y^2-2y+1$ và $4y$ đều dương nên $2y^2-2y+1$ không là ước của $4y$ mâu thuẫn (1)

Vậy $(x,\ y)=(1,\ 1)$.

Bài 74 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho một bảng 4×5 ô vuông gồm 4 hàng và 5 cột (như hình vẽ bên). Ta ghi các số tự nhiên từ 1 đến 20 vào các ô, mỗi ô chứa đúng một số và các số ở mỗi ô là khác nhau. Gọi d_i với $i\in\{1;2;3;4\}$ là hiệu của số lớn nhất và số nhỏ nhất ở hàng thứ i. Gọi D là giá trị lớn nhất trong các giá trị d_1,d_2,d_3,d_4. Ta gọi D là "độ lệch" của hàng



a) Hãy chỉ ra một cách ghi để $D=4$

b) Hãy chỉ ra một cách ghi để $d_1=d_2=d_3=d_4=5$

c) Với mỗi cách ghi bất kì, ta tiến hành sắp xếp lại các số trong bảng theo quy luật: ở mỗi cột, các số được xếp giảm dần (số trên cùng là lớn nhất, số dưới cùng là nhỏ nhất). Chứng minh sau khi sắp xếp lại thì "độ lệch" của bảng mới không lớn hơn "độ lệch" của bảng cũ.

Lời giải:

a) Dễ thấy, bảng sau có $D = 4$:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{matrix}$$

b) Dễ thấy, bảng sau có $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 5$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 5 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 16 \\ 15 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{matrix}$$

c) Ta đánh số của bảng ban đầu như sau:

$$\begin{matrix} b_1 & b_2 & \dots & b_5 \\ b_6 & b_7 & \dots & b_{10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{16} & b_{17} & \dots & b_{20} \end{matrix}$$

Sau khi sắp xếp lại bảng, ta có bảng như sau:

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_5 \\ a_6 & a_7 & \dots & a_{10} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{16} & a_{17} & \dots & a_{20} \end{matrix}$$

Gọi $d_i^{'}$ là hiệu số giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng i ở bảng ban đầu;

d_i là hiệu số giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng i ở bảng lúc sau;

$D' = \max\left\{d_i^{'}\right\}$, với $i = 1,2,3,4$; $D = \max\left\{d_i\right\}$ với $i = 1,2,3,4$

Giả sử hàng j có d_j lớn nhất ở bảng lúc sau, gọi hai số lớn nhất và nhỏ nhất lần lượt là a_l, a_k.

Không mất tính tổng quát, ta cố định cột chứa số lớn nhất của hàng j (cột chứa số a_l) và xếp lại vị trí của các số còn lại sao cho giống với ban đầu.

Khi đó, giả sử số a_k được thay vị trí bởi số b_k. Do sự sắp xếp chỉ diễn ra trên cùng một cột nên a_k với b_k cùng cột.

Nếu $b_k < a_k$ thì $a_l - a_k < a_l - b_k$. Suy ra $d_j = a_l - a_k < a_l - b_k \le d'_j \le D'$.

Nếu $b_k > a_k$. Giả sử b_k cùng hàng với b_l mà b_l cùng cột với a_l, ta có $b_l > a_l > a_k$

Gọi $d_l^{'}$ là hiệu giữa số lớn nhất và số nhỏ nhất của hàng chứa b_l, ta có:

$$d_j = a_l - a_k < b_l - b_k \le d_l^{'} \le D'$$

Nếu a_k giữ nguyên vị trí thì $a_l - a_k = d_j = d_j^{'} \le D'$

Vậy nếu hàng j có d_j lớn nhất thì $d_j \le D'$

Điều này cho thấy $D \le D'$. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 75 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.

Lời giải:

Vì $6n-13$ là số nguyên tố và $n \in \mathbb{N}$ nên $n \ge 3$.

Ta có $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên $2n-1 = a^2$; $3n+1 = b^2$ với $a;b \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2b^2 - 3a^2 = 5 \qquad (1)$

Ta có $6n-13 = 3(2n-1) - 10 = 3a^2 - 2(2b^2 - 3a^2) = 9a^2 - 4b^2 = (3a-2b)(3a+2b)$ (2)

Vì $6n-13$ là số nguyên tố, mà $3a-2b \le 3a+2b$ nên từ (2) ta có $3a-2b = 1 \Rightarrow b = \dfrac{3a-1}{2}$

Thay $b = \dfrac{3a-1}{2}$ vào (1) ta được $2\left(\dfrac{3a-1}{2}\right)^2 - 3a^2 = 5 \Rightarrow 3a^2 - 6a - 9 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=3 \end{array}\right.$

Vì $a \in \mathbb{N}$ nên $a=-1$ (loại)

Nếu $a=3$ thì $b=4, n=5$ và $6n-13 = 17$ (thỏa mãn).

Vậy $n=5$ là giá trị cần tìm.

Bài 76 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số tự nhiên x sao cho giá trị của biểu thức x^2+3x+5 là một số chính phương.

Lời giải:

Giả sử x^2+3x+5 là một số chính phương.

Khi đó tồn tại số $a\in\mathbb{N}$ sao cho $x^2+3x+5=a^2 \Rightarrow 4x^2+12x+20=4a^2$

$\Rightarrow (2x+3)^2-4a^2=-11 \Rightarrow (2x+2a+3)(2x-2a+3)=-11$

Vì $x,a\in\mathbb{N}$ nên $2x+2a+3\geq 3$

Do đó: $\begin{cases}2x+2a+3=11\\2x-2a+3=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+a=4\\x-a=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\a=3\end{cases}$

Vậy $x=1$ thì x^2+3x+5 là số chính phương.

Bài 77 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025)

Trên bàn có 2024 viên kẹo, hai bạn A và B tiến hành trò chơi lấy viên kẹo. Hai bạn A và B thay phiên nhau lấy kẹo, đến lượt chơi mỗi bạn sẽ lấy 1, 2, 3 hoặc 4 viên kẹo. Bạn nào không còn kẹo để lấy sẽ thua cuộc. Nếu A đi trước thì bạn nào sẽ là người đó chiến thuật để luôn thắng trong trò chơi và chiến thuật đó như thế nào?

Lời giải:

Ta thấy khi trên bàn còn 1, 2, 3 hoặc 4 viên kẹo thì người chơi đến lượt mình chơi sẽ chắc chắn thắng và chắc chắn thua nếu trên bàn còn 5 viên kẹo.

Tiếp tục quan sát, ta được khi trên bàn còn 6, 7, 8 hoặc 9 viên kẹo thì người chơi đến lượt mình chơi sẽ chắc chắn thắng và chắc chắn thua nếu trên bàn còn 10 viên kẹo.

Từ đó ta được người đến lượt mình chơi chắc chắn thua nếu trên bàn còn 5, 10, 15,..., 2020 viên kẹo. Do đó nếu ở lượt chơi đầu bạn A lấy 4 viên kẹo, trên bàn sẽ còn 2020 viên kẹo do đó bạn B sẽ chắc chắn thua. Vậy bạn A luôn có chiến thuật để luôn thắng.

Bài 78 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – thành phố Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả số nguyên x,y thỏa mãn $x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0$.

Lời giải:

$x^2-2y^2-xy+2x+5y-5=0 \Rightarrow (x-2y+3)(x+y-1)=2$

Ta có các trường hợp sau

$\begin{cases}x-2y+3=2\\x+y-1=1\end{cases}$; $\begin{cases}x-2y+3=1\\x+y-1=2\end{cases}$; $\begin{cases}x-2y+3=-2\\x+y-1=-1\end{cases}$; $\begin{cases}x-2y+3=-1\\x+y-1=-2\end{cases}$

Giải các hệ trên ta các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn là $(1;1)$ và $(-2;1)$.

Bài 79 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – thành phố Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như hình bên

Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau. Trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng ba số còn lại trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất của M.

Lời giải:

Gọi a_1, a_2, a_3, a_4 là các số lớn nhất trong các cột $1,2,3,4$ và gọi $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ là các số trong các ô còn lại. Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + \ldots + b_{12}$.

Do các số trong 16 ô vuông đôi một khác nhau nên $b_1 + b_2 + \ldots + b_{12} \geq 1 + 2 + \ldots + 12 = 78$

và $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq M + (M-1) + (M-2) + (M-3) = 4M - 6$

Suy ra $4M - 6 \geq 78 \Rightarrow M = 21$. Xây dựng một bảng ô vuông ứng với $M = 21$

1	8	12	21
7	9	20	4
10	19	3	6
18	2	5	11

Bài 80 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số nguyên dương n và các số nguyên tố p, thỏa mãn: $n + 7p = (n-p)^3$

Lời giải:

Giả sử n là số nguyên dương và p là số nguyên tố thoả mãn yêu cầu đề bài

Khi đó: $n + 7p = (n-p)^3$ (1)

Từ (1) ta có: $8p = (n-p)^3 - (n-p) = (n-p-1)(n-p)(n-p+1)$ (2)

Vì là tích của ba số nguyên liên tiếp, nên vế phải của (2) là một số chia hết cho 3. Do đó, $8p$ chia hết cho 3. Mà $(8,3) = 1$, nếu p chia hết cho 3. Suy ra, $p = 3$ (do p là số nguyên tố).

Thay $p = 3$ vào (2), ta được: $(n-4)(n-3)(n-2) = 24$ (3)

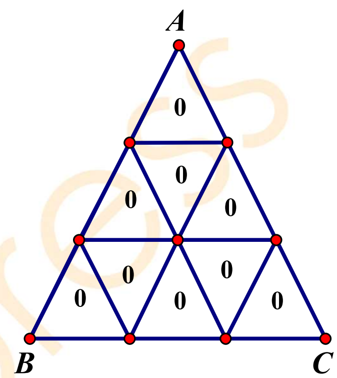
Do 24 có duy nhất cách phân tích thành tích của ba số nguyên liên tiếp, là $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, nên từ (3) suy ra $n - 4 = 2$. Do đó, $n = 6$.

Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, $n = 6$ và $p = 3$ thỏa mãn tất cả các yêu cầu của đề bài.

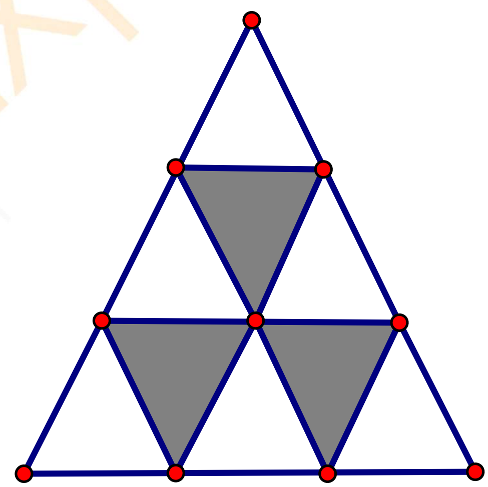
Vậy, tất cả các số n, p cần tìm theo yêu cầu đề bài là: $n = 6$ và $p = 3$.

Bài 81 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Chia tam giác đều ABC thành 9 tam giác con, rồi điền vào mỗi tam giác con một số 0, như ở hình bên. Cho phép thay đổi các số trong tam giác ABC, theo quy tắc: Mỗi lần, lấy hai số nằm ở hai tam giác con có chung cạnh, rồi tăng mỗi số lên 1 đơn vị, hoặc giảm mỗi số đi 1 đơn vị. Hỏi nhờ việc thực hiện liên tiếp một số hữu hạn làm phép thay đổi số nói trên, ta có thể làm cho 9 số nằm trong tam giác ABC là 9 số tự nhiên liên tiếp, từ 4 đến 12, hay không? Vì sao?



Lời giải:



Tô ba tam giác con bởi màu đen, như ở hình bên; các tam giác con còn lại được coi là có màu trắng.

Khi đó, do hai tam giác con bất kì có cạnh chung là hai tam giác khác màu, nên từ nội dung của phép thay đổi số suy ra, hiệu giữa tổng các số nằm ở các tam giác đen và tổng các số nằm ở các tam giác trắng không thay đổi, sau mỗi lần thực hiện phép thay đổi số. Mà ở thời điểm ban đầu, trong các số nằm ở các tam giác đen bằng tổng các số nằm ở các tam giác trắng (vì cùng bằng 0), nên ở mọi thời điểm, tổng các số nằm ở các tam giác đen bằng tổng các số nằm ở các tam giác trắng (*)

Giả sử, sau khi thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép thay đổi đã cho, 9 số nằm trong tam giác ABC là 9 số tự nhiên liên tiếp, từ 4 đến 12. Khi đó, kí hiệu s là tổng các số nằm ở các tam giác đen và 1 là tổng các số nằm ở tam giác trắng, theo (*), ta có: $10 + 11 + 12 \geq s = 1 \geq 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

Là điều vô lí (vì $10 + 11 + 12 = 33$ và $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$).

Vì vậy, câu trả lời cho câu hỏi của bài ra là "không".

Bài 82 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tiền Giang năm học 2024 – 2025)

Cho hai số nguyên p, q thỏa mãn đẳng thức $p^2 + q^2 = 2(3pq - 4)$ (*)

a) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p,q là bội của 3

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa mãn (*)

Lời giải:

a) Chứng minh rằng có ít nhất một trong hai số p,q là bội của 3

- Giả sử trong hai số p,q không có số nào chia hết cho 3.
- Khi đó p^2,q^2 chia 3 dư 1. Suy ra:

  +) p^2+q^2 chia 3 dư 2;

  +) Trong khi vế phải $2(3pq-4)=6pq-9+1$ chia 3 dư 1, suy ra vô lý
- Do đó trong hai số p,q phải có ít nhất một số là bội của 3.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên (p,q) thỏa mãn (*)

Do vai trò của p,q như nhau, không mất tính tổng quát, giả sử q là bội của 3. Do q nguyên tố nên $q=3$

Khi đó từ (*) ta có $p^2+9=2(9p-4)\Rightarrow p^2-18p+17=0\Rightarrow p=1$ hoặc $p=17$

Do p nguyên tố nên $p=17$.

Vậy các cặp số $(p;q)$ thỏa mãn (*) là $(p;q)\in\{(17;3);(3;17)\}$.

Bài 83 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – trường THPT Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Với mỗi số tự nhiên n, đặt $a_n=(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n$.

a) Chứng minh rằng $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$, với mọi $n\in\mathbb{N}$.

b) Tìm tất cả n sao cho $a_n\,\vdots\,4$.

c) Tìm tất cả n sao cho $a_n\,\vdots\,14$.

Lời giải:

a) Ta có : $4a_{n+1}-a_n=4(2+\sqrt{3})^{n+1}+4(2-\sqrt{3})^{n+1}-(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n$

$$=(2+\sqrt{3})^n\left(8+4\sqrt{3}-1\right)+(2-\sqrt{3})^n\left(8-4\sqrt{3}-1\right)$$

$$=(2+\sqrt{3})^n(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^2$$

$$=(2+\sqrt{3})^{n+2}+(2-\sqrt{3})^{n+2}=a_{n+2}$$

Vậy $a_{n+2}=4a_{n+1}-a_n$, với mọi $n\in\mathbb{N}$. Ta được điều phải chứng minh.

b) Ta tính được $a_0=2$ và $a_1=4$ đều là số chẵn. Ta chứng minh a_n là số chẵn với mọi $n\in\mathbb{N}$. Thật vậy, giả sử a_k và a_{k+1} là số chẵn $(k\in\mathbb{N})$. Do $a_{k+2}=4a_{k+1}-a_k$ nên suy ra a_{k+2} là số chẵn. Vậy theo quy nạp suy ra a_n là số chẵn với mọi $a\in\mathbb{N}$.

Ta có a_0 chia cho 4 dư 2 và $a_1 \vdots 4$. Ta chứng minh a_n chia cho 4 dư 2 với mọi n chẵn và a_n chia hết cho 4 với mọi n lẻ. Thật vậy, giả sử a_{2k} chia cho 4 dư 2 và a_{2k+1} chia hết cho $4(k\in\mathbb{N})$.

- Do $a_{2k+2}=4a_{2k+1}-a_{2k}\equiv-2\equiv2\pmod 4$ nên suy ra a_{2k+2} chia cho 4 dư 2.
- Do $a_{2k+3}=4a_{2k+2}-a_{2k+1}\equiv-a_{2k+1}\equiv0\pmod 4$ nên a_{2k+3} chia hết cho 4.

Từ đó theo nguyên lý quy nạp, ta suy ra a_n chia cho 4 dư 2 nếu n chẵn và a_n chia hết cho 4 nến n lẻ. Do đó tất cả giá trị n thỏa mãn a_n chia hết cho 4 là $n=2k+1(k\in\mathbb{N})$.

c) Với mọi $n\geq4$, ta có $a_{n+4}=4a_{n+3}-a_{n+2}=4(4a_{n+2}-a_{n+1})-a_{n+2}=15a_{n+2}-4a_{n+1}\equiv a_{n+2}-4a_{n+1}$

$$=4a_{n+1}-a_n-4a_{n+1}\equiv-a_n\pmod 7$$

- Với $n=4k(k\in\mathbb{N})$, ta được $a_{4k}\equiv-a_{4k-4}\equiv\cdots\equiv(-1)^k a_0\equiv(-1)^k\cdot2\pmod 7$
- Với $n=4k+1(k\in\mathbb{N})$, ta được $a_{4k+1}\equiv-a_{4k-3}\equiv\cdots\equiv(-1)^k a_1\equiv(-1)^k\cdot4\pmod 7$
- Với $n=4k+2(k\in\mathbb{N})$, ta được $a_{4k+2}\equiv-a_{4k-2}\equiv\cdots\equiv(-1)^k a_2\equiv(-1)^k\cdot14\equiv0\pmod 7$
- Với $n=4k+3(k\in\mathbb{N})$, ta được $a_{4k+3}\equiv-a_{4k-1}\equiv\cdots\equiv(-1)^k a_3\equiv(-1)^k\cdot52\pmod 7$

Vậy $a_n \vdots 7$ khi và chỉ khi $n=4k+2(k\in\mathbb{N})$, kết hợp với a_n chẵn với mọi $n\in\mathbb{N}$, ta kết luận $a_n \vdots 14$ khi và chỉ khi $n=4k+2(k\in\mathbb{N})$.

Bài 84 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – Toán trường THPT Năng Khiếu năm học 2024 – 2025)

Ghi 31 số nguyên dương $a_1 < a_2 < \cdots < a_{31}$ lên 31 thẻ.

a) Biết rằng tổng các số trên 16 thẻ bất kỳ luôn lớn hơn tổng 15 thẻ còn lại. Chứng minh $a_1 \ge 226$.

b) Biết rằng 31 thẻ này ghi các số từ 1 đến 31. Chia 31 thẻ này vào 2 hộp gọi là A và B, biết trong hộp A thì tổng hai số bất kỳ không là số chính phương. Chứng minh tồn tại 4 thẻ trong hộp B, chia ra làm 2 cặp và mỗi cặp có tổng là số chính phương.

Lời giải:

a) Vì $a_1 < a_2 < \ldots < a_{31}$ nên $\begin{cases} a_{17} - a_2 \ge 15 \\ a_{18} - a_3 \ge 15 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{31} - a_{16} \ge 15 \end{cases}$

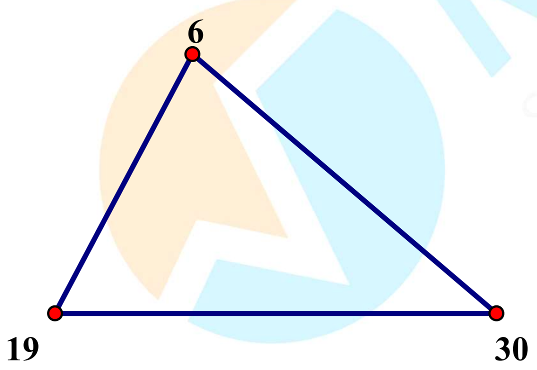
Suy ra $(a_{17} + a_{18} + \ldots + a_{31}) - (a_2 + a_3 + \ldots a_{16}) \ge 225$ hay $a_{17} + a_{18} + \ldots + a_{31} \ge (a_2 + a_3 + \ldots a_{16}) + 225$

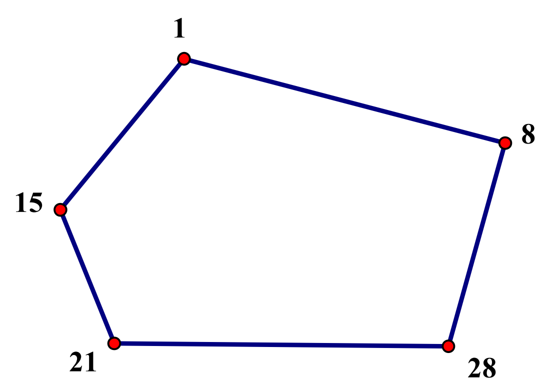
Theo giả thiết, ta có: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{16} > a_{17} + a_{18} + \ldots + a_{31}$

Do đó: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_{16} > (a_2 + a_3 + \ldots a_{16}) + 225$

Suy ra $a_1 > 225$ hay $a_1 \ge 226$. Ta được điều phải chứng minh.

b) Xét bộ 3 số $(6, 19, 30)$ sau: bất kỳ 2 trong 3 số này có tổng là số chính phương, nên A chỉ chứa được nhiều nhất 1 số trong 3 số này, dẫn đến B phải chứa ít nhất 2 trong 3 số trên. Nói cách khác, B chứa một cặp có tổng là số chính phương. Ở hình dưới ta nối 2 số lại với nhau nếu nó có tổng là số chính phương.





Xét tiếp bộ 5 số $(1, 8, 28, 21, 15)$: ta có 2 số kề nhau luôn có tổng là số chính phương và $(1, 15)$ cũng có tổng là số chính phương. Khi đó, A không thể nào chứa nhiều hơn 2 số trong 5 số trên, vì ngược lại A phải chứa hai số nằm trên một cạnh trong 5 cạnh trên, mâu thuẫn với giả sử A không chứa 2 số có tổng là số chính phương.

Như vậy, A chỉ chứa nhiều nhất 2 trong 5 số trên và tương ứng B chứa ít nhất 3 số. Lập luận tương tự như trên, B phải chứa một cạnh trong 5 cạnh trên. Vì bộ 5 số $(1, 8, 28, 21, 15)$ khác với bộ 3 số trước $(6, 19, 30)$, ta tìm được thêm một cặp số trong B có tổng là số chính phương.

Bài 85 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

Giải phương trình nghiệm nguyên: $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$.

Lời giải:

Cách 1: Ta có: $2x^2 + 4xy + 3x + 6y = 4$, với $x, y \in \mathbb{Z}$

$$2x(x+2y) + 3(x+2y) = 4$$

$$(x+2y)(2x+3) = 4 \quad (1)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x+2y, 2x+3 \in \mathbb{Z}$ và $2x+3$ là số lẻ. Nên ta có bảng sau:

$2x+3$	1	-1
$x+2y$	4	-4
x	-1	-2
y	$\frac{5}{2}$	-1
	Loại	Thỏa mãn

Do đó phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x;\ y)$ là $(-2;\ -1)$

Bài 86 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương x và y thỏa mãn $\text{lcm}(x, y) + 2.\text{gcd}(x, y) = 61$

(với $\text{lcm}(a,b)$, $\text{gcd}(a,b)$ lần lượt là ký hiệu bội chung nhỏ nhất, ước chung lớn nhất của hai số nguyên dương a và b).

Lời giải:

Cần tìm $x, y \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $\text{lcm}(x, y) + 2.\text{gcd}(x, y) = 61 \quad (1)$

Đặt $d = \text{gcd}(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = dm \\ y = dn \end{cases} \ (m, n \in \mathbb{N}^*; \text{gcd}(m, n) = 1) \Rightarrow \text{lcm}(x, y) = dmn$

Vậy $(1) \Rightarrow dmn + 2d = 61 \Rightarrow d(mn+2) = 61 \Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ mn + 2 = 61 \end{cases}$

(vì 61 là số nguyên tố, $d = gcd(x,\ y)$ nên $d \in \mathbb{N}^*$ và do $m, n \in \mathbb{N}^*$ nên $mn + 2 > 2$)

Vậy $mn = 59 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m = 1 \\ n = 59 \end{cases} \\ \begin{cases} m = 59 \\ n = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 59 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 59 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Do đó các số nguyên dương cần tìm là $x=1$ và $y=59$, $x=59$ và $y=1$.

Bài 87 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

a) Tìm số nguyên tố p để $n = 2^p + p^2$ là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng với mọi cách chọn 7 số bất kỳ trong 12 số nguyên dương đầu tiên, ta luôn tìm được hai số a và b trong 7 số đó sao cho $ab+1$ là số chính phương.

Lời giải:

a) Ta có: $n = 2^p + p^2$, với p là số nguyên tố.

Nếu $p=3$ thì $n = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố

Nếu $p=2$ thì $n = 2^2 + 2^2 = 8$ không là số nguyên tố

Nếu số nguyên tố $p \geq 5 \Rightarrow p = 2m+1, m \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^p = 2^{2m+1} = 2.4^m$ có số dư bằng 2 trong phép chia cho 3 (vì 4^m có số dư bằng 1 trong phép chia cho 3, $\forall m \in \mathbb{N}$)

Vì số nguyên tố $p \geq 5$ nên $p = 3k \pm 1, k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow p^2 = (3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$ có số dư bằng 1 trong phép chia cho 3

Vậy $n = (2^p + p^2) \vdots 3$ (do $p \geq 5$) hay n không là số nguyên tố, với mọi số nguyên tố $p \geq 5$.

Do đó $p=3$ thỏa mãn bài toán

b) Gọi A là tập hợp gồm 12 số nguyên tương đầu tiên.

Vậy A được chia thành 6 cặp số gồm $\{1;3\};\{5;7\};\{9;11\};\{2;4\};\{6;8\};\{10;12\}$

Nhận xét: Nếu n là số nguyên dương thì $n(n+2)+1$ là số chính phương

(vì $n(n+2)+1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$)

$\Rightarrow a \neq b$ là hai số trong mỗi cặp số nói trên thì $ab+1$ là số chính phương.

Theo nguyên lý Dirichlet, trong mọi cách chọn 7 số bất kì trong 12 số nguyên dương đầu tiên thì luôn tồn tại ít nhất 2 số thuộc một trong 6 cặp số đó.

Áp dụng tính chất ở nhận xét trên ta có điều phải chứng minh.

Cách 2: Gọi $A = \{1;2;...;12\}$ là tập hợp gồm 12 số nguyên dương đầu tiên

Theo nguyên lý Dirichlet, trong mọi cách chọn 7 số bất kì trong A thì luôn tồn tại ít nhất 2 số là hai số lẻ liên tiếp hoặc hai số chẵn liên tiếp.

Mà 1.3 + 1 = 4 là số chính phương, 3.5 + 1 = 16 là số chính phương, ..., 9.11 + 1 = 100 là số chính phương.

2.4 + 1 = 9 là số chính phương, 4.6 + 1 = 25 là số chính phương, ..., 10.12 + 1 = 121 là số chính phương. Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 88 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

Khi bạn Hòa hỏi số căn cước công dân của bạn Bình, bạn Bình cho biết: "Số đó dạng $\overline{06820900abcd}$ với $\overline{abcd}$ là số chính phương và $\overline{ab}-\overline{cd}=1$". Em hãy giúp bạn Hoà xác định số căn cước công dân của bạn Bình.

Lời giải:

Đặt $x=\overline{cd}$. Ta có: $\overline{ab}=x+1$.

Do $\overline{abcd}$ là số chính phương nên tồn tại t sao cho $t^2=\overline{abcd}$

Do $1000\le\overline{abcd}<10000$ nên $31<t<100$

Khi đó: $t^2=\overline{abcd}=100\cdot(x+1)+x=101x+100\Rightarrow 101x=t^2-100=(t-10)(t+10)$

Ta thấy $t-10<100$ mà $t^2-100=101x\,\vdots\,101$

$\Rightarrow t+10\,\vdots\,101$ mà $31<t<100$ nên $t+10=101\Rightarrow t=91\Rightarrow x=t-10=81$. Vậy $\overline{abcd}=8281$.

Bài 89 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên (x,y) của phương trình: $xy-x+3y=6$.

Lời giải:

Ta có: $xy-x+3y=6\Rightarrow x(y-1)+3(y-1)=3\Rightarrow(x+3)(y-1)=3$.

Vì x,y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

$x+3$	3	1	-3	-1
x	0	-2	-6	-4
$y-1$	1	3	-1	-3
y	2	4	0	-2

Vậy $(x,y)=(-6;0),(-4;-2),(-2;4),(0;2)$.

Bài 90 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025)

Cho tập hợp $A=\{201;203;\ldots;2021;2023\}$ gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp A sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

Lời giải:

Xét các cặp số (a,b) trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là:

$(2023;265),(2021;267),(2019;269),\ldots,(1147;1141),(1145;1143)$ (*)

Số các cặp số (a,b) trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là: $\dfrac{2023-1145}{2}+1=440$.

Số các số trong tập hợp A mà không có số ghép đôi để tổng bằng 2288 là: $912-2.440=32$.

Chọn ra 441 số từ (*), theo Dirichlet tồn tại một nhóm chứa 2 số có tổng bằng 2288.

Vậy cần chọn ít nhất $441+32=473$ số từ tập hợp A luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288.

Bài 91 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương x,y để A,B đồng thời là các số chính phương biết $A=x^2+y+1$ và $B=y^2+x+4$.

Lời giải:

Với $x\ge y>0$ thì $x^2\le A=x^2+y+1\le x^2+x+1<x^2+2x+1=(x+1)^2$, do đó không tồn tại x,y để $A=x^2+y+1$ là số chính phương.

Với $y>x>0\Rightarrow y^2<B=y^2+x+4<y^2+y+4<y^2+4y+4=(y+2)^2$

$\Rightarrow y^2<B<(y+2)^2\Rightarrow B=(y+1)^2\xrightarrow{B=y^2+x+4}(y+1)^2=y^2+x+4\Rightarrow x=2y-3$, thay vào

$A=x^2+y+1=(2y-3)^2+y+1=4y^2-11y+10$

Vì A là số chính phương nên $A=k^2\ (k\ge 0)\Rightarrow k^2=4y^2-11y+10\Rightarrow 4y^2-11y+10-k^2=0$ (*)

Phương trình (*) ẩn y có $\Delta=16k^2-39$

Để A là số chính phương thì Δ là số chính phương, suy ra $\Delta=a^2,(a\ge 0)\Rightarrow 16k^2-39=a^2$

$\Rightarrow (4k-a)(4k+a)=39=1.39=3.13$. Do $\begin{cases}4k+a\ge 0\\4k+a\ge 4k-a\end{cases}$ nên ta có

$$(4k-a)(4k+a)=39 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4k-a=1\\4k+a=39\end{cases}\\ \begin{cases}4k-a=3\\4k+a=13\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=19\\k=5\end{cases}\\ \begin{cases}a=5\\k=2\end{cases}\end{array}\right..$$

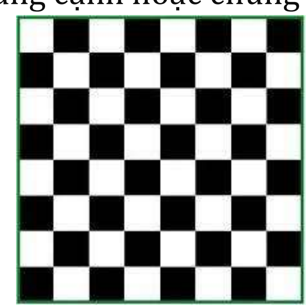
Với $k=5 \Rightarrow y=-1<0$ (loại)

Với $k=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$

Vậy chỉ có một cặp số $(x;y)=(1;2)$ thỏa mãn bài toán.

Bài 92 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025)

Cho bàn cờ vua có 64 ô vuông như hình vẽ. Trong mỗi ô vuông của bàn cờ ghi ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 10 đồng thời hai số được ghi trong hai ô vuông có chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trên bàn cờ tồn tại một số xuất hiện ít nhất 11 lần.



Lời giải:

Bàn cờ vua có kích thước 8×8;

Xét hình vuông kích thước 2×2 (gồm bốn hình vuông nhỏ kích thước 1×1), trong hình vuông này, mỗi hình vuông 1×1 luôn có chung cạnh hoặc chung đỉnh với ba hình vuông còn lại, nên trong 4 số nguyên dương được viết trong bốn hình vuông nhỏ này chỉ có nhiều nhất một số chẵn (vì nếu có 2 số chẵn sẽ mâu thuẫn với giả thiết nguyên tố cùng nhau) và cũng có nhiều nhất một số chia hết cho 3. Do đó trong bốn hình vuông 1×1 này chắc chắn có ít nhất hai số lẻ không chia hết cho 3,

Bàn cờ vua có kích thước 8×8 có $64:4=16$ hình vuông 2×2 không giao nhau, nên có ít nhất $2\times 16=32$ số lẻ không chia hết cho 3.

Trong 9 số nguyên dương nhỏ hơn 10 chỉ có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là $1,5,7$ nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong ba số $1,5,7$ xuất hiện ít nhất $\left[\frac{32}{3}\right]+1=11$ lần.

Bài 93 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2xy+3x+y=0$.

Lời giải:

Ta có: $2xy+3x+y=0 \Rightarrow 4xy+6x+2y=0$

$$2x(2y+3)+(2y+3)=3$$

$$(2x+1)(2y+3)=3$$

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $2x+1\in\mathbb{Z},\ 2y+3\in\mathbb{Z}$

Do đó ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}2x+1=1\\2y+3=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

TH2: $\begin{cases}2x+1=3\\2y+3=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$

TH3: $\begin{cases}2x+1=-1\\2y+3=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=-3\end{cases}$

TH4: $\begin{cases}2x+1=-3\\2y+3=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$

Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa mãn là: $(0;0),(1;-1),(-1;-3),(-2;-2)$.

Bài 94 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa năm học 2024 – 2025)

a) Cho $p,q\ (p>q>5)$ là 2 số nguyên tố. Chứng minh p^8-q^4 chia hết cho 240.

b) Tìm tất cả số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa mãn $n^{2044}+4n+p^2$ chia hết cho np.

Lời giải:

a) Ta sẽ chứng minh p^8-q^4 chia hết cho $3,5,16$.

Thật vậy, vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $p\equiv 1,2\ (\text{mod } 3)$ và $p\equiv 1,2,3,4(\text{mod } 5)$*

Do đó: $p^2\equiv 1^2;2^2\equiv 1;4\equiv 1(\text{mod} 3);p^4\equiv 1^4;2^4;3^4;4^4\equiv 1;16;81;256\equiv 1(\text{mod } 5)$

Tương tự: $q^2\equiv 1(\text{mod } 3)$ và $q^4\equiv 1(\text{mod } 5)$

$\Rightarrow p^8\equiv q^4\equiv 1(\text{mod } 3)$ và $p^8\equiv q^4\equiv 1(\text{mod } 5)$

$\Rightarrow p^8-q^4$ chia hết cho $3,5$ (1)

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p lẻ, do đó $p^2\equiv 1(\text{mod } 8)$

Thật vậy, ta có $p^2-1=(p-1)(p+1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp, do đó một trong hai số này chia hết cho 4. Vì vậy, p^2-1 chia hết cho 8.

Từ đây ta có thể viết $p^2 = 8k+1\left(k\in\mathbb{N}^*\right) \Rightarrow p^4 = 64k^2+16k+1\equiv 1\left(\text{mod } 16\right)$

Tương tự: $q^4\equiv 1\left(\text{mod } 16\right)\Rightarrow p^8\equiv q^4\equiv 1\left(\text{mod } 16\right)\Rightarrow p^8-q^4$ chia hết cho 16. (2)

Từ (1), (2) suy ra: p^8-q^4 chia hết cho 240.

Chú ý : *ở đây quy ước $a\equiv b,c\left(\text{mod } d\right)$ tức là a có thể đồng dư với b,c modulo d.

b) Ta có: $n^{2024}+4n+p^2 \vdots np \Rightarrow n^{2024}+4n+p^2 \vdots n \Rightarrow p^2 \vdots n \Rightarrow n\in\left\{1,p,p^2\right\}$.

TH1: $n=1\Rightarrow 5+p^2 \vdots p\Rightarrow 5 \vdots p\Rightarrow p=5$, thử lại thấy thỏa mãn.

TH2: $n=p\Rightarrow p^{2024}+4p+p^2 \vdots p^2\Rightarrow 4p \vdots p^2\Rightarrow 4 \vdots p\Rightarrow p=2\Rightarrow n=p=2$, thử lại thấy thoả mãn.

TH3: $n=p^2\Rightarrow p^{4048}+5p^2 \vdots p^3\Rightarrow 5p^2 \vdots p^3\Rightarrow 5 \vdots p\Rightarrow p=5\Rightarrow n=p^2=25$, thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy $\left(n,p\right)\in\left\{\left(1;5\right);\left(2;2\right);\left(25;5\right)\right\}$

Bài 95 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa năm học 2024 – 2025)

Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_{2024}$ là đa giác đều 2024 đỉnh, trong đó đỉnh A_{2009} được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh. Đổi màu các đỉnh của đa giác theo quy tắc: Mỗi lần chọn 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật rồi đổi màu đồng thời 4 đỉnh ấy (đỏ thành xanh và xanh thành đỏ). Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy, có thể thu được kết quả đỉnh A_{2009} và A_{997} cùng màu hay không ? Vì sao ?

Lời giải:

Vì $A_1A_2\ldots A_{2024}$ là đa giác đều nên đa giác này nội tiếp đường tròn đường kính tâm O, Gọi A_k là điểm đối xứng với A_1 qua tâm O:

- Đường kính A_1A_k chia đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2024}$ thành 2 phần bằng nhau, số lượng các đỉnh 2 bên là 1011 đỉnh. Suy ra, $A_k\equiv A_{1013}$

Từ đó, ta có quy luật về đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1A_2\ldots A_{2024}$:

- A_1 đối xứng với A_{1013} qua O: đường kính A_1A_{1013}
- Đường kính A_2A_{1014}

...

- Đường kính A_kA_{k+1012}

Suy ra: A_{997} đối xứng với A_{2009} qua tâm O,

Nghĩa là, một hình chữ nhật có đỉnh A_{997} thì A_{2009} cũng là đỉnh của hình chữ nhật đó, Mà ban đầu, A_{997} được tô màu xanh, A_{2009} được tô màu đỏ. Vậy theo quy tắc đổi màu như trên thì A_{2009} và A_{997} không thể cùng màu sau một số hữu hạn lần đổi màu.

Bài 96 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025)

Hãy xác định n số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tổng của n số đó bằng 2024.

Lời giải:

Ta có: $S = 1+2+3+\ldots+n$ và $S = n+(n-1)+\ldots+1$.

Nên $2S = (n+1)n \Rightarrow S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Giả sử n số nguyên dương liên tiếp thỏa mãn yêu cầu đề bài bắt đầu từ số nguyên dương $k+1$.

Ta có: $(k+1)+(k+2)+\ldots+(k+n-1)+(k+n) = 2024$

$$nk + \frac{n(n+1)}{2} = 2024$$

$$2nk + n(n+1) = 4048$$

$$n(2k+n+1) = 2^4.23.11$$

Do $n,\ n+1$ có tính chẵn lẻ khác nhau nên n và $2k+n+1$ có tính chẵn lẻ khác nhau.

Do $n < 2k+n+1$ nên ta có các trường hợp sau:

i) $\begin{cases} n = 11 \\ 2k+n+1 = 368 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 11 \\ k = 178 \end{cases}$ (nhận)

ii) $\begin{cases} n = 16 \\ 2k+n+1 = 253 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 16 \\ k = 118 \end{cases}$ (nhận)

iii) $\begin{cases} n = 23 \\ 2k+n+1 = 176 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 23 \\ k = 76 \end{cases}$ (nhận)

Vậy các dãy số cần tìm là các dãy liên tiếp: 119, 120, ..., 134; 179, 180, ..., 189 và 77, 78, ..., 99.

Bài 97 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn phương trình sau $2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7$

Lời giải:

Ta có: $2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7$

$$(x+y)(2x-y) + 2(x+y) = 7$$

$$(x+y)(2x-y+2) = 7$$

Ta có các cách phân tích $7=7.1=1.7=\left(-7\right).\left(-1\right)=\left(-1\right).\left(-7\right)$. Do đó xét các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases}x+y=7\\2x-y+2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\end{cases}$ (thỏa mãn)	TH2: $\begin{cases}x+y=1\\2x-y+2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ (thỏa mãn)
TH4: $\begin{cases}x+y=-7\\2x-y+2=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-10}{3}\\y=\dfrac{-11}{3}\end{cases}$ (loại)	TH3: $\begin{cases}x+y=-1\\2x-y+2=-7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-10}{3}\\y=\dfrac{7}{3}\end{cases}$ (loại)

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)\in\left\{(2;5);(2;-1)\right\}$

Bài 98 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả cặp số nguyên $\left(x;y\right)$ thỏa mãn phương trình $6x^2-2y^2-xy+4x+2y=7$.

Lời giải:

Phương trình có dạng:

$$7=6x^2-2y^2-xy+4x+2y=\left(3x-2y\right)\left(2x+y\right)+2\left(2x+y\right)=\left(2x+y\right)\left(3x-2y+2\right)$$

Suy ra $\left(2x+y,3x-2y+2\right)\in U\left(7\right)=\left\{\pm1;\pm7\right\}$, ta xét các trường hợp:

$2x+y$	1	7	-1	-7
$3x-2y+2$	7	1	-7	-1
x	1	$\dfrac{13}{7}$	$\dfrac{-11}{7}$	$\dfrac{-17}{7}$
y	-1	$\dfrac{23}{7}$	$\dfrac{15}{7}$	$\dfrac{-15}{7}$
	Thỏa mãn	Loại	Loại	Loại

Vậy $\left(x;y\right)=\left(1;-1\right)$ là nghiệm duy nhất của phương trình

Bài 99 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $\sqrt{12n^2+1}$ là một số nguyên dương. Chứng minh $8\sqrt{12n^2+1}+8$ là một số chính phương.

Lời giải:

Vì n là số nguyên dương nên $12n^2+1$ là số chính phương lẻ, từ đó ta có thể đặt

$12n^2+1=(2k+1)^2,(k\in\mathbb{Z})\Rightarrow 12n^2=4k^2+4k\Rightarrow k(k+1)=3n^2$

Nhưng $(k;k+1)=1$ và phải có một trong hai số $k,k+1$ chia hết cho 3 nên ta có thể biểu diễn k và $k+1$ theo các trường hợp sau:

*) Nếu $\begin{cases}k=u^2\\k+1=3v^2\end{cases}$

Khi đó $3v^2-u^2=1\Rightarrow u^2=3v^2-1\equiv-1\equiv 2(\bmod 3)$ (vô lý vì số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1)

*) Nếu $\begin{cases}k=3v^2\\k+1=u^2\end{cases}$

Khi đó: $8\sqrt{12n^2+1}+8=8(2k+1)+8=16(k+1)=16u^2$ là số chính phương. Như vậy, $\sqrt{12n^2+1}$ nguyên thì $8\sqrt{12n^2+1}+8$ là một số chính phương. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 100 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

a) Chứng minh từ 5 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 3 số mà tổng của chúng chia hết cho 3 .

b) Chứng minh từ 161 số tự nhiên bất kì luôn tìm được 81 số mà tổng của chúng chia hết cho 81.

Lời giải:

a) Một số khi chia cho 3 sẽ có số dư là là $0;1;2$

TH1: Trong 5 số đó có đủ 3 số dư khi chia cho 3, khi đó ta chỉ cần chọn bộ 3 số có 3 số dư khác nhau khi chia cho 3 là thỏa mãn bài toán.

TH2: Trong 5 số đó chỉ có 2 số dư khi chia cho 3. Theo nguyên lí Dirichlet chỉ tồn tại ít nhất $\left[\frac{5}{2}\right]+1=3$ số có cùng số dư khi chia cho 3. Khi đó tổng 3 số có cùng số dư, khi chia cho 3 sẽ chia hết cho 3.

b) Trong 161 số tự nhiên đó, ta luôn chọn được 3 số mà tổng của chúng là a chia hết cho 3. Tương tự trong 158 số còn lại ta luôn chọn được 3 số mà tổng của chúng là a_2 chia hết cho 3, cứ lập luận như vậy ta thế được các tổng $a_1,a_2,\ldots,a_{53}$ chia hết cho 3.

Chứng minh tương tự câu 1 ta cũng thấy được trong 5 số chia hết cho 3 ta luôn chọn được 3 số có tổng chia hết cho 9, vì thế trong 53 số $a_1, a_2, \ldots, a_{53}$ ta chọn được 3 số mà tổng của chúng là b_1 chia hết cho 9, tương tự trong 50 số còn lại ta cũng chọn được 3 số có tổng là b_2 chia hết cho 9. Cứ tiếp tục như vậy ta cũng thu được các tổng $b_1 b_2 \ldots b_{12}$ chia hết cho 9.

Lập luận tương tự như trên từ các số $b_1, b_2, \ldots b_{12}$ ta cũng chọn được các tổng $c_1, c_2, \ldots c_5$ chia hết cho 27, và trong 5 số ta luôn chọn được tổng d của 3 số sao cho d chia hết cho 81, mà d là tổng của 81 số từ 161 số tự nhiên bất kì nên ta có thể kết thúc chứng minh.

Bài 101 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

a) Cho số nguyên a, biết a chia cho 3 dư 2 và a chia cho 7 dư 3. Tìm số dư khi a chia cho 21.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy = -4x + 2y + 1$.

Lời giải:

a) Vì a chia cho 7 dư 3 nên $a = 7k + 3, k \in \mathbb{Z}$. Đặt $k = 3t + r\,(t, r \in \mathbb{Z}; 0 \le r \le 2)$

Khi đó $a = 7\left(3t + r\right) + 3 = 21t + 7r + 3\ (t, r \in \mathbb{Z}; 0 \le r \le 2)$

Vì a chia cho 3 dư 2 nên $r = 2$.

Lúc đó $a = 21t + 14 + 3 = 21t + 17$. Vậy a chia cho 21 dư 17.

b) Ta có $x^2 - xy = -4x + 2y + 1 \Rightarrow x^2 + 4x - 1 = (x+2)y$.

$x = -2$ không thỏa mãn, suy ra $y = \dfrac{x^2 + 4x - 1}{x + 2} = x + 2 - \dfrac{5}{x+2}$

Suy ra được $x + 2$ là ước của 5.

Tìm được các nghiệm $(-7; -4), (-3; 4), (-1; -4), (3; 4)$.

Bài 102 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

Cho số nguyên $n \ge 6$. Xét một đa giác lồi n cạnh $A_1 A_2 \cdots A_n$. Người ta muốn kẻ một số đường chéo của đa giác sao cho các đường chéo này chia đa giác thành đúng k lục giác lồi không có điểm trong chung.

a) Với $n = 2022$ và $k = 505$, hãy chỉ ra một cách chia đa giác đó.

b) Với $n = 2023$ và $k = 505$, ta có thể chia đa giác được không? Hãy giải thích.

Lời giải:

a) Ta chia được như sau: Kẻ các đường chéo $A_1A_6, A_1A_{10}, \cdots, A_1A_{2018}$.

Khi đó đa giác này được chia thành $k = (2022-6):4+1 = 505$ miền lục giác.

b) Giả sử ta có thể chia đa giác lồi 2023 cạnh thành 505 lục giác lồi không có điểm trong chung bởi các đường chéo của nó. Gọi m là số giao điểm của các đường chéo nằm trong đa giác. Do mỗi đỉnh của lục giác lồi là đỉnh của đa giác đã cho hoặc là một trong m giao điểm của các đường chéo đã nêu nên tổng số đo tất cả các góc ở đỉnh của các lục giác này là

$$m \cdot 360^\circ + (2023-2)\cdot 180^\circ = 180^\circ(2m+2021).$$

Tổng số đo các góc ở đỉnh của 505 lục giác là $505 \cdot 4 \cdot 180^\circ$.

Ta có phương trình $180^\circ(2m+2021) = 505\cdot 4\cdot 180^\circ \Rightarrow m = -\dfrac{1}{2}$ (không thỏa mãn).

Vậy ta không thể thực hiện được với $n = 2023$ và $k = 505$.

Bài 103 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Cho ba số tự nhiên $a,\ b,\ c$ thỏa mãn $a > 1,\ b > 1,\ c > 1$ và $abc+1$ chia hết cho $ab-b+1$.

Chứng minh b chia hết cho a.

Lời giải:

Ta có: $(abc+1)-(ab-b+1) = b(ac-a+1)$

Vì $(abc+1)\vdots(ab-b+1)$ nên $b(ac-a+1)\vdots(ab-b+1)$

Vì $ab-b+1 = (a-1)b+1$ nên $ab-b+1$ và b là hai số nguyên tố cùng nhau.

Do đó $(1) \Rightarrow (ac-a+1)\vdots(ab-b+1)$ hay $(ac-a+1) = k\cdot(ab-b+1), k \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $ac-a+1 = a(c-1)+1 > 0$.

Suy ra $2(ab-b+1)-(ac-a+1) = ab-ac+ab-2b+a+1 = a(b-c)+(a-2)b+a+1 > 0$

Do đó $0 < ac-a+1 < 2(ab-b+1) \Rightarrow 0 < k.(ab-b+1) < 2(ab-b+1) \Rightarrow k = 1$

Từ (2) và (3) suy ra: $ac-a+1 = ab-b+1 \Rightarrow b = ab-ac+a = a(b-c+1) \Rightarrow b\vdots a$. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 104 (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – THPT Lê Quý Đôn TP Đà Nẵng năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn

$x^2 - kxy + y^2 + 1 = 0$

Lời giải:

Xét k để tồn tại bộ số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn phương trình.

Ta thấy ngay cặp $(x;\ y)$ thỏa mãn phương trình thì $xy > 0$.

Mà $(x;\ y)$ là nghiệm thì $(-x;-y)$ cũng là nghiệm

Và có thể kiểm tra $x, y \neq 0$

Vậy là phương trình có một bộ nghiệm $(x;\ y)$ mà $xy > 0$.

Xét $S = \{(x,y): x^2 - kxy + y^2 + 1 = 0; x, y > 0\}$

Do tập S khác tập rỗng nên ta có thể xét bộ $(x_0, y_0) \in S$ mà $x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát giả sử $x_0 \geq y_0$

Xét phương trình bậc hai ẩn x sau đây: $x^2 - x.ky_0 + y_0{}^2 + 1 = 0$

Phương trình này có một nghiệm là x_0 nên nó sẽ có thêm một nghiệm nữa là x_1 và theo định lý Vi-et thì $\begin{cases} x_0 + x_1 = ky_0 \\ x_0.x_1 = y_0^2 + 1 \end{cases}$

Do $x_0 + x_1$ là số nguyên nên x_1 là số nguyên

Do $x_0.x_1 > 0$ nên x_1 là số nguyên dương

Vậy $(x_0, x_1) \in S$

Do đó: $x_1 + y_0 \geq x_0 + y_0 \Rightarrow x_1 \geq x_0 \geq y_0$

Nếu $x_0 \geq y_0 + 1 \Rightarrow y_0^2 + y_0 \leq y_0^2 + 1 \Rightarrow y_0 \leq 1$

Từ đây thu được $y_0 = x_0 = 1$ và thu được $k = 3$.

Thử lại thì $k = 3$ có nghiệm $(x,\ y) = (1,1)$

Vậy $k = 3$ thỏa mãn

Nếu $x_1 = y_0 \Rightarrow x_1 = x_0 = y_0 \Rightarrow y_0^2 = y_0^2 + 1$ (vô lý)

Vậy $k = 3$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Bài 105 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm các số nguyên dương $x,\ y,\ z$ thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 27x^3+27x^2+10y=(x+3z)^3 \\ 27y^3+27y^2+10x=(y+3z)^3 \end{cases}$

Lời giải:

a) Không mất tính tổng quát, giả sử $x \ge y$

Từ giả thiết ta có: $27x^3+27x^2+10y$ là số lập phương

Mặt khác ta lại có $(3x)^3=27x^3<27x^3+27x^2+10y \le 27x^3+27x^2+10x<(3x+2)^3$

Nên $27x^3+27x^2+10y=(3x+1)^3$ hay $10y=9x+1$

Khi đó ta có: $27y^3+27y^2+10x=27y^3+27y^2+\dfrac{100y-10}{9}$

Theo giả thiết thì $27y^3+27y^2+10x$ là số lập phương nên $27y^3+27y^2+\dfrac{100y-10}{9}$ là số lập phương

Mặt khác ta lại có: $(3y)^3<27y^3+27y^2+\dfrac{100y-10}{9}<(3y+2)^3$

Nên $27y^3+27y^2+\dfrac{100y-10}{9}=(3y+1)^3$ hay $y=1$.

Kết hợp với $10y=9x+1$ ta được $x=1$

Thay trở lại giả thiết ta tìm được ngay $z=1$.

Vậy có duy nhất một bộ số $(x,\ y,\ z)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(1,\ 1,\ 1)$.

Bài 106 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho bảng ô vuông kích thước (2023×2023), ô vuông có kích thước (1×1) được gọi là ô vuông đơn vị. Mỗi ô vuông đơn vị của bảng được tô bằng một tròn hai màu đen hoặc trắng sao cho mỗi ô vuông đơn vị tô màu đen được kề với ít nhất ba ô vuông đơn vị tô màu trắng (hai ô vuông đơn vị có cạnh chung được gọi là kề nhau). Hỏi số ô vuông đơn vị được tô màu đen nhiều nhất là bao nhiêu?

Lời giải:

Bảng ô vuông đã cho có thể chia thành 1022121 bảng con kích thước 2×2

1011 bảng con kích thước 2×1 ở rìa phải của bảng đã cho

1011 bảng con kích thước 1×2 ở rìa bên dưới của bảng đã cho và một bảng con kích thước 1×1 ở góc dưới bên phải.

Ta thấy: Mỗi bảng con 2×2 có nhiều nhất hai ô vuông được tô màu đen (nếu có ba ô vuông được tô màu đen thì sẽ có một ô đen mà chỉ có không quá hai ô kề với nó được tô màu trắng, mâu thuẫn)

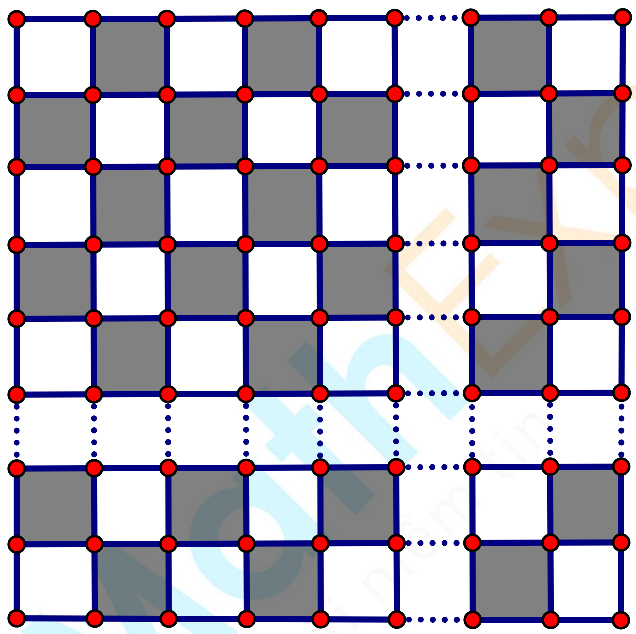
Mỗi bảng con 2×1 có nhiều nhất một ô vuông được tô màu đen (Nếu cả hai ô vuông đều được tô màu đen thì mỗi ô sẽ có không quá hai ô kề với nó được tô màu trắng, mâu thuẫn)

Mỗi bảng con 1×2 có nhiều nhất một ô vuông được tô màu đen (Nếu cả hai ô vuông đều được tô màu đen thì mỗi ô sẽ có không quá hai ô kề với nó được tô màu trắng, mâu thuẫn)

Bảng con 1×1 ở góc dưới bên phải chỉ có hai ô kề với nó nên được tô màu trắng.

Như vậy, số ô vuông được tô màu đen không vượt quá $1022121.2+1011+1011=2046264$

Mặt khác, cách tô màu sau thỏa mãn yêu cầu bài toán.



Vậy số ô vuông được tô màu đen nhiều nhất là 2046264.

Bài 107 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Tìm số thực x thỏa mãn $x+\sqrt{2024}$ và $\frac{185}{x}-\sqrt{2024}$ đều là số nguyên.

Lời giải:

Đặt $\begin{cases} x+\sqrt{2024}=m(1) \\ \frac{185}{x}-\sqrt{2024}=n(2) \end{cases}, m,n\in\mathbb{Z}$

Từ (1) ta được $x=m-\sqrt{2024}$, thay vào (2) ta được

$$\frac{185}{m-\sqrt{2024}}-\sqrt{2024}=n \text{, biến đổi ta được } 2209-mn=(m-n)\sqrt{2024} \qquad (3)$$

TH1: $m-n=0$, khi đó phương trình (3) có dạng: $2209-m^2=0 \Rightarrow m=\pm 47$ (thỏa mãn)

TH2: $m-n\neq 0$, khi đó ta có $\dfrac{2209-mn}{m-n}=\sqrt{2024}$ (4)

Do $m,n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{2209-mn}{m-n}\in\mathbb{Z}$ và $\sqrt{2024}$ là số vô tỉ, nên không tồn tại m, n thỏa mãn

Vậy $x\in\left\{47-\sqrt{2024};-47-\sqrt{2024}\right\}$

Bài 108 (Đề thi vào 10 – Toán chung – THPT Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho 45 số $a_1;a_2;...;a_{45}$ sao cho mỗi số chỉ nhận một trong ba giá trị 0, 2, 3. Biết

$(a_1-2)^2+(a_2-2)^2+...+(a_{45}-2)^2=65$; $(a_1-3)^3+(a_2-3)^3+...+(a_{45}-3)^3=-280$. Trong 45 số trên, có bao nhiêu số nhận giá trị 0?

Lời giải:

Gọi x, y, z lần lượt là số ghi giá trị a nhận giá trị $0,2,3$ $(x,y,z\in\mathbb{N};x,y,z\le 45)$

Ta có: $\begin{cases} x+y+z=45 \\ x(0-2)^2+y(2-2)^2+z(3-2)^2=65 \\ x(0-3)^3+y(2-3)^3+z(3-3)^3=-280 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=45 \\ 4x+0y+z=65 \\ -27x-y+0z=-280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=45 \\ 4x+z=65 \\ -27x-y=-280 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=10 \\ y=10 \\ z=25 \end{cases}$

Vậy có 10 số nhận giá trị 0.

Bài 109 (Đề thi vào 10 hệ chuyên - Toán (hệ chuyên Nga – Pháp – Trung) – tỉnh Hoà Bình năm học 2024 – 2025) Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình: $x^2+5y^2=12y-2xy+1$

Lời giải

$x^2+5y^2=12y-2xy+1 \Rightarrow (x+y)^2+(2y-3)^2=10=1^2+3^2$

Vì $x;y\in\mathbb{N}^*$ nên $x+y>1$. Ta có bảng sau:

$x+y$	1	3	1	3
$2y-3$	3	1	-3	-1
x	-2 (loại)	1	1	2
y	3	2	0 (loại)	1

Vậy $(x;y)\in\left\{(1;2);(2;1)\right\}$

Bài 110 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – Trường THPT Chuyên Lam Sơn năm học 2024 – 2025)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+2y^2-5xy+2x-y-3=0$.

Lời giải

Ta có $2x^2+2y^2-5xy+2x-y-3=0 \Rightarrow (x-2y+1)(2x-y)=3$

Xét các trường hợp sau:

* TH1 : $\begin{cases} x-2y+1=-3 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-4 \\ 2x-y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$ (không thoả mãn)

*TH2 : $\begin{cases} x-2y+1=3 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=2 \\ 2x-y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases}$ (nhận)

*TH3 : $\begin{cases} x-2y+1=1 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=0 \\ 2x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ (nhận)

*TH4 : $\begin{cases} x-2y+1=-1 \\ 2x-y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-2 \\ 2x-y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{4}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$ (không thoả mãn)

Vậy phương trình có các nghiệm nguyên là $(0;-1),(2;1)$.

Bài 111 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho phương trình $x^3-(m-1)x^2-2x+2m-9=0$ có nghiệm nguyên.

Lời giải

Ta có: $x^3-(m-1)x^2-2x+2m-9=0$

$$(x^3-2x)-\left[(m-1)x^2-2(m-1)\right]=7$$

$$(x^2-2)(x-m+1)=7$$

Vì $7=1.7=(-1).(-7)$ nên để phương trình có nghiệm nguyên thì có thể xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2-2=1 \\ x-m+1=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=x-6 \\ \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ m=-6+\sqrt{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ m=-6-\sqrt{3} \end{cases} \end{array}\right.$.

Các giá trị $m=-6+\sqrt{3}$, $m=-6-\sqrt{3}$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: $\begin{cases} x^2-2=7 \\ x-m+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=x \\ \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=3 \\ x=3 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-3 \\ x=-3 \end{cases} \end{array}\right.$.

Vậy $m=3$, $m=-3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 3: $\begin{cases} x^2-2=-1 \\ x-m+1=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=x+8 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=9 \\ x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=7 \\ x=-1 \end{cases} \end{array}\right.$

Vậy $m=7$, $m=9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp 4: $\begin{cases} x^2-2=-7 \\ x-m+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=-5 \\ m=x+2 \end{cases}$.

Trường hợp này, không có giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Két luận: $m=-3$, $m=3$, $m=7$, $m=9$ là tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Bài 112 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Toán, Tin – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(x+2y)(x-y)+5x+4y=-1$.

Lời giải

Ta có: $(x+2y)(x-y)+5x+4y=-1$

$(x+2y)(x-y)+3(x+2y)+2(x-y)=-1$

$(x-y+3)(x+2y+2)=5$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên: $(x-y+3; x+2y+2)=\{(5;1),(1;5),(-5;-1),(-1;-5)\}$.

Xét các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} x-y+3=5 \\ x+2y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

TH2: $\begin{cases} x-y+3=1 \\ x+2y+2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (Không thỏa mãn)

TH3: $\begin{cases} x-y+3=-5 \\ x+2y+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-19}{3} \\ y=\dfrac{5}{3} \end{cases}$ (Không thỏa mãn)

TH4: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ x+2y+2=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-1 \end{cases}$ (Thỏa mãn)

Vậy $(x;y)=\{(1;-1),(-5;-1)\}$.

Bài 113 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chuyên – Chuyên Hùng Vương tỉnh Gia Lai năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x,\ y)$ của phương trình $x^2-4xy+5y^2=2(x-y+1)$

Lời giải

Ta có phương trình: $x^2-4xy+5y^2=2(x-y+1) \Rightarrow x^2-4xy+5y^2-2x+2y-2=0$

$\Rightarrow x^2-2x(2y+1)+5y^2+2y-2=0$ (*)

Phương trình $(*)$ là phương trình bậc 2 theo ẩn x.

Ta có : $\Delta'=(2y+1)^2-(5y^2+2y-2)=-y^2+2y+3$. Để phương trình $(^*)$ có nghiệm thì: $\Delta' \geq 0$

$\Rightarrow -y^2+2y+3 \geq 0$

$-(y-1)^2+4 \geq 0$

$$(y-1)^2 \le 4$$
$$|y-1| \le 2$$
$$-2 \le y-1 \le 2$$
$$-1 \le y \le 3$$

Mà $y \in \mathbb{Z}$ nên $y \in \{-1;0;1;2;3\}$

- Với $y=-1$ thay vào $\left(^*\right)$ ta được: $x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1$. (chọn)
- Với $y=0$ thay vào $\left(^*\right)$ ta được: $x^2-2x-2=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{3} \\ x=1-\sqrt{3} \end{array}\right.$ (loại, vì $x \notin \mathbb{Z}$)
- Với $y=1$ thay vào $\left(^*\right)$ ta được: $x^2-6x+5=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=5 \end{array}\right.$ (chọn)
- Với $y=2$ thay vào $\left(^*\right)$ ta được: $x^2-10x+22=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=5+\sqrt{3} \\ x=5-\sqrt{3} \end{array}\right.$ (loại, vì $x \notin \mathbb{Z}$)
- Với $y=3$ thay vào $\left(^*\right)$ ta được: $x^2-14x+49=0 \Rightarrow x=7$ (chọn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: $(x;y)=(1;1);(5;1);(-1;-1);(7;3)$

Bài 114 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Toán Chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn: $2xy+2x+x+y=0$.

Lời giải

Ta có: $2xy+6x+y=0 \Rightarrow 4xy+6x+2y=0$

$$2x(2y+3)+(2y+3)=3$$
$$(2x+1)(2y+3)=3$$

Vì $x,y \in \mathbb{Z}$ nên $2x+1 \in \mathbb{Z},\ 2y+3 \in \mathbb{Z}$

Do đó ta có các trường hợp sau:

TH1: $\begin{cases} 2x+1=1 \\ 2y+3=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

TH3: $\begin{cases} 2x+1=-1 \\ 2y+3=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-3 \end{cases}$

TH2: $\begin{cases} 2x+1=3 \\ 2y+3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

TH4: $\begin{cases} 2x+1=-3 \\ 2y+3=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$

Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa mãn là: $(0;0),(2;-1),(-1;-3),(-2;-2)$

Bài 115 (Đề thi vào 10 hệ chuyên – Chuyên Tin – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;\ y)$ thỏa mãn phương trình sau $2x^2-y^2+xy+2x+2y=7$

Lời giải

Ta có: $2x^2-y^2+xy+2x+2y=7$

$$(x+y)(2x-y)+2(x+y)=7$$

$$(x+y)(2x-y+2)=7$$

Ta có các cách phân tích $7=7.1=1.7=(-7).(-1)=(-1).(-7)$

Do đó xét các trường hợp sau

*) $\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y+2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ (thoả mãn)

*) $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+2=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ (thoả mãn)

*) $\begin{cases} x+y=-7 \\ 2x-y+2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-10}{3} \\ y=\dfrac{-11}{3} \end{cases}$ (loại)

*) $\begin{cases} x+y=-1 \\ 2x-y+2=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-10}{3} \\ y=\dfrac{7}{3} \end{cases}$ (thoả mãn)

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x;y)\in\{(2;5);(2;-1)\}$

----------------------------HẾT----------------------------