TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2024 – 2025

Bài 1. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – trường THPT chuyên Hạ Long năm học 2024 – 2025)

Qua điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D bất kì (D khác B, D khác C). Đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác C), tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm F (F khác E), hai đường thẳng AD và CF cắt nhau tại điểm G.

a) Chứng minh tứ giác $DEFG$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\dfrac{EA}{ED}=\dfrac{BA}{BD}$.

c) Chứng minh $GB=GF$.

d) Hai đường thẳng CE và AD cắt nhau tại điểm M, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại điểm N. Chứng minh ba điểm N, D, F thẳng hàng.

Bài 2. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao BE, CF cắt nhau tại H và M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường trung trực của BC tại O.

a) Chứng minh $AH=2.OM$

b) Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Bài 3. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi E là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC của (O) $(BE<BA)$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $BK=BE$, $CL=CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và KL.

a) Chứng minh $\widehat{BNC}=90^o$.

b) Gọi F là điểm thuộc (O) sao cho EF song song với BC. Chứng minh MN song song với AF.

Bài 4. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 – 2025)

Cho hai đường tròn $(O_1;R_1)$ và $(O_2;R_2)$ (với $R_1 > R_2$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B. Qua điểm A kẻ đường thẳng cắt (O_1), (O_2) lần lượt tại C, D (đều khác A) sao cho A là trung điểm của đoạn CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt đường thẳng AB tại điểm E (khác B), đường thẳng EC cắt đường tròn (O_1) tại điểm P (khác C), đường thẳng ED cắt đường tròn (O_2) tại điểm Q (khác D).

a) Chứng minh rằng: $\Delta BCP \backsim \Delta BDQ$.

b) Chứng minh rằng: Ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

c) Vẽ phân giác trong EI của tam giác EPQ; vẽ PM, QN lần lượt là phân giác trong của tam giác CPI và tam giác DQI. Chứng minh rằng: $MN // CD$.

Bài 5. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O), đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N, K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P. Chứng minh rằng:

a) HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH} = \widehat{HDE}$, $\widehat{FDK} = \widehat{NDE}$.

b) Ba điểm P, E, F thẳng hàng.

c) $PE.PF < PM^2$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Bình năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB không đi qua O. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm H khác B sao cho $AH > BH$. Đường thẳng qua H vuông góc với AB cắt cung lớn AB của (O) tại M. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB. Đường thẳng qua M vuông góc với EF cắt AB, FH và cung nhỏ AB của (O) lần lượt tại D, K, N. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $MEHF$ và $AMHK$ nội tiếp.

b) AN song song với HE và $\dfrac{AM^2}{BM^2} = \dfrac{AH}{BH}.\dfrac{AD}{BD}$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 – Toán chung (Lớp KHTN) – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) với đường kính BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D, gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam giác ABE, AH cắt BC tại F. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N.

a) Chứng minh các điểm E,M,F,H cùng thuộc một đường tròn và $DB.DC = DM.DO$.

b) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $\widehat{BAH} = \widehat{ADB}$.

c) Chứng minh $MK \perp AN$ và $MD = 2MN$

Bài 8. (Đề thi vào 10 – Toán Chung (Lớp KHXH) – năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) với đường kính BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D, gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam giác ABE, AH cắt BC tại F. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N.

a) Chứng minh các điểm E,M,F,H cùng thuộc một đường tròn và $DB.DC = DM.DO$.

b) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $\widehat{BAH} = \widehat{ADB}$.

c) Chứng minh $MK \perp AN$ và đường thẳng DK cắt đường thẳng OE tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Bài 9. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O), các điểm B,C thay đổi trên (O) sao cho B,C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BI cắt AC tại D. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC .

a) Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.

b) Gọi P là giao điểm khác I của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID

đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N. Chứng minh rằng bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC. Chứng minh khi B, C thay đổi trên (O) T luôn thuộc một đường cố định.

Bài 10. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) đường kính AB, I là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng OA (I khác A và O), dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB tại I. Từ điểm I kẻ các đường thẳng IM, IN lần lượt vuông góc với các đường thẳng AC, BC (M thuộc AC, N thuộc BC). Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và AB, E là giao điểm thứ hai của đường thẳng PC và đường tròn (O) (E khác C).

a) Chứng minh tứ giác $AMNB$ nội tiếp được trong một đường tròn và $PM.PN = PA.PB$.

b) Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMNB$. Chứng minh đường thẳng IE vuông góc với đường thẳng CE và ba điểm E, I, F thẳng hàng.

c) Chứng minh biểu thức $\dfrac{MA.AB.BN}{CP.CD.CE}$ có giá trị không đổi khi điểm I di chuyển trên đoạn thẳng OA (I khác A và O).

Bài 11. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lai Châu năm học 2024 – 2025)

Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA sao cho $CO = 4$. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E).

a) Chứng minh rằng: $CD.CE = 12$.

b) Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác $OBME$. Chứng minh rằng: Tứ giác $OBME$ nội tiếp.

c) Khi M di chuyển, chứng minh rằng: $MO.MC \le 8$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Hải Phòng năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O). Lấy điểm C cố định thuộc đoạn thẳng OA (C khác A và khác O). Gọi DE là dây cung thay đổi của đường tròn (O) nhưng luôn đi qua điểm C (DE khác AB). Các tia BD và BE cắt đường thẳng d theo thứ tự tại các điểm M và N.

a) Chứng minh tứ giác $DENM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và đường thẳng AB. Chứng minh F là điểm cố định và tích $AM.AN$ không đổi khi dây cung DE của đường tròn (O) thay đổi.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DENM$. Xác định vị trí của dây cung DE để tổng $IB+IM$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 13. (Đề thi vào 10 – Chuyên Nga Pháp Trung – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) có đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa của cung BC. Kẻ đường kính AD. Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC (E khác A và C). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AB và CE. Kẻ AH vuông góc với FC $(H \in FC)$, AC cắt OH tại I. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AHCO$ nội tiếp.

b) HO là tia phân giác của góc AHC và $AI.AH = HF.CI$

c) Ba điểm F, I, D thẳng hàng.

Bài 14. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AD của tam giác ABC (D thuộc BC). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của điểm D trên các cạnh AB, AC. Gọi S là giao điểm của EF và BC.

a) Chứng minh: $\widehat{EFD}=\widehat{EDB}$

b) Chứng minh tứ giác nội $BEFC$ nội tiếp và $SD^2=SB.SC$

c) Đường thẳng SA cắt đường tròn (O) tại M (M khác A), MD cắt đường tròn (O) tại N (N khác M). Gọi I là trung điểm của DN. Chứng minh $IF = IC$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (với $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$). Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng với H qua D và E; M là trung điểm của BC. Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại điểm P.

a) Chứng minh các điểm A, B, C, A_1, B_1 cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $PE \cdot PF = PM \cdot PD$ và H là trực tâm của tam giác APM.

Bài 16. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AO cắt BC tại E. Trên đoạn AO lấy điểm D sao cho $OD = OE$. Đường đi thẳng qua D, vuông góc với BC cắt BC, AC, AB lần lượt tại X, Y, Z. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt lại (O) tại điểm T khác A. Chứng minh rằng:

a) Tam giác OXE là tam giác cân.

b) Bốn điểm C, X, Y, T cùng thuộc một đường tròn.

c) $BX = CE$.

d) $AT \parallel BC$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho (M khác A và B), H là hình chiếu của M trên AB. Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K.

a) Chứng minh tứ giác $OBKM$ nội tiếp.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB. Gọi I là giao điểm của AK và MH. Chứng minh I là trung điểm CD.

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 18. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và E là một điểm bất kỳ trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác của góc $\widehat{AEB}$ cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

a) Chứng minh ΔKAF và ΔKEA là hai tam giác đồng dạng.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF cắt OE tại I. Chứng minh rằng đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

c) Chứng minh $MN//AB$, trong đó M,N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE,BE với đường tròn (I)

d) Gọi P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E di chuyển trên đường tròn (O).

Bài 19. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF.

b) Chứng minh $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=1$.

c) Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O). Gọi P,Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME. Chứng minh $AM\perp PQ$.

d) Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\dfrac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 20. (Đề thi vào 10 – Toán chung – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và MN (M,N không trùng với các điểm A,B). Các đường thẳng BM,BN cắt tiếp tuyến kẻ từ điểm A của đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại các điểm E,F

a) Chứng minh $AM//BF$.

b) Chứng minh tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn.

c) Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE,AF. Kẻ đường thẳng PI vuông góc với BQ (I là điểm thuộc BQ), đường thẳng PI cắt OA tại H. Chứng minh H là trung điểm của AO

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BPQ theo R khi hai đường kính AB và MN thay đổi.

Bài 21. (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tây Ninh năm học 2024 – 2025)

1. Cho đoạn thẳng $AB = 8cm$. Vẽ hai đường tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính bằng $5cm$. Tính độ dài dây cung chung của hai đường tròn.

2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E là các tiếp điểm của AB, AC với (O). Đường thẳng BO và DE cắt nhau tại I. Chứng minh $IM \,//\, AB$ với M là trung điểm BC.

3. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 100^\circ$ và $\widehat{ABC} = 20^\circ$. Lấy điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\widehat{DAB} = 30^\circ$ và $\widehat{ABD} = 10^\circ$. Tính số đo $\widehat{ACD}$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Sơn La năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AO, điểm E thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Các tia Ax và By lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm E có bờ là đường thẳng AB). Qua điểm E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI cắt Ax, By lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $AE.IN = BE.IM$.

c) Gọi P là giao điểm của AE và MI; Q là giao điểm của BE và NI. Chứng minh hai đường thẳng PQ và AM vuông góc.

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O). Giả sử ba điểm E,I,F thẳng hàng. Tính diện tích tam giác MON theo R.

Bài 23. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác tù ABC có $\widehat{ABC} > 90^0$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S. Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC = SP$. Đường thẳng SP

cắt (O) tại hai điểm E, F (E ở giữa S và F). Các đường thẳng AP, BP cắt lại (O) lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACS đồng dạng với tam giác CBS;

b) $\widehat{APS} = \widehat{PBS}$;

c) Tứ giác $EKLF$ là hình thang cân.

Bài 24. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC vuông ở $A\left(AB < AC\right)$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh $IECD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K, O lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh K, O, S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh $\widehat{HNM} = \widehat{EMN}$.

Bài 25. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm K sao cho $AB = 4AK$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm I sao cho $HI = \frac{1}{4}AH$. Kẻ KP vuông góc với đường thẳng AH $(P \in AH)$. Chứng minh rằng:

a) $AH = PI$;

b) Tam giác IKC vuông tại I.

Bài 26. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Kẻ BE vuông góc với AC tại điểm E, CF vuông góc với AB tại điểm F. Các đường thẳng BE, CF lần lượt cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại hai điểm $P, Q\left(P \neq B, Q \neq C\right)$. Tiếp tuyến của đường tròn $\left(O\right)$ tại các điểm B, C cắt đường thẳng EF lần lượt tại các điểm M, N. Đường thẳng NP cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm $K\left(K \neq P\right)$.

Chứng minh rằng:

a) Tam giác NCE là tam giác cân;

b) Các điểm M, Q, K thẳng hàng.

Bài 27. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ACB} = 30°$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{AIC} = 120°$.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng MI và AC. Chứng minh rằng $AB = AN$.

Bài 28. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC $(AB > BC)$ có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Vẽ các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC. Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng DF. Tia AI cắt đường tròn (O) tại K $(K \neq A)$, tia BE cắt đường tròn (O) tại J $(J \neq B)$. Chứng minh rằng:

a) E là trung điểm của đoạn thẳng HJ;

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC.

Bài 29. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC không cân, có ba góc nhọn và $AB < AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với ba cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Lấy S trên đường thẳng EF sao cho $AS \parallel BC$, gọi $DI \cap AS = H$.

a) Chứng minh rằng 5 điểm A, F, I, E, H nằm trên cùng một đường tròn và đường thẳng HI là phân giác của $\widehat{FHE}$.

b) Gọi $DI \cap EF = K$. Đường thẳng đi qua K và song song với BC cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng tam giác IPQ cân và đường thẳng AK đi qua trung điểm của BC.

c) Kẻ DI cắt lại đường tròn nội tiếp ΔABC ở T. Chứng minh rằng $ST \perp AD$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AB với B là tiếp điểm. Một đường thẳng d đi qua A và cắt (O) tại M, N sao cho: O và B nằm khác phía so với d, điểm M ở giữa A và N. Kẻ $BH \perp AO$ (H thuộc AO), gọi K là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng $AB^2 = AM.AN$, $\widehat{KAO} = \widehat{OBK}$

b) Chứng minh rằng tứ giác $MHON$ nội tiếp và HB là phân giác của $\widehat{MHN}$

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN cắt đường thẳng AB tại P, Q và cắt đường thẳng HB tại D (D khác H). Gọi R là trung điểm của BD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR và (O) tiếp xúc với nhau.

Bài 31. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với các điểm A, B, C cố định. Điểm M di động trên cung BC không chứa A (M khác B, C và AM không vuông góc với BC). Kẻ BE vuông góc với AM tại E. Gọi N là giao điểm của AM và BC, H và J theo thứ tự là trực tâm của các tam giác CMN và ABN. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng BC, F là chân đường vuông góc kẻ từ C đến đường thẳng AM.

a) Chứng minh rằng $IF \parallel MB$

b) Chứng minh $\Delta ABJ \backsim \Delta CMH$

c) Khi điểm M di động nhưng vẫn thỏa mãn yêu cầu bài toán, chứng minh rằng đường thẳng HE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 32. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, điểm H cố định thuộc tia đối của tia BC. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với BC. Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MP, MK với đường tròn (O). Dây PK cắt OM tại N và cắt OH tại Q.

a) Chứng minh năm điểm M, P, O, K, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $OH.OQ = R^2$.

c) Cho $\widehat{POK} = 120^0$. Tính diện tích tứ giác $MPOK$ theo R.

d) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì trọng tâm G của tam giác HPC chạy trên một đường tròn cố định.

Bài 33. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O). B, C là các điểm cố định trên (O), $BC \neq 2R$. A là một điểm thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. AA' là đường kính của (O).

1) Chứng minh $\Delta BAD \backsim \Delta CAA'$

2) M là điểm đối xứng với A qua BC, N là điểm đối xứng với B qua AC.

a) Chứng minh rằng $CM.CE = CN.CD$

b) Giả sử M, C, N thẳng hàng, $R = 8cm$. Tính AB.

3) I, J lần lượt là trung điểm của BC, EF. AI cắt EF tại K, H là hình chiếu của K lên BC. Chứng minh A, J, H thẳng hàng.

Bài 34. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Đường thẳng đi qua hai điểm M, N cắt (O) tại hai điểm P, Q (với M nằm giữa P và N). Gọi D là một điểm trên cạnh AB (với D khác A, D khác B), đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt BC tại I (I khác B). Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại K.

a) Chứng minh các điểm C, I, P, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{PK}{PD}$

c) Đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (G khác P). Đường thẳng IG cắt AB tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên cạnh AB thì tỉ số $\dfrac{S_{APD}}{S_{AQE}}$ không đổi.

Bài 35. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G, tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của BI và EF, K là giao điểm của OA và EF.

a) Chứng minh $HF.CE.BC = HC.BF.EF$

b) Chứng minh $JE = JF$ và $HJ // DK$

c) Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF, Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh $NJ \perp EF$.

Bài 36. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O). Từ điểm A nằm ngoài đường tròn, vẽ các tiếp tuyến AE, AF tới đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm) và cát tuyến ABC (B, C thuộc đường tròn (O), B nằm giữa A và C).

a) Chứng minh rằng $BE.CF = CE.BF$

b) Gọi H là giao điểm của AO và EF, I là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua I song song với CE cắt EF tại D, CD cắt AE tại K. Chứng minh HK vuông góc với OF.

c) Trong tam giác FBC lấy điểm N sao cho $AN = AF$. Qua điểm N vẽ các dây cung BQ, CR, FP của đường tròn (O). Chứng minh rằng tam giác PQR là tam giác cân.

Bài 37. (Đề khảo sát – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH ($H \in BC$). Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và B cùng phía đối với AC).

a) Chứng minh tứ giác $BKLC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PHQ.

c) AH cắt lại đường tròn (O) tại T ($T \neq A$). Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên KL; AD cắt đường tròn (O) tại M ($M \neq A$). Chứng minh $\widehat{HMT} = 90^0$.

Bài 38. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và B cùng phía đối với AC).

a) Chứng minh tứ giác $BKLC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh PQ vuông góc với AO.

c) AH cắt lại đường tròn (O) tại T $(T \neq A)$. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PTQ.

Bài 39. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $R = 4cm$, $BC = 4\sqrt{3}\,cm$. Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F ($E \neq B$ và $F \neq C$). Gọi H là giao điểm của BF và CE.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn và tính bán kính của đường tròn đó.

b) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

c) Từ A kẻ các tiếp tuyến AI, AJ tới đường tròn đường kính BC (I, J là các tiếp điểm). Đường thẳng AH cắt đường tròn (O, R) tại K (K khác A). Tính $\dfrac{HI.HJ}{HK}$.

Bài 40. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại F. Các đường thẳng FB, FC lần lượt cắt đường thẳng DE tại M, N. Gọi I là trung điểm BC.

a) Chứng minh $ME = MB$ và MI là tia phân giác của $\widehat{FMN}$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại K $(K$ khác $A)$. Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

c) Chứng minh các điểm F, M, N, K cùng thuộc một đường tròn.

d) Gọi đường tròn qua các điểm F, M, N, K là (S). Chứng minh (S) tiếp xúc với (O).

Bài 41. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Hai đường thẳng AM và DC cắt nhau tại P. Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tam giác BCK đồng dạng với tam giác CPB

b) Hai đường thẳng BP và CK cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng MH tại R. Chứng minh tam giác BRK là tam giác vuông cân.

c) Các đường thẳng vuông góc với OH kẻ từ O và H, cắt đường thẳng AB lần lượt tại X và Y. Lấy điểm Q thuộc tia đối của tia BC sao cho $BQ = CM$. Chứng minh hai đường thẳng QR, DK cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MXY.

Bài 42. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB. Điểm P di chuyển trên cung nhỏ BC (P khác B, C). Gọi M, N lần lượt là giao điểm của PC, PB với EF. AM, AN cắt (O) theo thứ tự tại Q, R (Q, R khác A).

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFPM$ nội tiếp và $\widehat{EPF} = \widehat{QPR}$.

b) Chứng minh rằng giao điểm của QE và RF nằm trên (O).

c) Lấy S, T lần lượt thuộc vào các đường thẳng CA, AB sao cho ba đường thẳng ET, FS, AP song song với nhau. Gọi K và L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác NFS và MET. Đường thẳng qua K vuông góc với AB cắt đường thẳng qua L vuông góc với AC tại J. Chứng minh rằng J luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Bài 43. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O, R) và dây cung BC cố định không đi qua tâm O. A là một điểm di động trên đường tròn (O, R) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và Q sao cho F nằm giữa P và E. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng

a) $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$.

b) Bốn điểm P, Q, M, D cùng nằm trên một đường tròn (ω).

c) Tâm I của đường tròn (ω) luôn thuộc một đường tròn cố định.

Bài 44. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB<AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt $\left(O\right)$ tại giao điểm thứ hai là D. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng DM cắt $\left(O\right)$ tại giao điểm thứ hai là S.

a) Chứng minh rằng tam giác ACS đồng dạng với tam giác BMS.

b) Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng AS. Đường thẳng BJ cắt $\left(O\right)$ tại giao điểm thứ hai là T. Chứng minh rằng đường thẳng CT song song với đường thẳng AS.

c) Các đường cao DE, BF, CK của tam giác BDC đồng quy tại H. Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ H đến KF. Chứng minh rằng các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn $\left(O\right)$.

Bài 45. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$ và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Các đường thẳng qua C và B song song với AO cắt đường tròn $\left(O\right)$ lần lượt tại E và F (E khác C, F khác B). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng BH cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai là X $\left(X\neq B\right)$; đường thẳng CH cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại điểm thứ hai Y $\left(Y\neq C\right)$.

a) Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác HBC

b) Gọi M là giao điểm của XF với AC và N là giao điểm của YE với AB. Chứng minh $MN\,//\,BC$.

c) Chứng minh ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.

Bài 46. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025)

1. Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$, đường cao $AH\left(H\in BC\right)$. Gọi K,L lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB và AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn $\left(O\right)$ tại hai điểm P,Q(P nằm trên cung nhỏ AB). Chứng minh $\widehat{AKL}=\widehat{ACB}$ và $AP=AQ$.

2. Cho đoạn thẳng BC cố định và một điểm A thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A. Hai đường phân giác trong của tam giác ABC là BD và CE cắt nhau tại điểm O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\dfrac{BD^2}{BO^2}+\dfrac{CE^2}{CO^2}$.

Bài 47. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hưng Yên năm học 2024 – 2025)

1. Cho tam giác ABC vuông tại B $(BC > AB)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, đường kính $AC = 2R$. Kẻ dây cung BD vuông góc với AC, H là giao điểm của AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C)

a) Chứng minh HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC

b) Khi điểm B thay đổi thì điểm H cũng thay đổi. Tìm vị trí của điểm H trên đoạn AC để diện tích tam giác $O'IH$ là lớn nhất

2. Một xô bằng tôn dạng hình nón cụt (giả sử mép không đáng kể, đáy nhỏ bị bịt tôn) có các bán kính đáy là 17cm và 10cm, chiều cao 24cm. Tính diện tích tôn để làm xô.

Bài 48. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác đều ABC, cạnh a, đường cao AH. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC, qua M kẻ MP vuông góc với AB, MQ vuông góc với AC. Gọi O là trung điểm của AM.

a) Chứng minh năm điểm A, P, M, H, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Tứ giác $OPHQ$ là hình gì? Vì sao?

c) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để độ dài PQ nhỏ nhất, tìm độ dài đó theo a.

Bài 49. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025)

Trên đường tròn đường kính AB, lấy các điểm C và D sao cho $BC = BD < \frac{1}{2}AB$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua đường thẳng BC, AE cắt tia CB tại F, cắt đường tròn (B, BC) tạo $H (H \neq E), CH$ cắt AB tại I.

a) Chứng minh DC là tia phân giác của góc $\widehat{ADE}$.

b) Chứng minh năm điểm B, D, F, H và I cùng nằm trên một đường tròn.

c) AD cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFDH$ tại $J (J \neq D), JF$ cắt CD tại K.

Chứng minh DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng JK.

Bài 50. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC có $BC < AB < AC$. Gọi BD, CE là các đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm P (P khác H và C), M là điểm trên cạnh AC sao cho tia BD là phân giác của góc MBP. Gọi N là điểm đối xứng với B qua E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC cắt BM tại K (K khác M).

a) Chứng minh $BHKN$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BKP.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh I, K, H thẳng hàng.

Bài 51. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có $BC = 10cm$. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D. Hai đường thẳng BD và CE cắt nhau tại H.

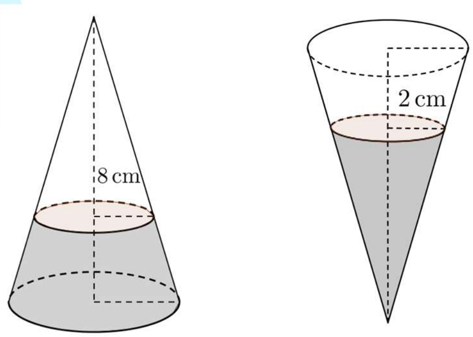
a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp

b) Đường thẳng AH cắt cung nhỏ ED tại K. Giả sử $\widehat{EKD} = 135^\circ$, tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ ED và dây cung ED (cho $\pi = 3{,}14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

c) Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại F. Gọi P là trung điểm CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng AF vuông góc BC và Q là trung điểm CF.

Bài 52. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Một cái bình hình nón được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang sao cho đỉnh của nó hướng lên trên. Người ta rót nước vào bình cho đến khi mực nước dâng cao cách đỉnh $8cm$ (như hình 1). Sau đó, người ta đảo ngược cái bình lại sao cho đỉnh bình hướng xuống (như hình 2). Khi đó, người ta đo được phần không gian trống của bình có chiều cao $2cm$. Biết rằng lượng nước bên trong bình không thay đổi. Tính chiều cao của cái bình đã cho.



Hình 1 Hình 2

Bài 53. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Cần Thơ năm học 2024 – 2025)

Cho hình bình hành $ABCD$ có $CB = CA$. Gọi M là điểm bất kỳ trên tia đối của tia BA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt MD tại N (N khác D), đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt MC tại K (K khác M).

a) Chứng minh tứ giác $ABKC$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AN và đường thẳng BK. Chứng minh I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Bài 54. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC cân tại B, có $\widehat{ABC} = 40^\circ$ và $AC = 1$. Trên các cạnh BA, BC, lấy các điểm tương ứng N, K sao cho $AN \cdot CK = \frac{1}{4}$. Gọi M là trung điểm của AC.

Tính số đo của $\widehat{NMR}$.

Bài 55. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB không là đường kính. Gọi C là điểm chính giữa của cung lớn AB. Các tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại M. Gọi D là hình chiếu vuông góc của B trên AC và E là trung điểm của BD. Tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Gọi G là giao điểm của MC với AB.

a) Chứng minh rằng, bốn điểm B, E, F, G cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tia MF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Chứng minh rằng: AH là đường kính của đường tròn (O)

b) Tia MF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Chứng minh rằng: AH là đường kính của đường tròn (O)

c) Gọi T là trung điểm của đoạn thẳng MG. Chứng minh rằng, ba điểm B, F, I thẳng hàng.

Bài 56 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Tiền Giang năm học 2024 – 2025):

Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, D là trung điểm của AC, tia BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh $CDEH$ là một tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $DA^2 = DE.DB$.

c) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Bài 57. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Long An năm học 2024 – 2025)

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh rằng tứ giác $BFEC$ là một tứ giác nội tiếp, xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Gọi Q là giao điểm của đường cao AD với (O) (Q khác A). Chứng minh rằng ΔBHQ là tam giác cân.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AH; K là giao điểm của AH và EF.

Chứng minh rằng $IE^2 = IK.ID$.

Bài 58. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Long An năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại M và N. Kẻ một tiếp tuyến chung ngoài lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) và đường tròn (O') tại A và B.

Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} + \frac{NB}{NA} - 2 \geq 0$.

Bài 59. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD nhọn, AC đi qua (O), I là trung điểm BD, H là trực tâm của tam giác ABD. Gọi E là giao điểm của AI và đường tròn (O) (E khác A), kẻ HK vuông góc với AI (K nằm trên AI).

a) Chứng minh rằng tứ giác $CEHK$ là hình bình hành và $IB^2 = ID^2 = IA \cdot IK$.

b) Lấy điểm F thuộc cung nhỏ BD sao cho $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$. Chứng minh rằng K đối xứng với F qua BD

c) Chứng minh rằng các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ đồng quy trên BD.

d) Qua H kẻ đường thẳng song song với AC, lấy T sao cho $TH = TK$. Chứng minh bốn điểm O, K, T, F cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 60. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường trung trực đoạn thẳng BD tại điểm P. Hai đường thẳng DP và AC cắt nhau tại điểm E.

a) Chứng minh rằng tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn

b) Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AP và đường tròn (O), với Q khác A.

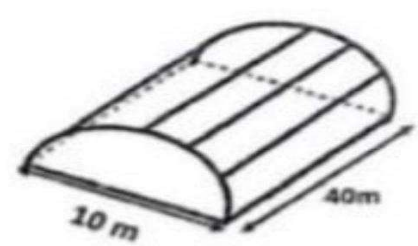
Chứng minh $\widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$

c) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AD và đường tròn (O), với K khác A. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng CQ và DP. Chứng minh rằng ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài 61. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

1) Cho nửa hình tròn tâm O đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa cung BC, D là điểm thuộc cung AC (điểm D không trùng điểm A và C). Trên dây BD lấy điểm E sao cho $BE = CD$ Chứng minh rằng tam giác ADE vuông cân.

2) Bác An dự định làm một nhà kính trồng rau sạch, phần mái vòm có dạng nửa hình trụ đường kính đáy là 10 m, chiều dài là 40 m (minh họa bởi hình bên). Để phủ kín mái vòm (gồm diện tích xung quanh nửa hình trụ và kế cả hai nửa đáy) bác An ra cửa hàng mua một tấm nhựa Politiv, mỗi tấm có chiều rộng $2{,}2m$ và chiều dài



50 m với giá 15000 đồng $/\text{m}^2$.Tính số tiền bác An mua các tấm nhựa Politiv để phủ kín mái vòm ở trên, biết rằng cửa hàng chỉ bán nguyên tấm (lấy $\pi \approx 3{,}14$)

Bài 62. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O). Tia phân giác của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, F. Chứng minh:

a) $AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD$

b) $AD + BE + CF > AB + AC + BC$

Bài 63. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn $(AB < AC)$. Vẽ đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và BC.

a) Chứng minh rằng ΔMFN là tam giác vuông.

b) Chứng minh $\Delta FMN \backsim \Delta FAC$.

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc từ M, N đến đường thẳng DF. Chứng minh rằng giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ.

Bài 64. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Hùng Vương Gia Lai năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn $(O;\ R)$ có đường kính AB cố định, I là điểm thuộc đoạn thẳng AO sao cho $AI = 2IO$. Đường thẳng qua I vuông góc với đường thẳng AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N. Điểm C di động trên cung nhỏ MB (C không trùng với M và B), E là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM. Đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AM tại F.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AC và MN. Chứng minh rằng $AD.AC - AI.IB = AI^2$

c) Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = 2KM.KB - MK.MB$

Bài 65. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường tròn (O) tại A và D. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD, N là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC.

a) Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{ACD}$.

b) Chứng minh $2\left(\dfrac{BO}{AB}\right)^2 - \dfrac{OH}{BH} = 1$.

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AN tại E. Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO.

Bài 66. (Đề thi vào 10 – Toán Chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025)

Cho hình thang $ABCD$, vuông tại A và D, $AD = CD = \frac{1}{2}AB$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của AB và CD và E, F là trung điểm các đoạn AO_1 và DO_2. Trên đoạn thẳng EF lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CND} = 90^\circ$.

a) Chứng minh tứ giác $ABCM$ nội tiếp.

b) Gọi S là giao điểm của AD và BC. Chứng minh BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S.

c) Chứng minh bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Bài 67.(Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa năm học 2024 – 2025)

Cho A, B là hai điểm cố định trên đường tròn $(O, R), C$ là điểm chính giữa cung AB và M là điểm di động trên dây cung $AB(M \neq A, M \neq B)$. Tia CM cắt (O, R) tại $D(D \neq C)$.

a) Chứng minh $AC^2 = CM.CD$ và AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM.

b) Cho $R = 5cm, AB = 6cm$, tính $R_1 + R_2$, với R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và tam giác BDM.

Bài 68. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC $(AB < AC < BC)$ ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi G và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống CI và BI. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $BGED$ là hình thang

b) Tứ giác $BGFD$ nội tiếp

c) Các điểm E, F, G, H thẳng hàng.

Bài 69. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC cân tại A, có đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AH; E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên BM, AC. Đường thẳng CE cắt các đường thẳng HF và BF lần lượt tại G và K. Chứng minh rằng

a) $\widehat{BEC} = \widehat{HEA}$

b) AG vuông góc với BF.

Bài 70. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.

a) Chứng minh $\widehat{APQ} = \widehat{AHQ}$ và bốn điểm B, C, Q, P cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh hai tam giác MQH và MHP đồng dạng và $MH^2 = MB.MC$

c) Đường thẳng MA cắt (O) tại K khác A, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQP$. Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Bài 71. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) và một dây cung BC cố định không là đường kính. Xét điểm A thay đổi trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn và $AB < AC$. Gọi D,E,F lần lượt là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ A,B,C. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $\widehat{IEC} = \widehat{ICE}$ và IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF.

b) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q khác H. Chứng minh $PD \cdot PI = PE \cdot PF$ và $\widehat{AFQ} = \widehat{PIQ}$.

c) Gọi L là điểm đối xứng với A qua O và M,X,K lần lượt là hình chiếu vuông góc của L lên BC,CH,BH. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MNK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 72. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025)

1) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai tia AB và DC cắt nhau tại E sao cho $\widehat{AED} = 40^0$, hai tia BC và AD cắt nhau tại F sao cho $\widehat{AFB} = 30^0$. Tính số đo các góc trong của tứ giác $ABCD$.

2) Cho đường tròn (O) và BC là dây cung cố định khác đường kính của (O), A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D (khác A).

a) Chứng minh tam giác DBI cân. Từ đó suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) Gọi E, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt các tia EP, EQ lần lượt tại M, N. Gọi F là điểm đối xứng với E qua I.

Chứng minh $AM = AN$ và F là trực tâm tam giác EMN.

c) Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K. Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của K trên các đường thẳng AB và AC. Chứng minh rằng đường thẳng XY luôn qua điểm cố định khi A thay đổi.

Bài 73. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc BAD là góc tù, $AB < AD$ và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho $CK < AB$. Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho $AL = CK$. Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A).

a) Chứng minh $AB.NL = AK.NM$

b) Chứng minh $\widehat{CNL} = 90^\circ$

c) Gọi I là giao điểm của BD và KL, chứng minh $\dfrac{BA}{BL} + \dfrac{BC}{BK} = \dfrac{BD}{BI}$.

Bài 74. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$ có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng 90°. Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng 90°.

a) Chứng minh tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn và $BE^2 = BA.BF$

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P. Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD.

Bài 75. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT LÊ QUÝ ĐÔN TP Đà Nẵng năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC nhọn $(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường phân giác của tam giác cắt nhau tại I. Đường thẳng vuông góc với AI tại I lần lượt cắt các đường thẳng BC, AB, AC tại các điểm D, E, F. Đường tròn (O) cắt tia AI tại điểm N (khác A) và cắt đoạn thẳng DN tại điểm K (khác N).

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEIK$ nội tiếp

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm P (khác A). Chứng minh rằng các đường thẳng PN, BC, IK đồng quy.

Bài 76. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Lê Quý Đôn TP Đà Nẵng năm học 2024 – 2025)

Trên tia phân giác của góc nhọn xAy lấy điểm O (khác A) và vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các tia Ax, Ay lần lượt tại B, C. Trên các tia Ax, Ay lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $AB<AD<AE$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE. Các đoạn thẳng AM, BC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng ON vuông góc với DE.

Bài 77. (Đề thi vào 10 – Toán Chung – KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh AB (P khác A và B). Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PAD.

a) Chứng minh rằng tứ giác $PJDB$ nội tiếp

b) Gọi H là trực tâm của tam giác PJD, S là giao điểm của JH và AD. Chứng minh rằng $SH=SD$.

c) Gọi L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PBC, K là trực tâm của tam giác LPC. Đường tròn nội tiếp của tam giác PCD tiếp xúc CD tại E. Lấy F thuộc đoạn thẳng CD sao cho $CF=DE$. Chứng minh rằng tam giác FHK vuông cân.

Bài 78. (Đề thi vào 10 – Toán Chung – Chuyên Sư phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy D thuộc BC sao cho $DB=2DC$. Đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại E, đường thẳng qua E song song với BC cắt AC tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFE cắt AD tại M khác A.

a) Chứng minh $BDME$, $CDMF$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $MB=2MA$

c) Chứng minh $\widehat{BMD}=2\widehat{CMD}$

Bài 79. (Đề thi vào 10 – Toán Chung – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$. Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H $(D \in AC, E \in AB)$. Tia phân giác của góc BAC cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) lần lượt tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q.

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng QH và AB. Chứng minh đường thẳng MQ song song với đường thẳng BC và AI là đường trung trực của PQ.

c) Đặt $BC = x$, $DE = y$. Tính độ dài đoạn thẳng MQ theo x, y.

Bài 80. (Đề thi vào 10 – Toán Chung – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{BAC} < 90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A và C cắt nhau tại S. SB cắt (O) tại D. CD cắt SA tại K.

a) Chứng minh rằng $AS // BC$ và $KA^2 = KD \cdot KC$.

b) Chứng minh rằng hai tam giác KSD và KCS đồng dạng và K là trung điểm AS.

c) Chứng minh rằng $AC^2 = 2CD \cdot CK$ và $BD = 2CD$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – trường THPT chuyên Hạ Long năm học 2024 – 2025)

Qua điểm A ở bên ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Trên đoạn thẳng BC lấy điểm D bất kì (D khác B, D khác C). Đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác ACD cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác C), tia AE cắt đường tròn (O) tại điểm F (F khác E), hai đường thẳng AD và CF cắt nhau tại điểm G.

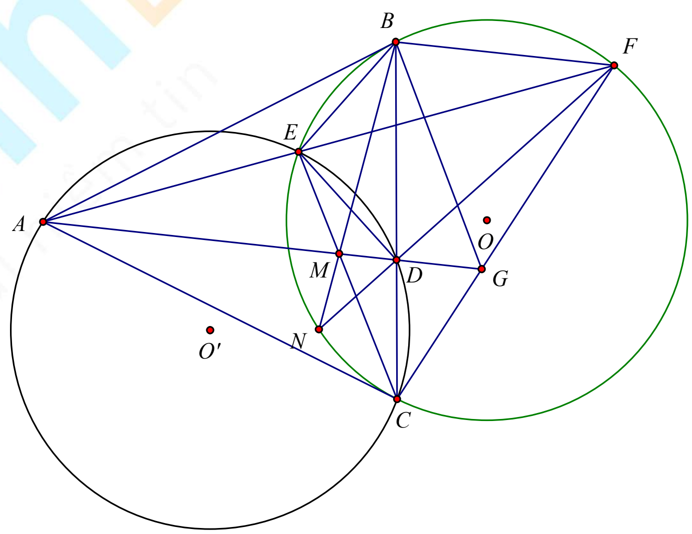
a) Chứng minh tứ giác $DEFG$ nội tiếp.

b) Chứng minh $\frac{EA}{ED}=\frac{BA}{BD}$.

c) Chứng minh $GB=GF$.

d) Hai đường thẳng CE và AD cắt nhau tại điểm M, đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại điểm N. Chứng minh ba điểm N, D, F thẳng hàng.

Lời giải



a) $\widehat{ACE}=\widehat{ADE}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O') cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

$\widehat{ACE}=\widehat{CFE}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây của (O) cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$)

$\Rightarrow \widehat{ADE}=\widehat{CFE}$

Tứ giác $DEFG$ có $\widehat{ADE}=\widehat{GFE}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $DEFG$ nội tiếp (điều phải chứng minh)

b) ΔABE và ΔAFB có $\widehat{A}$ chung; $\widehat{ABE}=\widehat{AFB}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây của (O) cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$) $\Rightarrow \Delta ABE \backsim \Delta AFB \Rightarrow \frac{EA}{BA}=\frac{BA}{FA}$

Tứ giác $AEDC$ nội tiếp (O') $\Rightarrow \widehat{EDB}=\widehat{EAC}$, $\widehat{EBC}=\widehat{EFC}$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) cùng chắn $\overset{\frown}{CE}$ $\Rightarrow \Delta BED \backsim \Delta FCA \Rightarrow \frac{ED}{BD}=\frac{AC}{AF}$

$AB,\ AC$ là hai tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AB = AC$, kết hợp với $\dfrac{EA}{BA} = \dfrac{BA}{FA}$ và $\dfrac{ED}{BD} = \dfrac{AC}{AF} \Rightarrow \dfrac{EA}{BA} = \dfrac{ED}{BD}$

$\Rightarrow \dfrac{EA}{ED} = \dfrac{BA}{BD}$ (điều phải chứng minh).

c) $\widehat{EAD} = \widehat{ECD}$ (hai góc nội tiếp (O') cùng chắn $\overset{\frown}{DE}$), $\widehat{ECB} = \widehat{EFB}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{BE}$) $\Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{EFB} \Rightarrow AG \,//\, BF \Rightarrow \widehat{AGC} = \widehat{BFC}$ (hai góc đồng vị) và $\widehat{AGB} = \widehat{FBG}$ (so le trong)

$\widehat{ABC} = \widehat{BFC}$ (góc nội tiếp, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây của (O) cùng chắn $\overset{\frown}{BC}$), kết hợp với $\widehat{AGC} = \widehat{BFC} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AGC} \Rightarrow$ Tứ giác $ABGC$ nội tiếp.

Tứ giác $ABGC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AGB} = \widehat{ACB}$. Có $AB = AC \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$. Vậy $\widehat{GBF} = \widehat{GFB}$

$\Rightarrow \Delta GBF$ cân $\Rightarrow GB = GF$. Ta được điều phải chứng minh.

d) Tứ giác $ABGC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAG} = \widehat{BCF}$ mà $\widehat{BCF} = \widehat{BNF}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{BF}$) nên

$\widehat{BAD} = \widehat{BNF}$ (1)

ΔAEM và ΔCDM có $\widehat{AME} = \widehat{CMD}$ (đối đỉnh) và $\widehat{EAM} = \widehat{DCM}$ (nội tiếp (O') cùng chắn $\overset{\frown}{ED}$)

$\Rightarrow \Delta AEM \backsim \Delta CDM \Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{ME}{MD} \Rightarrow MA.MD = ME.MC$.

ΔBEM và ΔCNM có $\widehat{EMB} = \widehat{NMC}$ (đối đỉnh) và $\widehat{EBM} = \widehat{NCM}$ (nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{EN}$)

$\Rightarrow \Delta BEM \backsim \Delta CNM \Rightarrow \dfrac{ME}{MN} = \dfrac{MB}{MC} \Rightarrow ME.MC = MB.MN$ mà $MA.MD = ME.MC$

$\Rightarrow MB.MN = MA.MD \Rightarrow \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MD}{MN}$.

ΔMBA và ΔMDN có $\widehat{AMB} = \widehat{NMD}$ (đối đỉnh) và $\dfrac{MB}{MA} = \dfrac{MD}{MN}$

$\Rightarrow \Delta MBA \backsim \Delta MDN \Rightarrow \widehat{BAM} = \widehat{DNM}$, kết hợp với (1) $\Rightarrow \widehat{BND} = \widehat{BNF} \Rightarrow N,\ D,\ F$ thẳng hàng.

Ta được điều phải chứng minh.

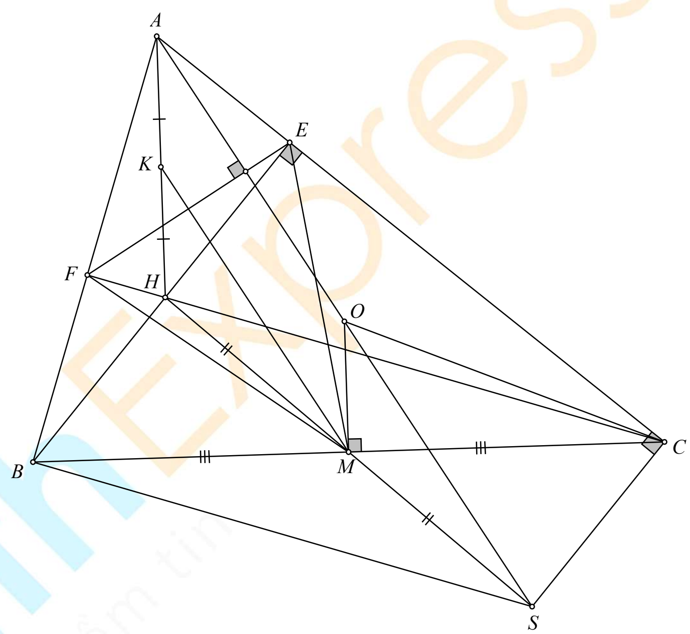
Bài 2. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC có đường cao BE, CF cắt nhau tại H và M là trung điểm BC. Đường thẳng qua A và vuông góc với EF cắt đường trung trực của BC tại O.

a) Chứng minh $AH = 2.OM$

b) Chứng minh O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Lời giải

a) Gọi K là trung điểm AH. Chứng minh được: $KE = KF; ME = MF$ $\Rightarrow MK$ là trung trực EF. $\Rightarrow MK \perp EF \Rightarrow MK // OA$ Mà: $OM // AH$ $(\perp BC)$ $\Rightarrow AKMO$ là hình bình hành. $\Rightarrow OM = AK = \dfrac{1}{2}AH \Rightarrow$ điều phải chứng minh b) K là trung điểm AH, $KM // AS$ $\Rightarrow M$ là trung điểm HS. Mà: M là trung điểm BC $\Rightarrow BHCS$ là hình bình hành. $\Rightarrow SC \perp AC$ tại C $(BH \perp AC)$ Chứng minh được: O là trung điểm AS. Xét $\triangle ACS$ vuông tại C có CO là trung tuyến $\Rightarrow CO = AO = \dfrac{1}{2}AS$ Mà: $CO = OB$ (O là trung trực BC) Vậy_$OC = OB = OA \Rightarrow$ điều phải chứng minh.	

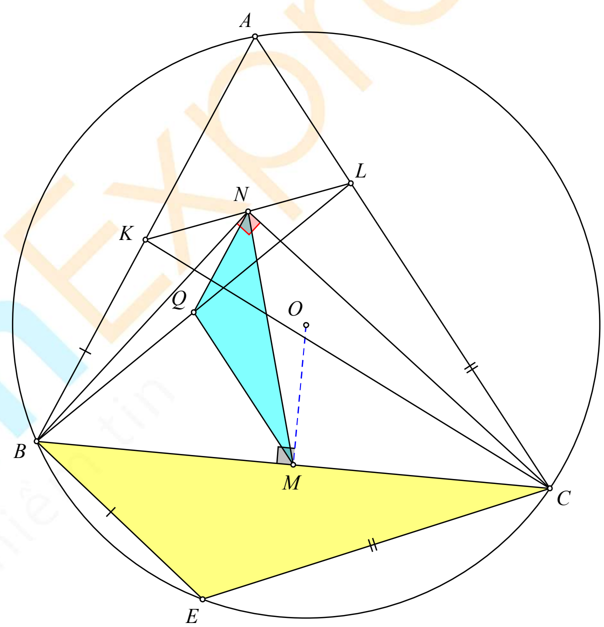
Bài 3 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác nhọn $ABC\left(AB < AC\right)$ nội tiếp đường tròn $\left(O\right)$. Gọi E là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC của $\left(O\right)$ $\left(BE < BA\right)$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm K, L sao cho $BK = BE$, $CL = CE$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm BC và KL.

a) Chứng minh $\widehat{BNC} = 90^o$.

b) Gọi F là điểm thuộc $\left(O\right)$ sao cho EF song song với BC. Chứng minh MN song song với AF.

Lời giải

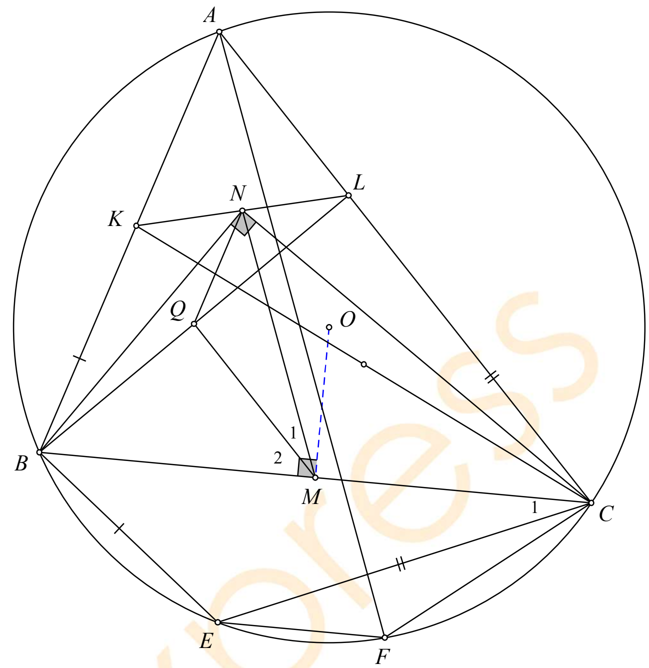
<table>
<tr>
<td>
a) Gọi Q là trung điểm BL.
Chứng minh được: $\dfrac{NQ}{BK}\left(=\dfrac{NQ}{BE}\right)=\dfrac{MQ}{EC}=\dfrac{1}{2}$ (1)
Ta có: $\widehat{MQN} = \widehat{NQL} + \widehat{MQL} = \underbrace{\widehat{ABL} + \widehat{LBC}}_{\widehat{ABC}} + \widehat{BMQ}$
$= \widehat{ABC} + \widehat{BCA} = \dfrac{1}{2} sđ\,\overset{\frown}{BAC} = \widehat{BEC}$ (2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta NQM \backsim \Delta BEC \Rightarrow \dfrac{MN}{BC} = \dfrac{1}{2}$.
Xét có: NM là trung tuyến và $NM = \dfrac{1}{2}BC$
$\Rightarrow \Delta BNC$ vuông tại $N \Rightarrow$ điều phải chứng minh
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
b) Có $\Delta NQM \backsim \Delta BEC \Rightarrow \widehat{M}_1 = \widehat{C}_1$

Lại có: $\widehat{M}_2 = \widehat{ACB} \Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{ACE} = \widehat{AFE}$

Vì $\widehat{ACE} = \widehat{AFE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AE}$)

Như vậy: $\widehat{NMB} = \widehat{AFE} \Rightarrow$ điều phải chứng minh
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Bài 4 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Đắk Lắk năm học 2024 – 2025):

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ (với $R_1 > R_2$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B. Qua điểm A kẻ đường thẳng cắt (O_1), (O_2) lần lượt tại C, D (đều khác A) sao cho A là trung điểm của đoạn CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt đường thẳng AB tại điểm E (khác B), đường thẳng EC cắt đường tròn (O_1) tại điểm P (khác C), đường thẳng ED cắt đường tròn (O_2) tại điểm Q (khác D).

a) Chứng minh rằng: $\Delta BCP \backsim \Delta BDQ$.

b) Chứng minh rằng: Ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

c) Vẽ phân giác trong EI của tam giác EPQ; vẽ PM, QN lần lượt là phân giác trong của tam giác CPI và tam giác DQI. Chứng minh rằng: $MN // CD$.

Lời giải

a) Vì $ABDQ$, $ABPC$ và $ECBD$ là các tứ giác nội tiếp nên: $\widehat{BQD}=\widehat{BAD}=\widehat{BPC}$ và $\widehat{BDQ}=\widehat{BCP}$

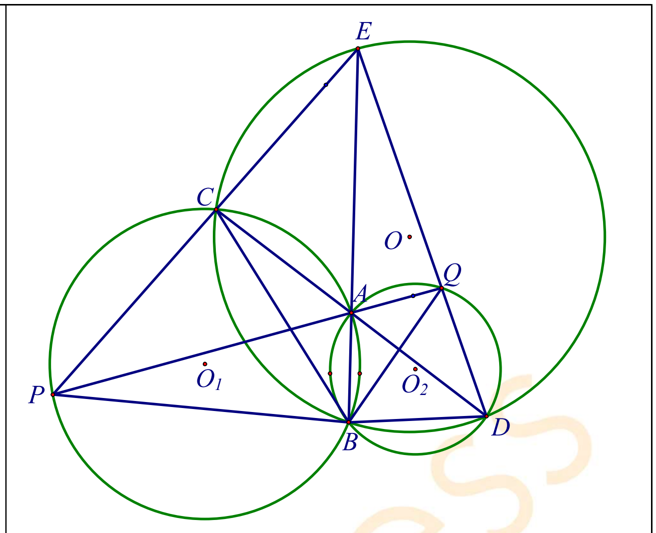
$\Rightarrow \Delta BDQ \backsim \Delta BCP\ (g-g)$.

b) Có $\Delta BDQ \backsim \Delta BCP \Rightarrow \widehat{QBD}=\widehat{CBP}$.

Mà $\widehat{QAD}=\widehat{QBD}$, $\widehat{CBP}=\widehat{CAP}$

$\Rightarrow \widehat{QAD}=\widehat{CAP}$.

Vậy P, A, Q thẳng hàng.



c) Áp dụng định lý Mênêlauyt cho ΔCED với P, A, Q thẳng hàng ta được:

$$\frac{AC}{AD}.\frac{QD}{QE}.\frac{PE}{PC}=1\text{, vì }\frac{AC}{AD}=1\Rightarrow\frac{QD}{QE}=\frac{PC}{PE}$$

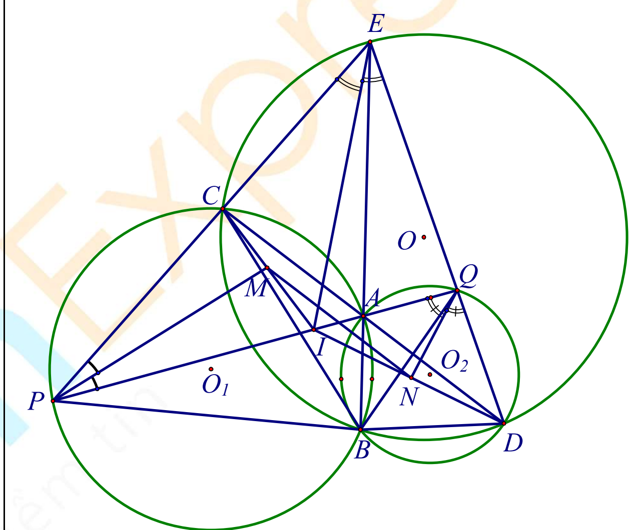
$$\Rightarrow\frac{QD}{CP}=\frac{QE}{PE}$$

Theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{IQ}{IP}=\frac{QE}{PE}\Rightarrow\frac{IQ}{IP}=\frac{QD}{CP}\Rightarrow\frac{QI}{QD}=\frac{PI}{PC}.$$

Mà $\dfrac{QI}{QD}=\dfrac{NI}{ND}$; $\dfrac{PI}{PC}=\dfrac{MI}{MC}$

$\Rightarrow \dfrac{NI}{ND}=\dfrac{MI}{MC}\Rightarrow MN//CD$ (điều phải chứng minh)



Bài 5. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

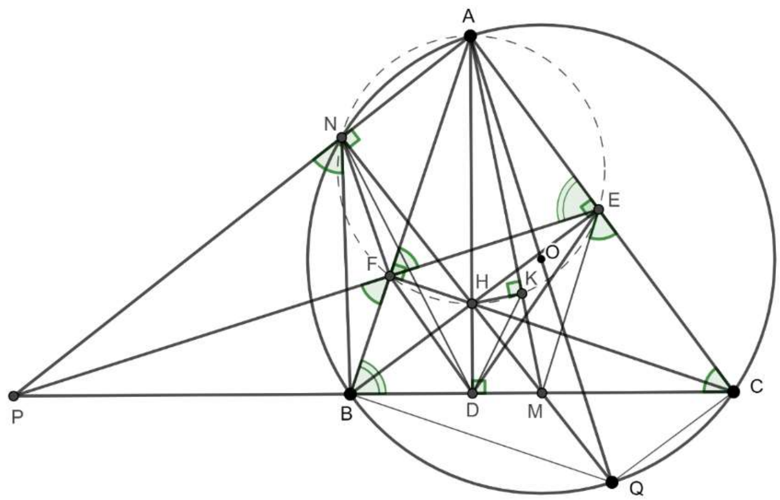
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB<AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H. Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O), đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N, K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P. Chứng minh rằng:

a) HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH}=\widehat{HDE}$, $\widehat{FDK}=\widehat{NDE}$.

b) Ba điểm P, E, F thẳng hàng.

c) $PE.PF<PM^2$.

Lời giải



a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF là đường tròn đường kính AH, suy ra $HN\perp NA$.

Mặt khác N thuộc đường tròn đường kính AQ nên $QN\perp NA$, suy ra N,H,Q thẳng hàng và có $HQ\perp AN$.

Có $\widehat{ADC}=\widehat{AFC}=90^0$ nên tứ giác $ACDF$ nội tiếp, do đó $\widehat{FDB}=\widehat{BAC}$.

Tương tự có $\widehat{EDC}=\widehat{BAC}$.

Suy ra $\widehat{FDH}=90^0-\widehat{FDB}=90^0-\widehat{BAC}=90^0-\widehat{EDC}=\widehat{EDH}$ (1).

Có $\widehat{ANM}=\widehat{ADM}=90^0$ nên tứ giác $ANDM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NDH}=\widehat{HMK}$.

Có $\widehat{HDM}=\widehat{HKA}=90^0$ nên tứ giác $HDMK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HMK}=\widehat{HDK}$.

Vậy $\widehat{NDH}=\widehat{HDK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FDK}=\widehat{FDH}+\widehat{HDK}=\widehat{HDE}+\widehat{NDH}=\widehat{NDE}$.

b) Tứ giác $ANFE$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{ANF}=\widehat{FEC}$.

Có $\widehat{BFC}=\widehat{BEC}=90^0$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FEC}=\widehat{FBP}$.

Vậy có $\widehat{ANF}=\widehat{FBP}$, suy ra tứ giác $NPBF$ nội tiếp.

Theo đó $\widehat{PFB}=\widehat{PNB}=\widehat{BCA}=\widehat{EFA}$.

Vậy $\widehat{PFB}=\widehat{EFA}$, mà B,F,A thẳng hàng nên P,F,E cũng thẳng hàng.

c) Chứng minh được $BHCQ$ là hình bình hành nên M là trung điểm của BC.

Tam giác EMC cân tại M nên $\widehat{MEC}=\widehat{BCA}$.

Từ đó có $\widehat{PEM}=180^0-\widehat{MEC}-\widehat{FEA}=180^0-\widehat{BCA}-\widehat{ABC}=\widehat{BAC}=\widehat{FDP}$.

Suy ra hai tam giác PFD, PME đồng dạng (g - g).

Suy ra $\dfrac{PF}{PM}=\dfrac{PD}{PE}$ hay $PE.PF=PD.PM$.

Do $AB<AC$ nên $BD<DC\Rightarrow BD<\dfrac{BD+DC}{2}=BM\Rightarrow PD<PM$.

Vậy $PE.PF=PD.PM<PM^2$.

Cách khác:

+ Chứng minh M là trung điểm của BC.

+ Chứng minh $PE.PF=PB.PC$.

+ Chỉ ra $PB.PC=\left(PM-\dfrac{BC}{2}\right)\left(PM+\dfrac{BC}{2}\right)=PM^2-\dfrac{BC^2}{4}$.

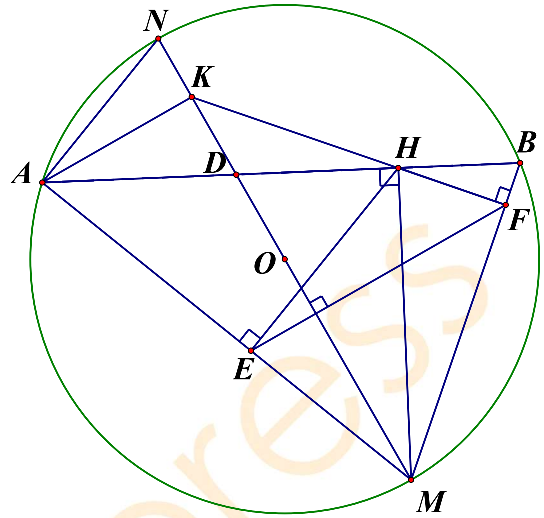
+ Từ $\dfrac{BC^2}{4}>0$ suy ra $PB.PC<PM^2$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Bình năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB không đi qua O. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm H khác B sao cho $AH>BH$. Đường thẳng qua H vuông góc với AB cắt cung lớn AB của (O) tại M. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB. Đường thẳng qua M vuông góc với EF cắt AB, FH và cung nhỏ AB của (O) lần lượt tại D, K, N. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác $MEHF$ và $AMHK$ nội tiếp. b) AN song song với HE và $\dfrac{AM^2}{BM^2}=\dfrac{AH}{BH}.\dfrac{AD}{BD}$.

Lời giải a) Tứ giác $MEHF$ có $\widehat{HEM}=\widehat{HFM}=90^0$



Suy ra $\widehat{HEM}+\widehat{HFM}=180^0$. Vậy tứ giác $MEHF$ nội tiếp.

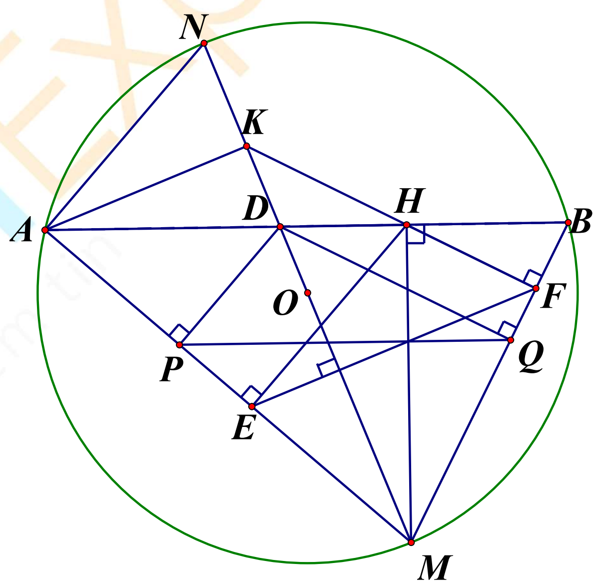
Ta có $\widehat{HKM}+\widehat{HFE}=90^0$ (vì $MK\perp EF$)

$\widehat{HAM}+\widehat{HME}=90^0$ (Vì $MH\perp AB$)

Mà $\widehat{HFE}=\widehat{HME}$ (do $MEHF$ nội tiếp)

Suy ra $\widehat{HKM}=\widehat{HAM}$. Do đó tứ giác $AMHK$ nội tiếp.

b) Ta có $\widehat{ANM}=\widehat{ABM}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$) (1)



Mà tứ giác $MEHF$ nội tiếp suy ra $\widehat{HEF}=\widehat{HMF}$

Mặt khác $\widehat{HEF}=\widehat{NMA}$ (cùng phụ với $\widehat{FEM}$)

Suy ra $\widehat{HMF}=\widehat{NMA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra ΔANM đồng dạng với ΔHBM.

Mà $\widehat{BHM}=90^0$ nên $\widehat{NAM}=90^0$ hay $AN\perp AM$.

Hơn nữa $HE\perp AM$ nên $AN//HE$.

Ta có $\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{S_{\Delta MAH}}{S_{\Delta MBH}}=\dfrac{AM.HE}{BM.HF}$ (3)

Kẻ $DP\perp MA,\ DQ\perp MB$ ta có: $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{S_{\Delta MAD}}{S_{\Delta MBD}}=\dfrac{AM.DP}{BM.DQ}$ (4)

Mặt khác hai tứ giác $MEHF$ và $MPDQ$ nội tiếp nên $\widehat{EHF}=\widehat{PDQ}$ (cùng bù $\widehat{AMB}$) (*)

Trong tứ giác $MEHF$ có $\widehat{HEF}=\widehat{HMF}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{HF}$)

Tứ giác $MPDQ$ nội tiếp nên $\widehat{PMD}=\widehat{PQD}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{PD}$)

Mà $\widehat{PMD} = \widehat{HMF}$ (chứng minh trên). Do đó $\widehat{PQD} = \widehat{HEF}$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra hai tam giác EHF và QDP đồng dạng (g - g)

Suy ra $\dfrac{HE}{DQ} = \dfrac{HF}{DP}$ (5)

Từ $(3),(4)$ và (5) suy ra $\dfrac{AM^2}{BM^2} = \dfrac{AH}{BD} \cdot \dfrac{AD}{BH}$ (điều phải chứng minh).

Bài 7. (Đề thi vào 10 – Toán chung (Lớp KHTN) – tỉnh Nam Định năm học 2024 – 2025)

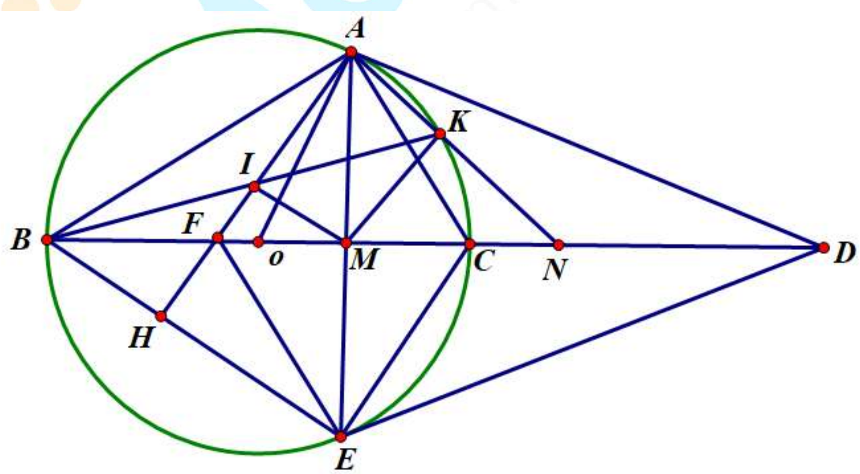
Cho đường tròn (O) với đường kính BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D, gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam giác ABE, AH cắt BC tại F. Gọi I là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N.

a) Chứng minh các điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn và $DB.DC = DM.DO$.

b) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $\widehat{BAH} = \widehat{ADB}$.

c) Chứng minh $MK \perp AN$ và $MD = 2MN$.

Lời giải



a) Có AE vuông góc với BC tại M nên $\widehat{FME} = 90^0$ suy ra M thuộc đường tròn đường kính EF (1).

$\widehat{EHF} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính EF (2).

Từ (1), (2) suy ra 4 điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn.

AM là đường cao của tam giác vuông ADO nên ta có $AD^2 = DM.DO$ (3)

Xét ΔDAC và ΔDBA có $\begin{cases}\widehat{DAC} = \widehat{DBA} \\ \widehat{D} \text{ chung}\end{cases} \Rightarrow \Delta DAC \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{DC}{DA} = \dfrac{DA}{DB} \Rightarrow DA^2 = DB.DC$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $DB.DC = DM.DO$

b) $OC \perp AE \Rightarrow M$ là trung điểm của AE.

Ta có $EF // AC$ (vì cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEF} \Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMF\,(g.c.g)$

$\Rightarrow MC = MF$ nên $AFEC$ là hình thoi.

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{DAM}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AE}$)

Mà $\begin{cases}\widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^0 \\ \widehat{DAM} + \widehat{ADB} = 90^0\end{cases}$. Do đó $\widehat{BAH} = \widehat{ADB}$.

c) Có $\widehat{KAM} = \widehat{KBE}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{KE}$) và $\widehat{KBE} = \widehat{KIM}$ (vì $IM // BE$)

$\Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{KIM}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $AKMI$ nội tiếp $\Rightarrow MK \perp AN$ (vì $\widehat{MIA} = 90^0$)

Xét ΔBHI và ΔAMN, có: $\widehat{BHI} = \widehat{AMN} = 90^0$, $\widehat{IBH} = \widehat{NAM}$ (chắn $\overset{\frown}{KE}$)

$\Rightarrow \Delta BHI \backsim \Delta AMN \Rightarrow \dfrac{HB}{MA} = \dfrac{HI}{MN}$ (5)

Xét ΔBHA và ΔAMD, có:

$\widehat{BHA} = \widehat{AMD} = 90^0$, $\widehat{ABH} = \widehat{DAM}$

$\Rightarrow \Delta BHA \backsim \Delta AMD \Rightarrow \dfrac{HB}{MA} = \dfrac{HA}{MD}$ (6)

Từ (5) và (6) ta được $\dfrac{HI}{MN} = \dfrac{HA}{MD}$, mà $HA = 2HI$ nên $MD = 2MN$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 – Toán Chung (Lớp KHXH) – năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn (O) với đường kính BC. Trên tia đối của tia CB lấy điểm D, gọi DA là tiếp tuyến của đường tròn (O) với A là tiếp điểm. Kẻ đường thẳng qua A vuông góc với BC tại M và cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Gọi AH là đường cao của tam giác ABE, AH cắt BC tại F.

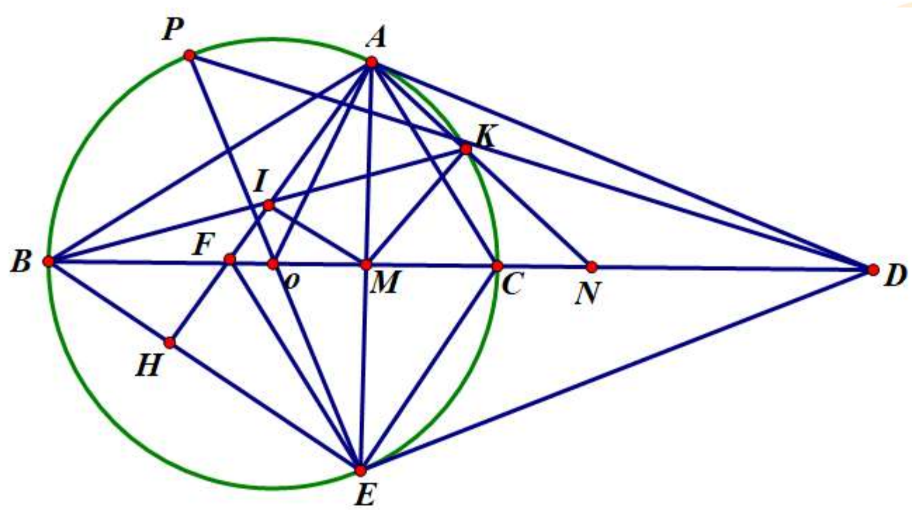
Gọi I là trung điểm của đoạn AH, đường thẳng BI cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), AK cắt BD tại N.

a) Chứng minh các điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn và $DB.DC = DM.DO$.

b) Chứng minh $AFEC$ là hình thoi và $\widehat{BAH} = \widehat{ADB}$.

c) Chứng minh $MK \perp AN$ và đường thẳng DK cắt đường thẳng OE tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Lời giải



a) Ta có AE vuông góc với BC tại M nên $\widehat{FME} = 90^0$ suy ra M thuộc đường tròn đường kính EF (1).

$\widehat{EHF} = 90^0$ suy ra H thuộc đường tròn đường kính EF (2).

Từ (1), (2) suy ra 4 điểm E, M, F, H cùng thuộc một đường tròn.

AM là đường cao của tam giác vuông ADO nên ta có $AD^2 = DM.DO$ (3)

Xét ΔDAC và ΔDBA có $\begin{cases} \widehat{DAC} = \widehat{DBA} \\ \widehat{D} \text{ chung} \end{cases} \Rightarrow \Delta DAC \backsim \Delta DBA \Rightarrow \dfrac{DC}{DA} = \dfrac{DA}{DB} \Rightarrow DA^2 = DB.DC$ (4)

Từ (3) và (4) ta có $DB.DC = DM.DO$

b) $OC \perp AE \Rightarrow M$ là trung điểm của AE.

Ta có $EF // AC$ (vì cùng vuông góc với AB) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{MEF}$

$\Rightarrow \Delta AMC = \Delta EMF$ (g.c.g) $\Rightarrow MC = MF$ nên $AFEC$ là hình thoi

Ta có $\widehat{ABH} = \widehat{DAM}$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{AE}$). Mà $\begin{cases} \widehat{ABH} + \widehat{BAH} = 90^0 \\ \widehat{DAM} + \widehat{ADB} = 90^0 \end{cases}$. Do đó $\widehat{BAH} = \widehat{ADB}$.

c) Gọi P là giao điểm của đường thẳng DK và OE.

$\widehat{KAM} = \widehat{KBE}$ (cùng chắn cung KE)

$\widehat{KBE} = \widehat{KIM}$ (vì $IM // BE$)

$\Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{KIM} \Rightarrow$ Tứ giác $AKMI$ nội tiếp $\Rightarrow MK \perp AN$ (vì $\widehat{MIA} = 90^0$)

$\widehat{KMD} = \widehat{KAE}$ (cùng phụ với $\widehat{AMK}$)

$\widehat{KAE} = \widehat{KED}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và góc nội tiếp cùng chắn cung KE)

$\Rightarrow \widehat{KMD} = \widehat{KED}$ nên tứ giác $DKME$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{PDE}$ (cùng bù với $\widehat{KME}$)

Do đó $\Delta AKM \backsim \Delta PED$ (vì có $\widehat{AMK} = \widehat{PDE}, \widehat{PED} = \widehat{AKM} = 90^0$)

$\Rightarrow \widehat{KAM} = \widehat{EPD}$ hay $\widehat{KAE} = \widehat{EPK}$ nên P nằm trên đường tròn (O).

Bài 9. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hải Dương năm học 2024 – 2025)

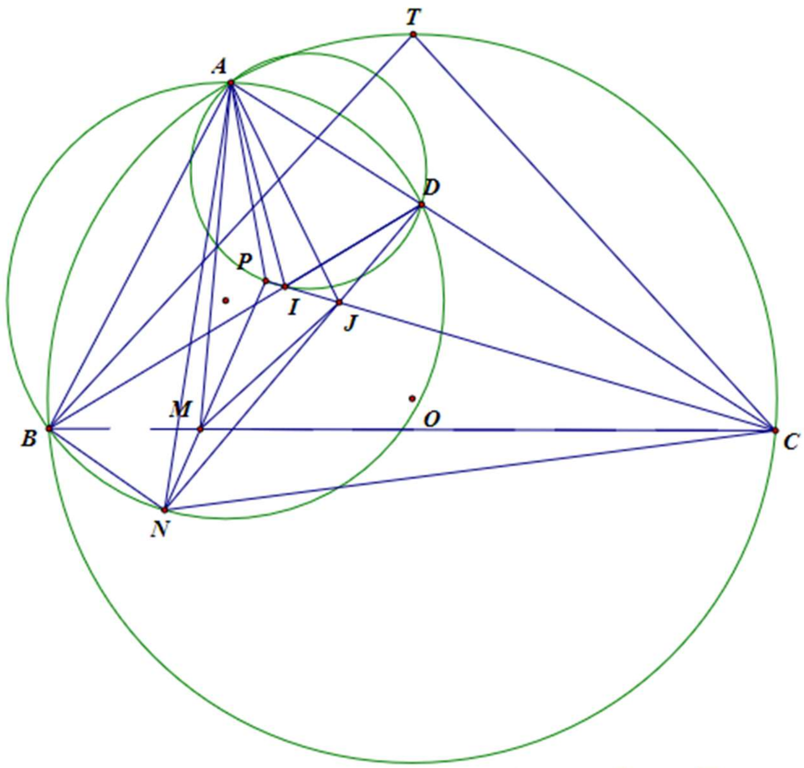
Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O), các điểm B,C thay đổi trên (O) sao cho B,C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BI cắt AC tại D. Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC.

a) Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.

b) Gọi P là giao điểm khác I của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N. Chứng minh rằng bốn điểm N,M,J,C thuộc một đường tròn.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC. Chứng minh khi B,C thay đổi trên (O) T luôn thuộc một đường cố định.

Lời giải



a) Từ giả thiết ta có $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{ACM} = \widehat{BCA} \Rightarrow \triangle MAC \backsim \triangle ABC\,(g-g)$.

Lại có J, I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAC, \triangle ABC \Rightarrow \triangle CJM \backsim \triangle CAI$.

b) Do $\triangle CIA \backsim \triangle CJM$ nên $\dfrac{CM}{CJ} = \dfrac{CA}{CI}$.

Mà tứ giác $ADIP$ nội tiếp nên $CI \cdot CP = CD \cdot CA \Rightarrow \dfrac{CP}{CD} = \dfrac{CA}{CI}$

Do đó $\dfrac{CM}{CJ} = \dfrac{CP}{CD}$, lại có $\widehat{MCP} = \widehat{JCD} \Rightarrow \triangle MCP \backsim \triangle JCD\,(\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{CPM} = \widehat{CDJ}$

Suy ra tứ giác $NCDP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PND} = \widehat{PCD} = \widehat{MCJ}$

$\Rightarrow$ Bốn điểm N, M, J, C cùng thuộc một đường tròn.

c) Từ câu 2, do tứ giác $NMJC$ nội tiếp nên $PM \cdot PN = PJ \cdot PC$.

Vì $\widehat{MAC} = \widehat{ABC} \Rightarrow \widehat{JAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{MAC} = \dfrac{1}{2}\widehat{ABC} = \widehat{IBC}$

Lại có $\widehat{PJA}=\widehat{JAC}+\widehat{JCA}=\widehat{IBC}+\widehat{ICB}=\widehat{DIC}=\widehat{PAC}\left(^{*}\right)$ nên tam giác PAC đồng dạng tam giác PJA

Từ đó $\dfrac{PA}{PJ}=\dfrac{PC}{PA}$ suy ra $PJ\cdot PC=PA^2$ suy ra $PM\cdot PN=PA^2$.

Suy ra $\dfrac{PM}{PA}=\dfrac{PA}{PN}$.

Từ đó tam giác PAM đồng dạng tam giác PNA

Ta được: $\widehat{ANP}=\widehat{PAM}=\widehat{CAM}-\widehat{CAP}=\widehat{ABC}-\widehat{IBC}-\widehat{ICB}$ (do (*)) $=\dfrac{1}{2}\left(\widehat{ABC}-\widehat{ACB}\right)$.

Vậy $\widehat{ANP}+\widehat{PND}=\dfrac{1}{2}\widehat{ABC}$ (vì $\widehat{PND}=\dfrac{1}{2}\widehat{ACB}$)

Tức là $\widehat{AND}=\widehat{ABD}$ hay tứ giác $ABND$ nội tiếp.

Từ đó $\widehat{BNC}=\widehat{BND}+\widehat{DNC}=180^\circ-\widehat{BAC}+\widehat{DPC}$

$=180^\circ-\widehat{BAC}+\widehat{DAI}=180^\circ-\widehat{BAC}+\widehat{IAC}=180^\circ-\widehat{BAC}+\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}=180^\circ-\dfrac{1}{2}\widehat{BAC}$

Nên $2\left(180^\circ-\widehat{BNC}\right)=\widehat{BAC}$

Mà T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC nên $\widehat{BTC}=2\left(180^\circ-\widehat{BNC}\right)$

Suy ra $\widehat{BAC}=\widehat{BTC}$, tức T thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC cố định, điều phải chứng minh.

Bài 10. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Giang năm học 2024 – 2025)

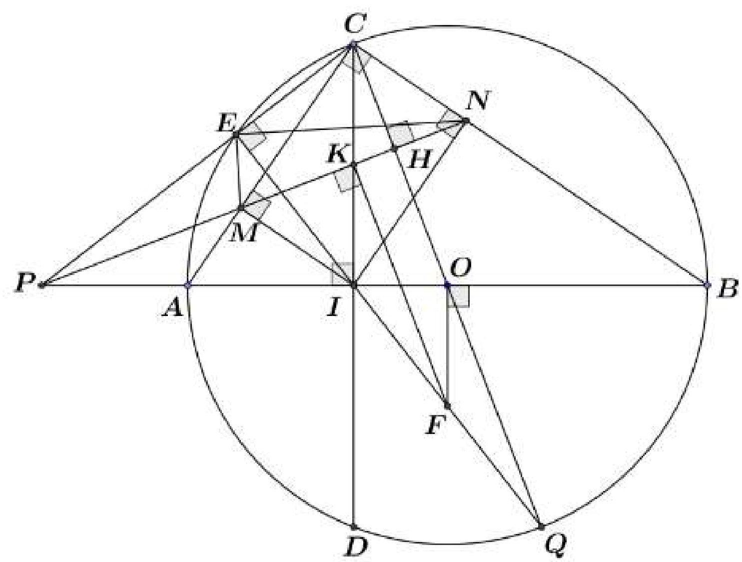
Cho đường tròn (O) đường kính AB, I là điểm bất kì thuộc đoạn thẳng OA (I khác A và O), dây cung CD của đường tròn (O) vuông góc với AB tại I. Từ điểm I kẻ các đường thẳng IM, IN lần lượt vuông góc với các đường thẳng AC, BC (M thuộc AC, N thuộc BC). Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng MN và AB, E là giao điểm thứ hai của đường thẳng PC và đường tròn (O) (E khác C).

a) Chứng minh tứ giác $AMNB$ nội tiếp được trong một đường tròn và $PM.PN=PA.PB$.

b) Gọi F là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMNB$. Chứng minh đường thẳng IE vuông góc với đường thẳng CE và ba điểm E, I, F thẳng hàng.

c) Chứng minh biểu thức $\dfrac{MA.AB.BN}{CP.CD.CE}$ có giá trị không đổi khi điểm I di chuyển trên đoạn thẳng OA (I khác A và O).

Lời giải



*a) * Chứng minh tứ giác $AMNB$ nội tiếp.*

Theo giả thiết suy ra tứ giác $IMCN$ là hình chữ nhật (tứ giác có ba góc vuông)

Nên $\widehat{CMN} = \widehat{CIN}$.

Mặt khác $\widehat{CIN} = \widehat{CBI}$ (cùng phụ với góc $\widehat{ICB}$)

suy ra $\widehat{CMN} = \widehat{ABN}$.

Xét tứ giác $AMNB$ có

$\widehat{AMN} + \widehat{ABN} = \widehat{AMN} + \widehat{CMN} = 180^\circ$ và

hai góc $\widehat{AMN}$ và $\widehat{ABN}$ ở hai vị trí đối diện nên tứ giác $AMNB$ nội tiếp.

** Chứng minh $PA.PB = PM.PN$.*

Xét hai tam giác PAM và PNB có: Góc tại đỉnh P chung; $\widehat{PMA} = \widehat{CMN} = \widehat{PBN}$.

Từ đó hai tam giác PAM đồng dạng với tam giác PNB (g - g)

Suy ra $\dfrac{PA}{PN} = \dfrac{PM}{PB} \Rightarrow PA.PB = PM.PN$

b) * Ta chứng minh $IE \perp CE$

Chỉ ra được $PA.PB = PE.PC$ (chứng minh hai tam giác đồng dạng)

Theo phần a) ta có $PA.PB = PM.PN$ từ đó suy ra tứ giác $MECN$ nội tiếp và M, E, C, N, I cùng nằm trên đường tròn đường kính MN và CI, do đó $IE \perp CE$ (1).

* Gọi Q là điểm đối xứng của C qua O. Từ cách dựng ta có CQ là đường kính của đường tròn (O) nên $\widehat{QEC} = 90^\circ$ hay $QE \perp EC$ (2).

Từ (1), (2) suy ra Q, và E thẳng hàng (3) I

Ta có $FO//CK$ vì cùng vuông góc với AB (4)

* Ta chứng minh I, F và Q thẳng hàng. Thực vậy:

Gọi H là giao điểm của OC với MN, khi đó ta có $\widehat{HCN} = \widehat{OBC}$ (do tam giác OBC cân tại O); $\widehat{CNH} = \widehat{MAB}$ (do tứ giác $AMNB$ nội tiếp). Suy ra $\widehat{HCN} + \widehat{HNC} = \widehat{CBA} + \widehat{CAB} = 90^\circ \Rightarrow QC \perp MN$.

Gọi K là tâm của hình chữ nhật $IMCN$ khi đó K là trung điểm của đoạn MN nên $FK \perp MN$, từ đó ta được $FK//QC$ (5).

Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ Tứ giác $FKCO$ là hình bình hành $\Rightarrow FO//CI$ và $FO = \frac{1}{2}CI$.

Do đó FO là đường trung bình của tam giác QCI nên F là trung điểm của đoạn IQ suy ra I, F và Q thẳng hàng (6).

Từ (3) và (6) suy ra E, I, F thẳng hàng.

c) Ta có $AM.AC = AI^2$, $BN.BC = BI^2$. Từ trên suy ra $AM.AC.BC.BN = AI^2.BI^2$

$\Rightarrow AM.AB.CI.BN = CI^4$ (vì $AC.BC = AB.CI$ và $AI.BI = CI^2$) $\Rightarrow AM.AB.BN = CI^3$ (7)

Ta có $CP.CE = CI^2$. Mà $CD = 2CI \Rightarrow CP.CE.CD = 2CI^3$ (8).

Từ (7) và (8) ta được $\dfrac{MA.AB.BN}{CP.CD.CE} = \dfrac{1}{2}$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lai Châu năm học 2024 – 2025)

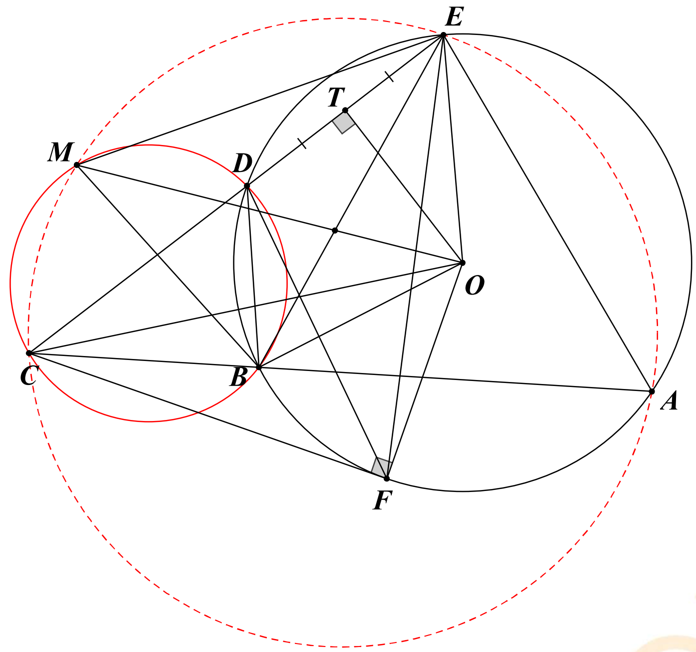
Cho A, B là hai điểm cố định nằm trên đường tròn tâm O, bán kính $R = 2$. Giả sử C là điểm cố định trên tia đối của tia BA sao cho $CO = 4$. Một cát tuyến thay đổi qua C cắt đường tròn (O) tại D và E (D nằm giữa C, E).

a) Chứng minh rằng: $CD.CE = 12$.

b) Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác BCD và ACE cắt nhau tại giao điểm thứ hai M. Biết rằng bốn điểm O, B, M, E tạo thành tứ giác $OBME$. Chứng minh rằng: Tứ giác $OBME$ nội tiếp.

c) Khi M di chuyển, chứng minh rằng: $MO\,.\,MC \le 8$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng: $CD.CE = 12$.

Gọi T là trung điểm DE.

$$CD.CE = (CT - TD)(CT + TE),\ (TD = TE)$$
$$= CT^2 - TD^2 = CO^2 - OT^2 - TD^2 = CO^2 - OD^2 = CO^2 - R^2 = 12$$

b) Chứng minh tứ giác $OBME$ nội tiếp.

$$\widehat{EOB} = 2\widehat{BAE} = 2\widehat{BDC} = 2\widehat{BMC} = 2\left(\widehat{EMC} - \widehat{EMB}\right) = 2\left(180^\circ - \widehat{EAB} - \widehat{EMB}\right) = 360^\circ - \widehat{EOB} - 2\widehat{EMB}$$

suy ra $\widehat{EOB} + \widehat{EMB} = 180^\circ$ hay tứ giác $OBME$ nội tiếp.

c) Khi M luôn di chuyển, chứng minh rằng: $MO.MC \le 8$.

$$\widehat{OMC} = \widehat{OMB} + \widehat{BMC} = \widehat{OEB} + \widehat{EAB} = 90^\circ$$

M luôn di chuyển trên đường tròn đường kính OC cố định

Suy ra $4^2 = MO^2 + MC^2 \ge 2MO.MC \Rightarrow 8 \ge MO.MC$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Hải Phòng năm học 2024 – 2025)

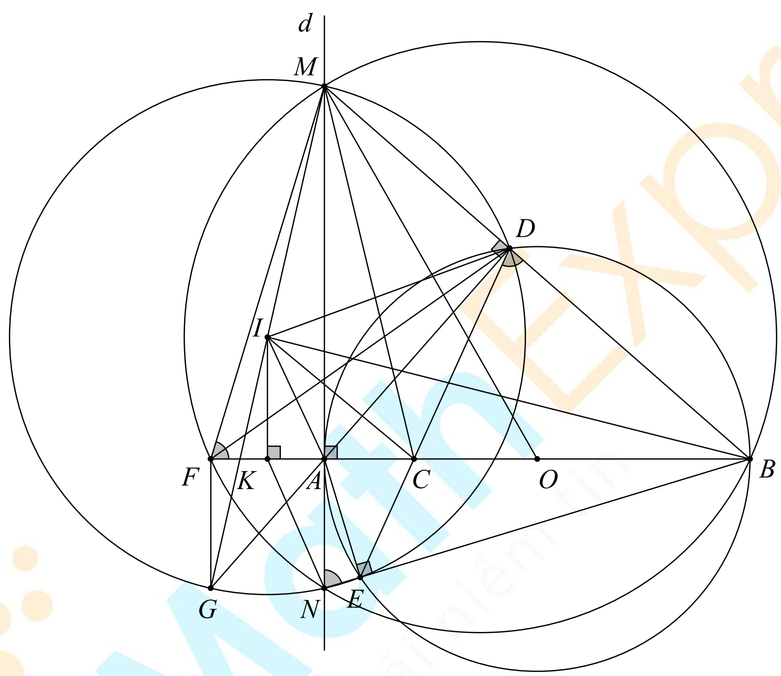
Cho đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến tại điểm A của đường tròn (O). Lấy điểm C cố định thuộc đoạn thẳng OA (C khác A và khác O). Gọi DE là dây cung thay đổi của đường tròn (O) nhưng luôn đi qua điểm C (DE khác AB). Các tia BD và BE cắt đường thẳng d theo thứ tự tại các điểm M và N.

a) Chứng minh tứ giác $DENM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Gọi F là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và đường thẳng AB. Chứng minh F là điểm cố định và tích $AM.AN$ không đổi khi dây cung DE của đường tròn (O) thay đổi.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $DENM$. Xác định vị trí của dây cung DE để tổng $IB+IM$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên $AD\perp BM$ và $AE\perp BN$.

Áp dụng hệ thức lượng trong các tam giác vuông AMB và ANB ta được

$AB^2=BD.BM=BE.BN$.

Từ đó ta có tứ giác $DENM$ là tứ giác nội tiếp đường tròn.

b) Xét trong đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và do tứ giác $DENM$ nội tiếp nên ta có

$\widehat{MFB}=\widehat{MNB}=\widehat{CDB}$.

Từ đó tứ giác $CDMF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Suy ra $BD.BM=BC.BF=AB^2$ (không đổi).

Vậy $BF=\dfrac{AB^2}{BC}$ không đổi. Mà B cố định, suy ra F cố định.

Lại có $AF.AB=AM.AN$ mà AF, AB không đổi nên $AM.AN$ không đổi.

c) Gọi r là bán kính của (I) thì $r^2-IA^2=AN.AM$ không đổi.

Đặt $r^2-IA^2=AN.AM=a$. Ta cũng có $CD.CE=r^2-IC^2=CA.CB$ không đổi.

Đặt $b=CD.CE=r^2-IC^2$. Suy ra $IC^2-IA^2=a-b$. Gọi K là hình chiếu vuông góc của I trên đường thẳng AB. Theo định lý Pythagore ta có

$a-b=IC^2-IA^2=\left(IC^2-IK^2\right)-\left(IA^2-IK^2\right)=CK^2-AK^2=\left(CK-AK\right)\left(CK+AK\right)$ không đổi.

Từ đây kết hợp với $CK-AK=AC$ không đổi, suy ra $CK+AK$ cũng không đổi, hay CK và AK đều không đổi. Mà A và C cố định nên K cố định.

Cách 2: Để chứng minh K cố định.

Kẻ đường kính MG của đường tròn (I). Ta có D, A, G thẳng hàng.

Mặt khác $AD.AG=AM.AN=AF.AB$ nên tứ giác $BDFG$ nội tiếp.

Suy ra $GF\perp BF$.

Do $MA // IK // GF$ và I là trung điểm MG nên K là trung điểm FA.

Mà F, A cố định nên K cố định.

Ta có $IB\ge KB$ không đổi.

Dấu bằng xảy ra khi $I\equiv K$ tương ứng với $DE\perp AB$ tại C.

Lại có $BA^2=BD.BM=IB^2-r^2\Rightarrow r^2=IB^2-BA^2$.

Mà BA không đổi nên $r=IM$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IB nhỏ nhất.

Vậy tổng $IM+IB$ đạt giá trị nhỏ nhất khi DE vuông góc AB tại C.

Bài 13 (Đề thi vào 10 – Chuyên Nga Pháp Trung – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025):

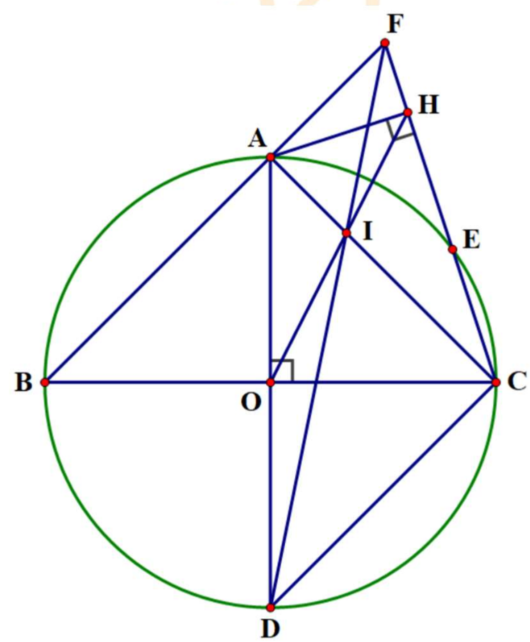
Cho đường tròn (O) có đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa của cung BC. Kẻ đường kính AD. Lấy điểm E thuộc cung nhỏ AC (E khác A và C). Gọi F là giao điểm của hai đường thẳng AB và CE. Kẻ AH vuông góc với FC $(H \in FC)$, AC cắt OH tại I. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $AHCO$ nội tiếp.

b) HO là tia phân giác của góc AHC và $AI.AH = HF.CI$

c) Ba điểm F, I, D thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AHC} = \widehat{AOC} = 90^\circ$ (giả thiết)

$\Rightarrow \widehat{AHC} + \widehat{AOC} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà chúng ở vị trí đối nhau

$\Rightarrow$ Tứ giác $AHCO$ nội tiếp.

b) Tứ giác $AHCO$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AHO} = \widehat{ACO}; \widehat{OAC} = \widehat{OHC}$

Mà $\widehat{ACO} = \widehat{OAC}$ (do $OA = OC$)

Suy ra $\widehat{AHO} = \widehat{OHC}$, hay HO là tia phân giác của $\widehat{AHC}$.

Tam giác HAC có HI là phân giác $\Rightarrow \dfrac{AI}{CI} = \dfrac{AH}{CH}$ (1)

Chứng minh được $\Delta HAF \backsim \Delta HCA$ (*hoặc dùng hệ thức lượng*) $\Rightarrow \dfrac{AH}{CH} = \dfrac{HF}{AH}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{AI}{CI} = \dfrac{HF}{AH} \Rightarrow AI.AH = HF.CI$ (điều phải chứng minh)

$\Delta HAF \backsim \Delta HCA \Rightarrow \dfrac{HF}{HA} = \dfrac{AF}{AC}$, mà $\dfrac{HF}{AH} = \dfrac{AI}{CI}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \dfrac{AF}{AC} = \dfrac{AI}{CI}$, mà $AC = CD$

$\Rightarrow \dfrac{AF}{CD} = \dfrac{AI}{CI}$

Chứng minh được $\Delta AFI \backsim \Delta CDI$ $(c.g.c)$ $\Rightarrow \widehat{AIF} = \widehat{CID}$

$\Rightarrow \widehat{AIF}+\widehat{AID}=\widehat{CID}+\widehat{AID}=180^0 \Rightarrow\ E,I,D$ thẳng hàng.

Bài 14. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025)

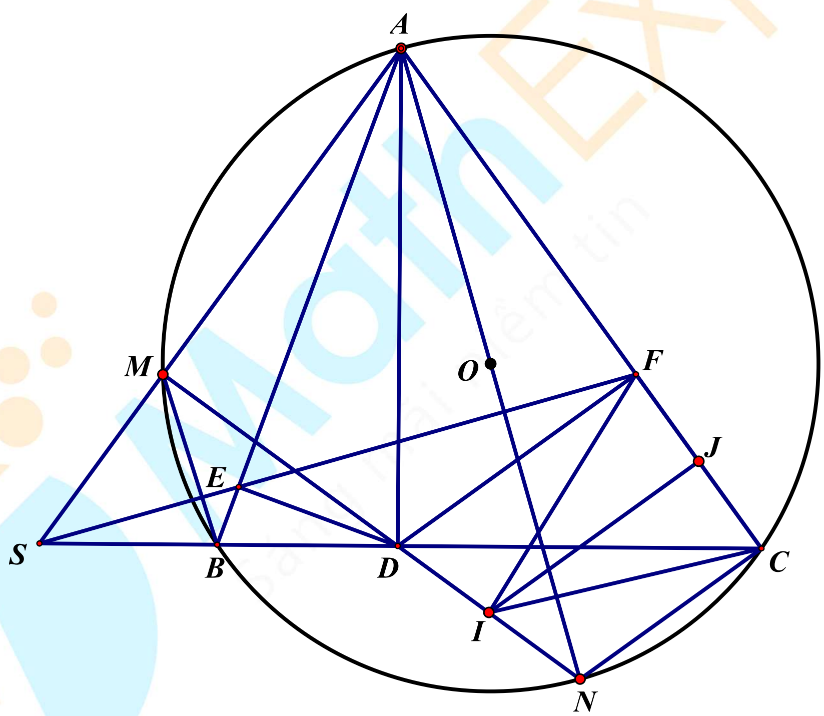
Cho tam giác nhọn $ABC(AB<AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AD của tam giác ABC (D thuộc BC). Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của điểm D trên các cạnh AB, AC. Gọi S là giao điểm của EF và BC.

a) Chứng minh: $\widehat{EFD}=\widehat{EDB}$

b) Chứng minh tứ giác nội $BEFC$ nội tiếp và $SD^2=SB.SC$

c) Đường thẳng SA cắt đường tròn (O) tại M (M khác A), MD cắt đường tròn (O) tại N (N khác M). Gọi I là trung điểm của DN. Chứng minh $IF=IC$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AED}=\widehat{AFD}=90°$ (theo giả thiết) $\Rightarrow \widehat{AED}+\widehat{AFD}=180°$, mà chúng ở vị trí đối nhau.

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEDF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EFD}=\widehat{EAD}$ (1)

Trong tam giác ABD vuông tại D, đường cao DE, ta có $\widehat{EAD}=\widehat{EDB}$ (2)

(cùng phụ với góc $\widehat{EBD}$)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{EFD} = \widehat{EDB}$

b) Tam giác ADC vuông tại D, đường cao DF, ta có $\widehat{ACD} = \widehat{ADF}$ (3)

(cùng phụ với góc $\widehat{DAF}$)

Theo phần a) tứ giác $AEDF$ nội tiếp, suy ra $\widehat{AEF} = \widehat{ADF}$ (4)

Từ (3) và (4) ta có: $\widehat{ACD} = \widehat{AEF} \Rightarrow \widehat{BEF} + \widehat{BCF} = \widehat{BEF} + \widehat{AEF} = 180°$.

Suy ra tứ giác $BEFC$ nội tiếp $\Rightarrow \Delta SBE \backsim \Delta SFC \Rightarrow \dfrac{SB}{SF} = \dfrac{SE}{SC} \Rightarrow SB.SC = SE.SF$ (5)

Chứng minh được $\Delta SED \backsim \Delta SDF \Rightarrow \dfrac{SE}{SD} = \dfrac{SD}{SF} \Rightarrow SD^2 = SE.SF$. (6)

Từ (5) và (6) suy ra $SD^2 = SB.SC$ (7)

c) Chỉ ra được $\Delta SBM \backsim \Delta SAC \Rightarrow \dfrac{SB}{SA} = \dfrac{SM}{SC} \Rightarrow SB.SC = SM.SA$ (8)

Từ (7) và (8) ta được $SD^2 = SA.SM \Rightarrow \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{SD}{SA} \Rightarrow \Delta SMD \backsim \Delta SDA$ (c.g.c).

Từ đó suy ra $\widehat{SMD} = \widehat{SDA} = 90° \Rightarrow AN$ là đường kính của đường tròn (O). Suy ra $\widehat{ACN} = 90°$.

Lại có $\widehat{DFC} = 90°$ nên tứ giác $CNDF$ là hình thang vuông.

Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng FC.

Ta có IJ là đường trung bình của $CNDF$, suy ra $IJ \perp FC$.

Hay IJ là đường trung trực của FC nên $IF = IC$.

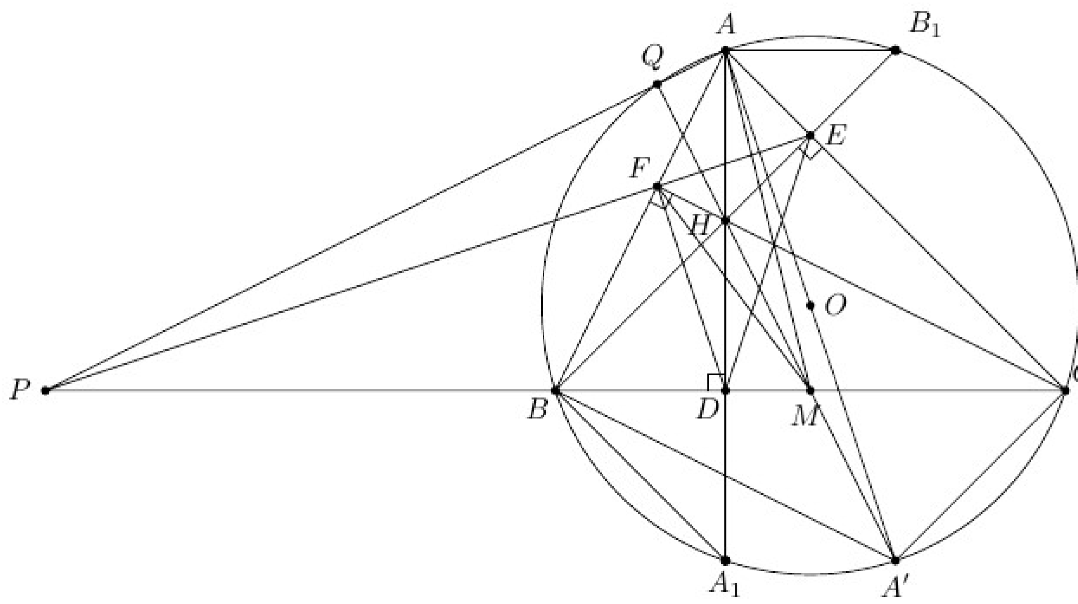
Bài 15. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bình Phước năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (với $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$). Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng với H qua D và E; M là trung điểm của BC. Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại điểm P.

a) Chứng minh các điểm A, B, C, A_1, B_1 cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $PE \cdot PF = PM \cdot PD$ và H là trực tâm của tam giác APM.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{AHE}$ (cùng phụ $\widehat{HAE}$) $= \widehat{AB_1B}$ (H đối xứng với B_1 qua AC)

$\widehat{BHD} = \widehat{AHE}$ (đối đỉnh) $= \widehat{BA_1A}$ (vì A_1 đối xứng với H qua BC)

Do đó $\widehat{AB_1B} = \widehat{BA_1A} = \widehat{BCA}$ suy ra các điểm A, B, C, A_1, B_1 cùng thuộc một đường tròn.

b) Ta có $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^0 + 90^0 = 180^0 \Rightarrow AEHF$ nội tiếp.

Tương tự các tứ giác $AFDC, EHDC$ nội tiếp.

Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm $M \Rightarrow MF = MC$.

Hơn nữa $\widehat{DMF} = \widehat{MFC} + \widehat{MCF} = 2.\widehat{MCF}$ (do tam giác MFC cân tại M) (1).

Mặt khác $\widehat{DCF} = \widehat{FAD} = \widehat{FEH}$ (do $AFDC$, $AFHE$ nội tiếp) (2).

Vì tứ giác $HDCE$ nội tiếp nên $\widehat{HED} = \widehat{HCD}$ (3).

Từ (1),(2),(3) suy ra $\widehat{FMD} = \widehat{FED}$.

Từ đó dẫn tới hai tam giác PFM và PDE đồng dạng (g - g)(vì $\widehat{FPD}$ chung và $\widehat{PED} = \widehat{PMF}$)

Suy ra $\dfrac{PF}{PD} = \dfrac{PM}{PE} \Rightarrow PF.PE = PM.PD$.

Gọi (O) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Kéo dài AO cắt đường tròn (O) tại điểm A' khác A. Xét tứ giác $BHCA'$ có $BH // A'C$ (cùng vuông góc với AC), tương tự $CH // BA'$ (cùng vuông góc với AB) do đó tứ giác $BHCA'$ là hình bình hành suy ra A', M, H thẳng hàng (4).

Gọi Q là giao điểm của PA với đường tròn $(O) \Rightarrow \widehat{A'QA} = 90^0$ (vì AA' là đường kính của đường tròn (O)).

Ta có $PD.PM = PE.PF$ (theo chứng minh trên)

Hơn nữa $PE.PF = PB.PC$ (vì $EFBC$ nội tiếp P là giao điểm của BC và EF) và $PB.PC = PQ.PA$ (vì $AQBC$ nội tiếp và P là giao điểm của BC và AQ) suy ra $PD.PM = PQ.PA$ suy ra tứ giác $MDQA$ nội tiếp.

Từ đó suy ra $\widehat{MQA} = \widehat{MDA} = 90^0$. Từ đó suy ra A', M, Q thẳng hàng (5).

Từ (4),(5) suy ra Q, H, M, A' thẳng hàng do đó $MH \perp AP$. Mặt khác $AH \perp BC$ (giả thiết) nên H là trực tâm tam giác APM. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 16. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Đường thẳng AO cắt BC tại E. Trên đoạn AO lấy điểm D sao cho $OD = OE$. Đường đi thẳng qua D, vuông góc với BC cắt BC, AC, AB lần lượt tại X, Y, Z. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AYZ cắt lại (O) tại điểm T khác A. Chứng minh rằng:

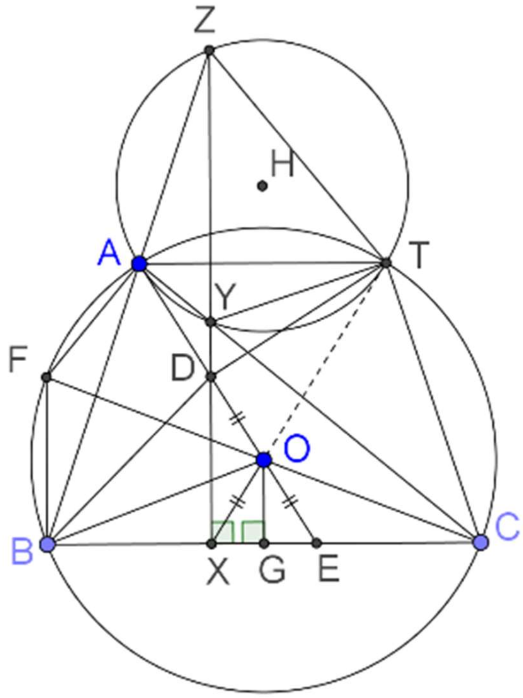
a) Tam giác OXE là tam giác cân.

b) Bốn điểm C, X, Y, T cùng thuộc một đường tròn.

c) $BX = CE$.

d) $AT \parallel BC$.

Lời giải



a) Trong tam giác vuông XDE vuông tại X có $OD = OE$ nên XO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền, do đó $XO = OD = OE$, suy ra tam giác OXE là tam giác cân tại O

b) Ta có $\widehat{YTC} = \widehat{ATC} - \widehat{ATY} = \widehat{ATC} - \widehat{AZX} = 180^0 - \widehat{ABC} - \widehat{AZX}$

$$= 180^0 - (\widehat{ABC} + \widehat{AZX}) = 180^0 - 90^0 = 90^0$$

Tứ giác $CXYT$ có $\widehat{CXY} + \widehat{YTC} = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên là tứ giác nội tiếp, suy ra điều phải chứng minh

c) Hai tam giác OBC và XOE là hai tam giác cân tại O; kẻ $OG \perp BC$ $(G \in BC)$ thì OG là đường trung trực chung của BC và XE; do đó $GB = GC; GX = GE$ suy ra

$GB - GX = GC - GE \Rightarrow BX = CE$

d) Kẻ đường kính CF của đường tròn (O)

$\widehat{OAC} = \widehat{OCA} = 90^0 - \widehat{AFC} = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{AZY}$ suy ra AO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AZTY$

Có $\widehat{TXC} = \widehat{TYC}$ (Hai góc nội tiếp cùng chắn cung TC của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CXYT$)

$\widehat{TYC} = 180^0 - \widehat{TYA} = \widehat{BZT}$

Suy ra $\widehat{TXC} = \widehat{BZT} \Rightarrow$ tứ giác $BXTZ$ là tứ giác nội tiếp, khi đó $\widehat{TAE} = \widehat{AZT} = \widehat{TXE} = \widehat{AEX}$, mà $\widehat{TAE}$ và $\widehat{AEX}$ là hai góc ở vị trí so le trong nên $AT \,//\, BC$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lào Cai năm học 2024 – 2025)

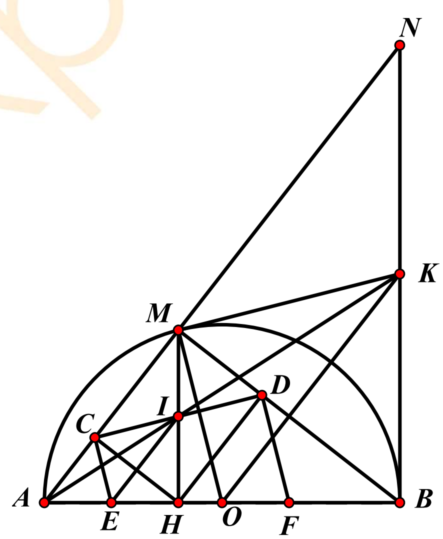
Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Gọi M là một điểm thuộc nửa đường tròn đã cho (M khác A và B), H là hình chiếu của M trên AB. Đường thẳng qua O và song song với MA cắt tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) tại điểm K.

a) Chứng minh tứ giác $OBKM$ nội tiếp.

b) Gọi C, D lần lượt là hình chiếu của H trên các đường thẳng MA và MB. Gọi I là giao điểm của AK và MH. Chứng minh I là trung điểm CD.

c) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AH và BH. Xác định vị trí của điểm M để diện tích tứ giác $CDFE$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



a) Ta có $OM = OB$, mà $OK \perp MB$ nên OK là đường trung trực của đoạn MB. Khi đó: $KB = KM$ mà KB là tiếp tuyến của (O)

và $\triangle OMK = \triangle OBK\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{KMO} = \widehat{KBO} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OBKM$ nội tiếp (tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°).

b) Gọi N là giao điểm của BK và AM.

Chứng minh được $AN // OK$, mà O là trung điểm AB nên K là trung điểm NB.

Áp dụng định lý Thales, ta có: $\dfrac{IM}{IH} = \dfrac{KN}{KB} = 1 \Rightarrow IM = IH$ hay I là trung điểm của MH.

Vì $MCHD$ là hình chữ nhật nên I cũng là trung điểm CD.

c) Vì $MCHD$ là hình chữ nhật nên $IC = IH$.

Xét tam giác ACH vuông tại C có E là trung điểm AH, ta có: $CE = \dfrac{1}{2}AH = EH$.

Xét hai tam giác IEC và IEH, ta có: $\begin{cases} IE \text{ chung} \\ IC = IH \\ EC = EH \end{cases} \Rightarrow \triangle IEC = \triangle IEH\,(c.c.c) \Rightarrow \widehat{ICE} = \widehat{IHE} = 90^\circ$.

Tương tự, ta chứng minh được $\widehat{IDF}=90^\circ \Rightarrow CDFE$ là hình thang vuông.

Diện tích của hình thang vuông $CDFE$ là

$$S=\frac{1}{2}\cdot(CE+DF)\cdot CD=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}AH+\frac{1}{2}BH\right)\cdot MH=\frac{1}{4}\cdot AB\cdot MH.$$

Mặt khác: $MH\le MO=R$ suy ra $S\le\frac{1}{4}\cdot AB\cdot MO=\frac{R^2}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là $\frac{R^2}{2}$ khi $H\equiv O$ hay $MO\perp AB$ nên M là điểm chính giữa của nửa đường tròn (O).

Bài 18. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Yên Bái năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và E là một điểm bất kỳ trên đường tròn đó (E khác A và B). Đường phân giác của góc $\widehat{AEB}$ cắt đoạn thẳng AB tại F và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là K.

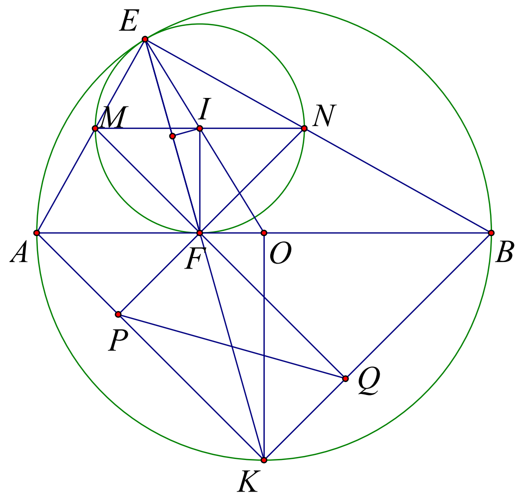
a) Chứng minh ΔKAF và ΔKEA là hai tam giác đồng dạng.

b) Đường trung trực của đoạn thẳng EF cắt OE tại I. Chứng minh rằng đường tròn (I) bán kính IE tiếp xúc với đường tròn (O) tại E và tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

c) Chứng minh $MN//AB$, trong đó M,N lần lượt là giao điểm thứ hai của AE,BE với đường tròn (I)

d) Gọi P là giao điểm của NF và AK; Q là giao điểm của MF và BK. Tìm giá trị nhỏ nhất của chu vi ΔKPQ theo R khi E di chuyển trên đường tròn (O).

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{KAF} = \widehat{KEB} = \widehat{KEA}$ và $\widehat{AKE}$ chung. Nên ΔKAF và ΔKEA là hai tam giác đồng dạng.

b) Ta có: $OI = OE - EI = R - r$ nên (I) tiếp xúc với đường tròn (O) tại E

Do $IE = FI$ nên $\widehat{IEF} = \widehat{IFE}$; $OE = OK$ nên $\widehat{IEF} = \widehat{OKE}$ suy ra $\widehat{IFE} = \widehat{OKE} \Rightarrow FI // OK$

mà $AB \perp OK \left(\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{KB}\right)$ nên suy ra $AB \perp FI$

Vậy đường tròn (I) tiếp xúc với đường thẳng AB tại F.

c) Ta có: $\widehat{MEN} = 90^0$ nên MN là đường kính của (I) mà EF là đường phân giác của góc $\widehat{AEB}$ nên $\widehat{MEF} = 45^0 \Rightarrow \widehat{MIF} = 90^0 \Rightarrow MI \perp IF$ mà $AB \perp FI$. Nên $MN // AB$

d) Ta có: $\widehat{PAF} = \widehat{KEB} = 45^0$ và $\widehat{AFP} = \widehat{NFB} = \widehat{BEF} = 45^0$ nên ΔPAF vuông cân suy ra

$PA = PF$, $\widehat{APF} = 90^0 \Rightarrow \widehat{FPK} = 90^0$.

Tương tự $\widehat{FQK} = 90^0$ mà $\widehat{PFQ} = \widehat{MFN} = 90^0$ suy ra $FPKQ$ là hình chữ nhật.

Suy ra $KQ = PF = AP; QP = KF$.

Do đó : $P_{PKQ} = PK + KQ + PQ = PK + PA + KF = AK + KF$

mà $KF \geq KO = R$ nên $P_{PKQ} \geq AK + R = R\sqrt{2} + R$.

Dấu "=" xảy ra khi $F \equiv O \Rightarrow E$ là điểm chính giữa cung AB

Bài 19. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

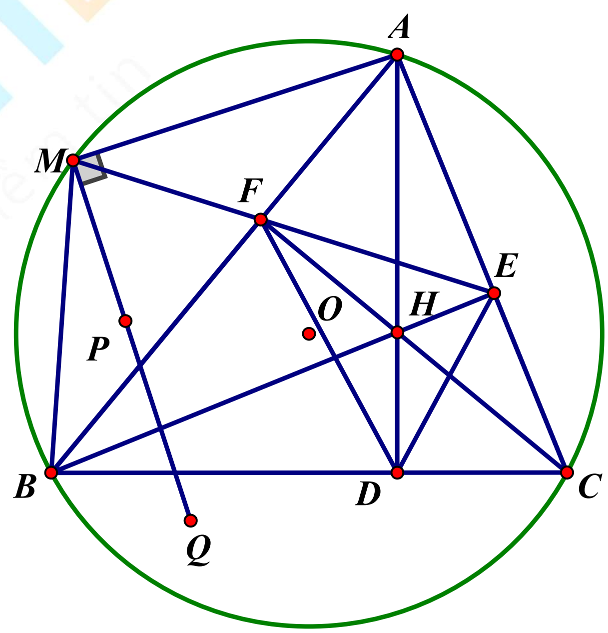
a) Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF.

b) Chứng minh $\dfrac{HD}{AD}+\dfrac{HE}{BE}+\dfrac{HF}{CF}=1.$

c) Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O). Gọi P,Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME. Chứng minh $AM\perp PQ$.

d) Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\dfrac{(AB+BC+CA)^2}{AD^2+BE^2+CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) $\widehat{BFH}=\widehat{BDH}=90^0\Rightarrow\widehat{BFH}+\widehat{BDH}=180^0$ nên

$BFHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow\widehat{HDF}=\widehat{HBF}$.

Tương tự, $CEHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow\widehat{HDE}=\widehat{HCE}$

$BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow\widehat{HBF}=\widehat{HCE}$

Suy ra $\widehat{HDE}=\widehat{HDF}$ nên DA là tia phân giác của góc EDF.

b) Ta có:

$$\frac{HD}{AD}+\frac{HE}{BE}+\frac{HF}{CF}=\frac{\frac{1}{2}HD.BC}{\frac{1}{2}AD.BC}+\frac{\frac{1}{2}HE.AC}{\frac{1}{2}BE.AC}+\frac{\frac{1}{2}HF.AB}{\frac{1}{2}CF.AB}$$

$$=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{HBC}+S_{HAC}+S_{HAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

c) Ta có $\widehat{AEM}=\widehat{ABC}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp)

$\widehat{ABC}=\widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AC}$ của đường tròn (O)) $\Rightarrow\widehat{AEM}=\widehat{AMC}$

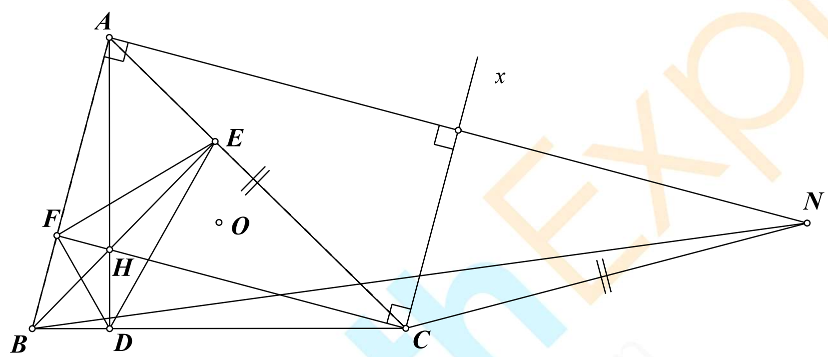
$\Rightarrow \Delta AEM \backsim \Delta AMC(g.g) \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ECM} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{ME}$ của đường tròn (Q) nên AM là tiếp tuyến của $(Q) \Rightarrow AM \perp QM$

Theo trên $\widehat{AMF} = \widehat{ACM}$, mà $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{MA}$ của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{FBM} = \frac{1}{2} sd\,\widehat{MF}$ của đường tròn (P) nên AM là tiếp tuyến của (P)

Vì $AM \perp PM$ và $AM \perp QM$ nên ba điểm P, Q, M thẳng hàng. Suy ra $AM \perp PQ$.

d) Vẽ $Cx \perp CF$. Gọi N là điểm đối xứng của A qua Cx



Vì $AN // CF \Rightarrow \widehat{BAN} = 90°, CN = AC, AN = 2CF$

Ta luôn có $BN \le BC + CN$

ΔABN vuông tại A nên: $AB^2 + AN^2 = BN^2 \Rightarrow AB^2 + 4CF^2 \le (BC + CN)^2$

$\Rightarrow 4CF^2 \le (BC + AC)^2 - AB^2$ (5)

Tương tự: $4AD^2 \le (AB + AC)^2 - BC^2$ và $4BE^2 \le (AB + BC)^2 - AC^2$

Suy ra $4\left(AD^2 + BE^2 + CF^2\right) \le (AB + BC + AC)^2$ hay $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \ge 4$

Đẳng thức (5) xảy ra khi B, C, N thẳng hàng $AC = \frac{1}{2} BN \Rightarrow BC = AC$.

Vì vậy biểu thức đã cho đạt giá trị nhỏ nhất khi $AB = AC = BC$ hay ABC là tam giác đều.

Bài 20. (Đề thi vào 10 – Toán chung – tỉnh Hà Nam năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AB và MN (M,N không trùng với các điểm A,B). Các đường thẳng BM,BN cắt tiếp tuyến kẻ từ điểm A của đường tròn $(O;R)$ lần lượt tại các điểm E,F

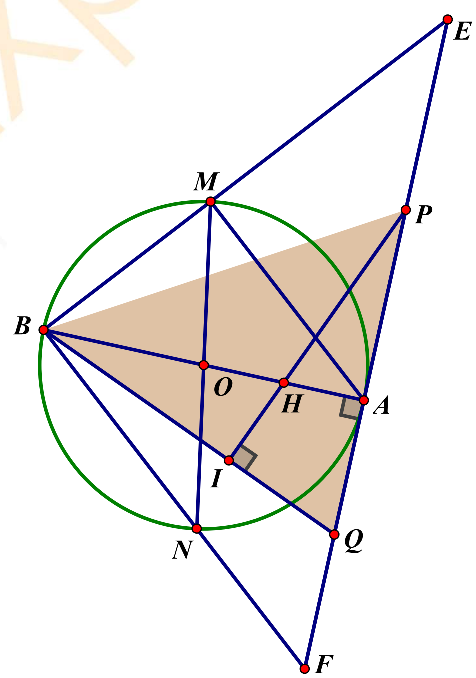
a) Chứng minh $AM//BF$.

b) Chứng minh tứ giác $MNFE$ nội tiếp đường tròn.

c) Gọi P,Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AE,AF. Kẻ đường thẳng PI vuông góc với BQ (I là điểm thuộc BQ), đường thẳng PI cắt OA tại H. Chứng minh H là trung điểm của AO.

d) Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác BPQ theo R khi hai đường kính AB và MN thay đổi.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{AMB}=90^\circ$ (Do AB là đường kính (O))

$\Rightarrow AM\perp BE(1)$

Ta có: $\widehat{MBN}=90^\circ$ (Do MN là đường kính (O))

$\Rightarrow BE\perp BF(2)$

Từ (1), $(2)\Rightarrow AM//BF$

b) Xét $\triangle EAB$ vuông tại A, có AM là đường cao

$\Rightarrow BM.BE=BA^2=2R^2$ (Hệ thức lượng trong tam giác vuông)

Tương tự: $BN\cdot BF=2R^2\Rightarrow BM\cdot BE=BN\cdot BF\left(=2R^2\right)$

$\Rightarrow \dfrac{BM}{BN}=\dfrac{BF}{BE}$

Xét $\triangle BMN$ và $\triangle BFE$ có: $\dfrac{BM}{BN}=\dfrac{BF}{BE},\widehat{EBF}$ chung

$\Rightarrow \triangle BMN\backsim\Delta BFE(\text{c.g.c})\Rightarrow\widehat{BMN}=\widehat{BFE}\Rightarrow MNEF$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

c) Xét $\triangle ABF$ có Q,O lần lượt là trung điểm $AF,AB\Rightarrow QO$ là đường trung bình

$\Rightarrow QO//BF$ mà $BF \perp BE$ (chứng minh trên) $\Rightarrow QO \perp BE$

Xét $\triangle BQE$ có QO, BA là 2 đường cao, $O = QO \cap BA$

$\Rightarrow O$ là trực tâm $\Rightarrow EO \perp BQ$ mà $PI \perp BQ$ (giả thiết) $\Rightarrow PI//EO$

Xét $\triangle AOE$ có $PH//OE$ (chứng minh trên), P trung điểm AE (giả thiết)

$\Rightarrow H$ trung điểm AO

d) Do P, Q trung điểm AE, AF nên: $S_{BPQ} = \frac{1}{2}AB \cdot PQ = \frac{1}{2}AB \cdot \frac{1}{2}EF = \frac{AB \cdot FE}{4}$

Xét $\triangle BFE$ vuông tại B có đường cao $BA \Rightarrow AE.AF = AB^2 = 4R^2$ (Hệ thức lượng)

Theo bất đẳng thức AM - GM có: $EF = AE + AF \geq 2\sqrt{AE.AF} = 2.2R = 4R \Rightarrow S_{BPQ} \geq \frac{2R.4R}{4} = 2R^2$

Dấu " = " xảy ra khi: A là trung điểm EF hay $\triangle BEF$ vuông cân tại B.

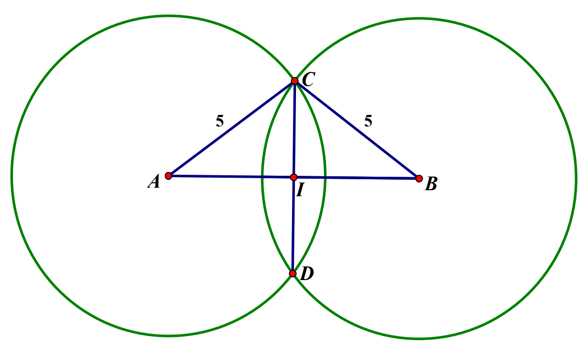
Bài 21. (Đề thi vào 10 – Toán chuyên – tỉnh Tây Ninh năm học 2024 – 2025)

1. Cho đoạn thẳng $AB = 8cm$. Vẽ hai đường tròn tâm A và tâm B có cùng bán kính bằng $5cm$. Tính độ dài dây cung chung của hai đường tròn.

2. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E là các tiếp điểm của AB, AC với (O). Đường thẳng BO và DE cắt nhau tại I. Chứng minh $IM // AB$ với M là trung điểm BC.

3. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 100°$ và $\widehat{ABC} = 20°$. Lấy điểm D thuộc miền trong tam giác sao cho $\widehat{DAB} = 30°$ và $\widehat{ABD} = 10°$. Tính số đo $\widehat{ACD}$.

Lời giải



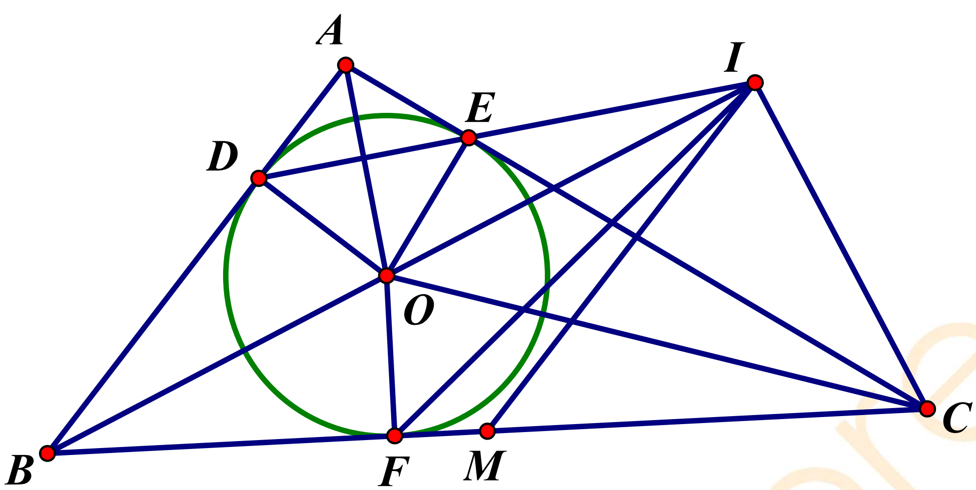
1. Giả sử CD là dây cung chung, I là giao điểm AB và CD

Tam giác ABC cân tại $C \Rightarrow CI \perp AB$; $IA = \frac{1}{2}AB = 4(cm)$

Tam giác ACI vuông tại $I \Rightarrow CI^2 = AC^2 - AI^2 \Rightarrow CI = 3(cm)$

Mặt khác $CD = 2CI \Rightarrow CD = 6cm$

2.



Gọi F là tiếp điểm của BC và (O). Tứ giác $EOFC$ nội tiếp đường tròn đường kính OC (1)

Do BA, BC là 2 tiếp tuyến của (O) nên BO là đường trung trực của DF

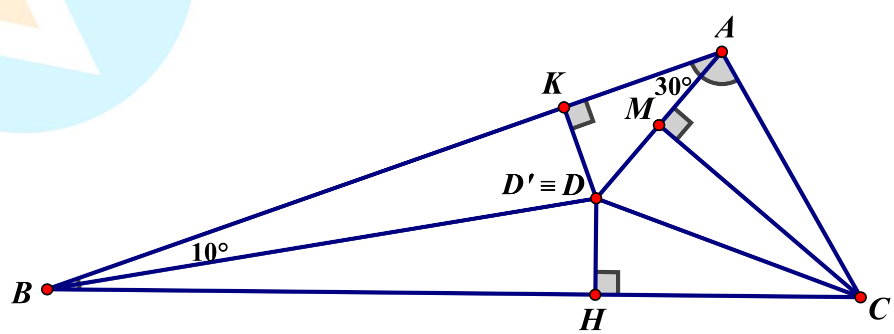
$\Rightarrow \Delta IOD = \Delta IOF \Rightarrow \widehat{IFO} = \widehat{IDO}$. Mà $\widehat{IDO} = \widehat{DEO} \Rightarrow IEOF$ nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) suy ra E, O, F, C, I cùng thuộc một đường tròn đường kính $OC \Rightarrow \widehat{CIO} = 90^0$ hay $\widehat{CIB} = 90^0$. Mà M là trung điểm BC .

$\Rightarrow MI = MB \Rightarrow \Delta BMI$ cân tại M $\Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{MBI}$. Do $\widehat{MBI} = \widehat{DBI}$ (tính chất tiếp tuyến)

$\Rightarrow \widehat{MIB} = \widehat{DBI} \Rightarrow IM // AB$

3.



Gọi D' trên tia AD sao cho $CD' = CA$; M là trung điểm của AD'; K, H lần lượt là hình chiếu của D' trên AB và BC.

$D'K = AD'\sin 30^\circ = D'M$ (1); $\Delta CAD'$ cân tại C nên $CM \perp AD'$

Và $\widehat{ACD'} = 180^\circ - 2(100^\circ - 30^\circ) = 40^\circ$. Có $\widehat{MCD'} = \frac{1}{2}\widehat{ACD'} = 20^\circ = \widehat{ACB} - \widehat{ACD'} = \widehat{D'CH}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được $\Delta CMD' = \Delta CHD' \Rightarrow D'M = D'H$ (3)

Từ (1) và (3) suy ra $D'K = D'H$ điều này chứng tỏ D' thuộc đường phân giác của góc B nên $D \equiv D'$. Vậy $\widehat{ACD} = \widehat{ACD'} = 40^\circ$.

Bài 22. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Sơn La năm học 2024 – 2025

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AO, điểm E thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Các tia Ax và By lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm E có bờ là đường thẳng AB). Qua điểm E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI cắt Ax, By lần lượt tại M và N.

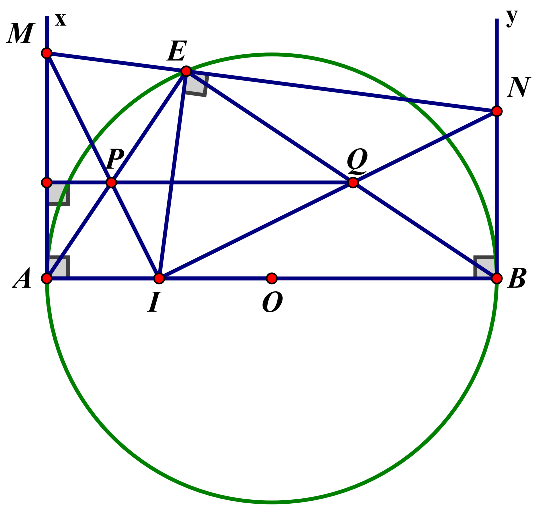
a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $AE.IN = BE.IM$.

c) Gọi P là giao điểm của AE và MI; Q là giao điểm của BE và NI. Chứng minh hai đường thẳng PQ và AM vuông góc.

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O). Giả sử ba điểm E, I, F thẳng hàng. Tính diện tích tam giác MON theo R.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{IAM}=90^\circ$ (AM là tiếp tuyến và AI là bán kính của (O))

$\widehat{IEM}=90^\circ$ (giả thiết) nên $\widehat{IAM}+\widehat{IEM}=180^0 \Rightarrow$ Tứ giác $AMEI$ nội tiếp.

b) Tứ giác $BIEN$ nội tiếp (vì có hai đỉnh E và B cùng nhìn IN dưới một góc vuông)

$\Rightarrow \widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{IE}$).

Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMEI$ có $\widehat{EMI}=\widehat{EAI}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{EI}$.

Lại có $\widehat{ENI}=\widehat{EBI}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\Delta AEB \backsim \Delta MIN\ (g.g.) \Rightarrow \dfrac{AE}{IM}=\dfrac{BE}{IN} \Rightarrow AE.IN=BE.IM$ (điều phải chứng minh).

c) Do $\Delta AEB \backsim \Delta MIN$ nên $\widehat{MIN}=\widehat{AEB}=90^\circ \Rightarrow IPEQ$ là tứ giác nội tiếp (do có E,I cùng nhìn PQ dưới góc $90^\circ) \Rightarrow \widehat{EQP}=\widehat{EIP}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EP). (1)

Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMEI$ có

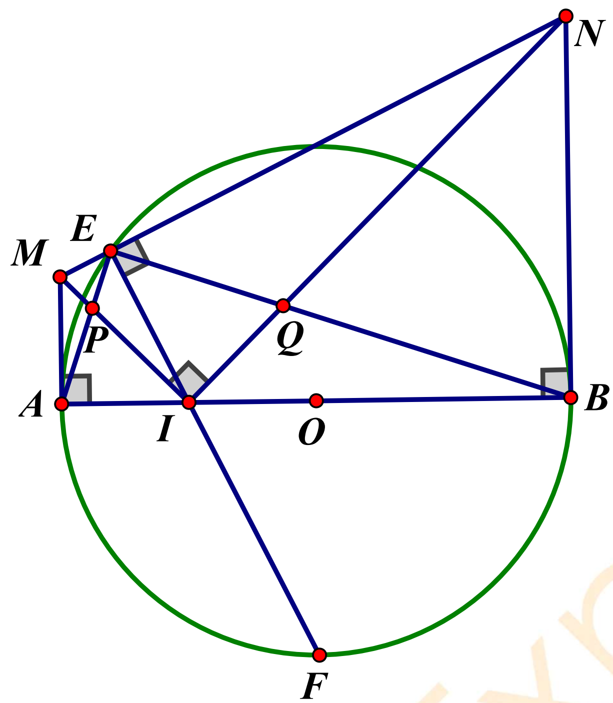
$\widehat{EIM}=\widehat{EAM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung ME). (2)

Trong đường tròn (O) có $\widehat{EBA}=\widehat{EAM}=\dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{ME}$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{EQP}=\widehat{EBA}$.

Mà $\widehat{EQP}$ và $\widehat{EBA}$ ở vị trí đồng vị suy ra $PQ // AB \Rightarrow PQ \perp AM$.

d)



Trong (O) có $\widehat{AEF}=45°$.

Trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AMEI$ có $\widehat{AMI}=\widehat{AEI}=45° \Rightarrow \Delta AMI$ vuông cân tại A

$\Rightarrow AM=AI=\dfrac{R}{2} \Rightarrow S_{\Delta AMO}=\dfrac{R^2}{4}$.

Ở ý b ta đã chứng minh được $\widehat{MIN}=90° \Rightarrow \widehat{BIN}=45° \Rightarrow \Delta IBN$ vuông cân tại B

$\Rightarrow NB=IB=\dfrac{3R}{2} \Rightarrow S_{\Delta BON}=\dfrac{3R^2}{4}$.

$ABNM$ là hình thang vuông tại A và $B \Rightarrow S_{ABNM}=2R^2$.

Do đó $S_{MON}=S_{ABNM}-S_{OAM}-S_{BON}=R^2$.

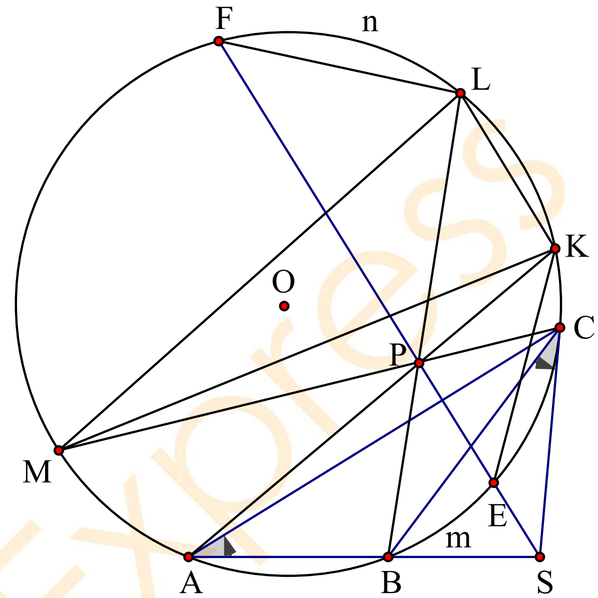
Bài 23. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Tuyên Quang năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác tù ABC có $\widehat{ABC}>90^0$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại C của (O) cắt đường thẳng AB tại S. Lấy điểm P thuộc miền trong tam giác OAC sao cho $SC=SP$. Đường thẳng SP cắt (O) tại hai điểm E, F (E ở giữa S và F). Các đường thẳng AP, BP cắt lại (O) lần lượt tại K, L. Chứng minh rằng:

a) Tam giác ACS đồng dạng với tam giác CBS;

b) $\widehat{APS} = \widehat{PBS}$;

c) Tứ giác $EKLF$ là hình thang cân.



Lời giải

a) Ta có $\widehat{CAS} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CEB}$ (1).

Mặt khác $\widehat{BCS} = \dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{CEB}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BCS} = \widehat{CAS}$ (3).

Từ (3) và $\widehat{ASC} = \widehat{BSC}$ suy ra $\triangle ASC \backsim CSB\,(g-g)$

b) Từ a) suy ra $\dfrac{CS}{BS} = \dfrac{AS}{CS} \Rightarrow SC^2 = SB.SA$ (4).

Vì $SC = SP$ nên (4) $\Rightarrow SP^2 = SB.SA \Rightarrow \dfrac{SP}{SB} = \dfrac{SA}{SP}$ (5).

Từ (5) và $\widehat{PSA} = \widehat{BSP}$ suy ra $\Delta PSA \backsim \Delta BSP$. Do đó $\widehat{APS} = \widehat{PBS}$.

c) Ta có $\widehat{BPS} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BmE} + \text{sđ}\overset{\frown}{LnF}\right)$ và $\widehat{PAS} = \dfrac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{BmE} + \text{sđ}\overset{\frown}{ECK}\right)$ (6).

Vì $\Delta PSA \backsim \Delta BSP$ nên $\widehat{BPS} = \widehat{PAS}$.

Kết hợp với (6) suy ra $\text{sđ}\overset{\frown}{LnF} = \text{sđ}\overset{\frown}{ECK}$ (7).

Từ (7) suy ra

$$\widehat{LFE} + \widehat{FLK} = \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{LKE} + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{FAK} = \frac{1}{2}\left(\text{sđ}\overset{\frown}{LnF} + \text{sđ}\overset{\frown}{LtK}\right) + \frac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{FAK} = 180^0 \Rightarrow LK \,//\, EF.$$

Do đó $EKLF$ là hình thang. Hơn nữa $\text{sđ}\overset{\frown}{LnF} = \text{sđ}\overset{\frown}{ECK} \Rightarrow FL = KE \Rightarrow EKLF$ là hình thang cân.

Bài 24. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Kạn năm học 2024 – 2025)

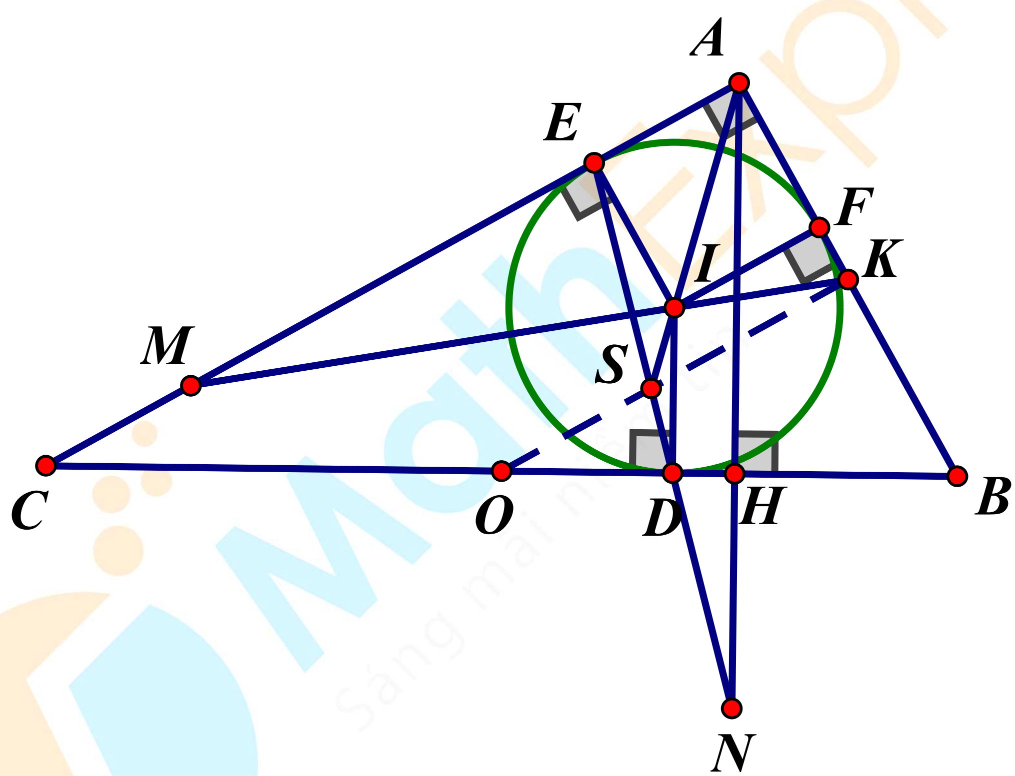
Cho tam giác ABC vuông ở $A\left(AB < AC\right)$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC, tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi S là giao điểm của AI và DE.

a) Chứng minh $IECD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K, O lần lượt là trung điểm của AB và BC. Chứng minh K, O, S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC. Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N. Chứng minh $\widehat{HNM} = \widehat{EMN}$.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{IEC} = \widehat{IDC} = 90^o \Rightarrow \widehat{IEC} + \widehat{IDC} = 180^o \Rightarrow$ Tứ giác $IECD$ nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{AES} = 180^o - \widehat{DEC} = 180^o - \dfrac{180^o - \widehat{ECD}}{2} = 90^o + \dfrac{\widehat{ECD}}{2}$

Mặt khác: $\widehat{AIB} = 180^o - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^o - \dfrac{\widehat{CAB} + \widehat{ABC}}{2} = 90^o + \dfrac{\widehat{ECD}}{2}$

Suy ra $\widehat{AES} = \widehat{AIB}$.

Xét tam giác IAB và tam giác EAS có $\widehat{IAB} = \widehat{SAE} = 45^o$ và $\widehat{AES} = \widehat{AIB}$.

$$\Rightarrow \Delta IAB \backsim \Delta EAS \Rightarrow \frac{IA}{AB} = \frac{EA}{AS}$$

Mà $\widehat{IAB} = \widehat{SAE} \Rightarrow \Delta IAE \backsim \Delta BAS$. Vì tam giác IAE vuông cân tại E nên tam giác ABS vuông cân tại S, suy ra S nằm trên đường trung trực của AB suy ra K, O, S thẳng hàng.

c) Vì $ID//AN \Rightarrow \frac{ID}{AN} = \frac{SI}{SA}$ và $KS//AM \Rightarrow \frac{IK}{KM} = \frac{SI}{SA}$

$IF//AM \Rightarrow \frac{IK}{KM} = \frac{FI}{AM} \Rightarrow \frac{ID}{AN} = \frac{FI}{AM}$ mà $ID = FI \Rightarrow AM = AN$

Suy ra tam giác AMN cân tại A.

Vậy: $\widehat{HNM} = \widehat{EMN}$. Điều phải chứng minh.

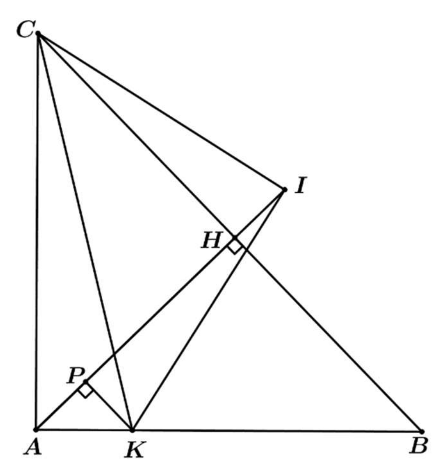
Bài 25. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Trên đoạn thẳng AB lấy điểm K sao cho $AB = 4AK$. Trên tia đối của tia HA lấy điểm I sao cho $HI = \frac{1}{4}AH$. Kẻ KP vuông góc với đường thẳng AH $(P \in AH)$. Chứng minh rằng:

a) $AH = PI$;

b) Tam giác IKC vuông tại I.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} KP \perp AH \\ BC \perp AH \end{cases}$ (giả thiết) suy ra $PK//BC$.

Áp dụng Định lý Ta-lét ta có: $\frac{AK}{AB} = \frac{AP}{AH} = \frac{1}{4}$. (1)

Theo giả thiết $\frac{HI}{AH} = \frac{1}{4}$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $AP = HI$. Mặt khác $PI = PH + HI$, $AH = AP + PH$ do đó $PI = AH$.

b) Chứng minh tam giác IKC vuông tại I.

Vì $\begin{cases}\widehat{CHA}=\widehat{APK}=90^0\\ \widehat{PKA}=\widehat{CAH}\end{cases}$ nên $\triangle APK \backsim \triangle CHA(g-g)$ suy ra $\dfrac{PK}{AH}=\dfrac{AK}{AC}\Rightarrow\dfrac{PK}{PI}=\dfrac{AK}{AC}$.

Vì $\begin{cases}\dfrac{PK}{PI}=\dfrac{AK}{AC}\\ \widehat{CAK}=\widehat{IPK}=90^\circ\end{cases}$ nên $\triangle ACK \backsim \triangle PIK$.

Suy ra $\widehat{ACK}=\widehat{PIK}=\widehat{AIK}$. Suy ra tứ giác $ACIK$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Ta có $\widehat{CAK}+\widehat{CIK}=180^\circ$. Mà $\widehat{CAK}=90^\circ$ nên $\widehat{CIK}=90^\circ$.

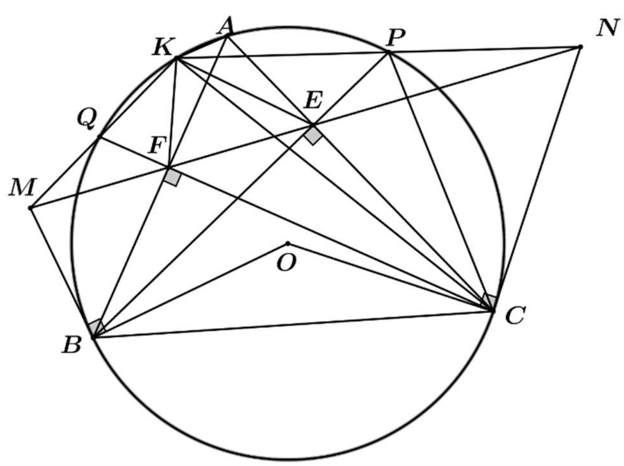
Bài 26. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Kẻ BE vuông góc với AC tại điểm E, CF vuông góc với AB tại điểm F. Các đường thẳng BE, CF lần lượt cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q $(P\neq B, Q\neq C)$. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại các điểm B,C cắt đường thẳng EF lần lượt tại các điểm M, N. Đường thẳng NP cắt đường tròn (O) tại điểm K $(K\neq P)$. Chứng minh rằng:

a) Tam giác NCE là tam giác cân;

b) Các điểm M,Q,K thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có

$\widehat{NCE}=\widehat{NCA}=\widehat{ABC}=\dfrac{1}{2}$sđ$\,\overset{\frown}{AC}$ (1)

Vì $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$ nên tứ giác $BCEF$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Suy ra $\widehat{NEC} = \widehat{FBC} = \widehat{ABC}.$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{NEC} = \widehat{NCE}$, từ đó ta có tam giác NEC cân tại N.

b) Do tam giác NEC cân tại N nên $NC = NE$.

Vì $\begin{cases} \widehat{PNC} = \widehat{KNC} \\ \widehat{NCP} = \widehat{NKC} = \dfrac{1}{2}\text{sd}\,\overset{\frown}{PC} \end{cases}$ nên tam giác NPC đồng dạng với tam giác NCK.

Suy ra $\dfrac{NC}{NK} = \dfrac{NP}{NC} \Rightarrow NC^2 = NP.NK \Rightarrow NE^2 = NP.NK \Rightarrow \dfrac{NE}{NP} = \dfrac{NK}{NE}.$

Vì $\begin{cases} \widehat{PNE} = \widehat{KNE} \\ \dfrac{NE}{NP} = \dfrac{NK}{NE} \end{cases}$ nên tam giác NPE đồng dạng với tam giác NEK. Suy ra $\widehat{NPE} = \widehat{NEK}$.

Suy ra $\widehat{KPE} = \widehat{KEF}$. Do đó $\widehat{KEF} = \widehat{KPB} = \widehat{KAB} = \widehat{KAF}$.

Suy ra tứ giác $AEFK$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Do đó K là một giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn (O). (3)

Giả sử MQ cắt đường tròn (O) tại H.

Chứng minh tương tự, ta suy ra được tứ giác $AEFH$ nội tiếp được trong một đường tròn.

Suy ra H là một giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF với đường tròn . (4)

Từ (3) và (4) suy ra $H \equiv K$, hay M, Q, K thẳng hàng.

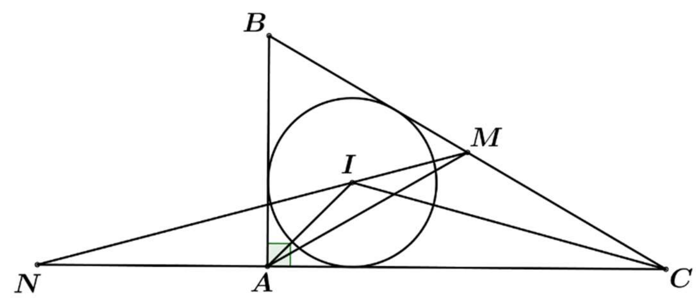
Bài 27. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $\widehat{ACB} = 30°$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, điểm I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{AIC} = 120°$.

b) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng MI và AC. Chứng minh rằng $AB = AN$.

Lời giải



a) Chứng minh rằng $\widehat{AMC} = \widehat{AIC} = 120°$.

Vì ΔABC vuông tại A, có AM là đường trung tuyến nên $MA = MB = MC$.

Vì ΔMAC cân tại M và $\widehat{MCA} = 30°$ (giả thiết) nên $\widehat{AMC} = 180° - 60^0 = 120°$.

Vì I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC nên AI, CI lần lượt là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$, $\widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{BAI} = \widehat{IAC} = 45°$; $\widehat{ACI} = \widehat{ICM} = 15°$. Do đó $\widehat{AIC} = 180° - (45° + 15°) = 120°$.

Vậy $\widehat{AMC} = \widehat{AIC} = 120°$.

b) Chứng minh rằng $AB = AN$.

Theo ý a, suy ra tứ giác $AIMC$ nội tiếp đường tròn. Suy ra $\widehat{IMC} = 180° - \widehat{IAC} = 135°$.

Lại có $\widehat{MNC} = 180° - \left(\widehat{NMC} + \widehat{MCN}\right) = 15°$.

Vì $\widehat{NMA} = \widehat{MNA} = 15°$ nên ΔANM cân tại A. Suy ra $AN = AM$. (1)

Trong ΔABM có $MB = MA$ và $\widehat{ABM} = 60°$ (giả thiết)

Suy ra $AB = MA = MB$. (2)

Từ (1), (2) suy ra $AB = AN$. Điều phải chứng minh.

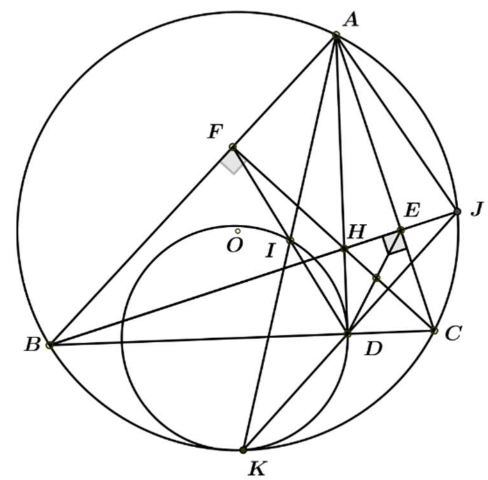
Bài 28. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Thái Nguyên năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác ABC $(AB > BC)$ có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Vẽ các đường cao AD, BE và CF của tam giác ABC. Gọi điểm H là trực tâm của tam giác ABC, I là trung điểm của đoạn thẳng DF. Tia AI cắt đường tròn (O) tại K $(K \neq A)$, tia BE cắt đường tròn (O) tại J $(J \neq B)$. Chứng minh rằng:

a) E là trung điểm của đoạn thẳng HJ;

b) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{EAH} = \widehat{CAD} = \widehat{CBE}$ (cùng phụ với $\widehat{ACB}$).

Mặt khác $\widehat{CBE} = \widehat{JBC} = \widehat{JAE} = \widehat{JAC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CJ). Suy ra $\widehat{EAH} = \widehat{EAJ}$.

Tam giác AHJ có AE vừa là đường cao, vừa là đường phân giác trong kẻ từ đỉnh A nên tam giác AHJ cân tại A. Suy ra AE là đường trung tuyến kẻ từ A. Do đó E là trung điểm của đoạn thẳng HJ.

b) Ta có các tứ giác $ACDF$, $CDHE$ nội tiếp nên

$\widehat{HDE} = \widehat{HCE} = \widehat{FCA} = \widehat{FDA}$ (1).

Đồng thời $\widehat{HED} = \widehat{HCD} = \widehat{FCD} = \widehat{FAD}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta DHE \backsim \Delta DFA (g-g) \Rightarrow \dfrac{HD}{FD} = \dfrac{HE}{FA}$ $\quad(3)$.

Mặt khác E là trung điểm của HJ (chứng minh trên) và I là trung điểm của FD, kết hợp với (3)

ta có $\dfrac{2HD}{FD} = \dfrac{2HE}{FA} \Rightarrow \dfrac{HD}{FI} = \dfrac{HJ}{FA}$

Ta có: $\widehat{AFI} + \widehat{BFI} = \widehat{JHD} + \widehat{DHB} = 180^0$, mà $\widehat{BFI} = \widehat{DHB} \Rightarrow \widehat{AFI} = \widehat{JHD}$

Xét ΔHDJ và ΔFIA có $\begin{cases} \dfrac{HD}{FI} = \dfrac{HJ}{FA} \\ \widehat{AFI} = \widehat{JHD} \end{cases}$

Suy ra ΔHDJ đồng dạng với $\Delta FIA \Rightarrow \widehat{HJD} = \widehat{FAI}$

Mà $\widehat{FAI} = \widehat{BAK} = \widehat{BJK}$ nên $\widehat{HJD} = \widehat{BJD} = \widehat{BJK} \Rightarrow J, D, K$ thẳng hàng.

Từ đó $\widehat{IKD} = \widehat{AKJ} = \widehat{ABJ} = \widehat{FBH} = \widehat{HDF} = \widehat{HDI}$.

Suy ra AD là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD.

Mặt khác $AD \perp BC$ nên tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IKD nằm trên đường thẳng BC.

Bài 29. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

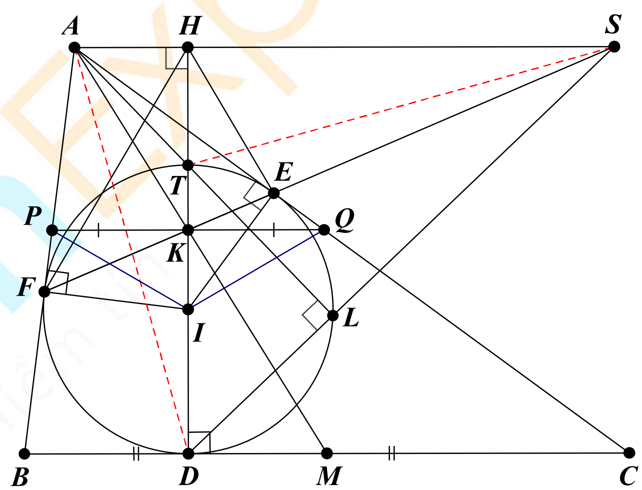
Cho tam giác ABC không cân, có ba góc nhọn và $AB < AC$. Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC tiếp xúc với ba cạnh $BC,\ CA,\ AB$ lần lượt tại $D,\ E,\ F$. Lấy S trên đường thẳng EF sao cho $AS // BC$, gọi $DI \cap AS = H$.

a) Chứng minh rằng 5 điểm $A,\ F,\ I,\ E,\ H$ nằm trên cùng một đường tròn và đường thẳng HI là phân giác của $\widehat{FHE}$.

b) Gọi $DI \cap EF = K$. Đường thẳng đi qua K và song song với BC cắt $AB,\ AC$ lần lượt tại $P,\ Q$. Chứng minh rằng tam giác IPQ cân và đường thẳng AK đi qua trung điểm của BC.

c) Kẻ DI cắt lại đường tròn nội tiếp ΔABC ở T. Chứng minh rằng $ST \perp AD$.

Lời giải



a) Dễ thấy rằng $\widehat{AFI} = \widehat{AEI} = 90^o$ nên $\widehat{AFI} + \widehat{AEI} = 180^o$ suy ra $AFIE$ nội tiếp.

Vì $AS // BC$ và $DI \perp BC$, suy ra $AH \perp HI$, vậy thì $\widehat{AFI} + \widehat{AHI} = 180^o$.

Suy ra $AHIF$ nội tiếp, vậy thì 5 điểm A, H, E, I, F nằm trên đường tròn.

Suy ra $\widehat{FHI} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{IF}; \widehat{EHI} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{IE};$

Lại có $IE = IF$ (bán kính đường tròn nội tiếp); do đó suy ra $\widehat{FHI} = \widehat{EHI}$, hay là HI là phân giác góc $\widehat{FHE}$.

b) Vì $PQ // BC$ suy ra $PQ \perp IK$. Dễ thấy $\widehat{IKQ} = \widehat{IEQ} = 90^o$ nên $KEQI$ nội tiếp, do đó $\widehat{IQK} = \widehat{IEK}$.

Chứng minh tương tự thì $\widehat{IPK} = \widehat{IFK}$, chú ý rằng tam giác IEF cân tại I nên suy ra $\widehat{IQK} = \widehat{IPK}$ nên $IP = IQ$.

Gọi M là trung điểm của đoạn BC.

Vì tam giác IPQ cân và có IK là đường cao nên suy ra $KP = KQ$.

Vì $PQ // BC$ và có $\dfrac{KP}{KQ} = \dfrac{MB}{MC} = 1$, theo định lí Thales đảo thì $A,\ K,\ M$ thẳng hàng.

c) Gọi $SD \cap (I) = L$, dễ thấy rằng $SE.SF = SL.SD$ (vì $EFLD$ nội tiếp).

Lại có $AFIEH$ nội tiếp nên $SE.SF = SA.SH$, suy ra $SL.SD = SA.SH$ tức là $AHLD$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ALD} = 90^o$.

Vì DT là đường kính của (I) nên $\widehat{TLD} = 90^o$, do đó A, T, L thẳng hàng.

Xét tam giác ADS có $DH \perp SA$, $AL \perp SD$ suy ra T là trực tâm tam giác ADS. Do đó suy ra $ST \perp AD$.

Bài 30. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lạng Sơn năm học 2024 – 2025)

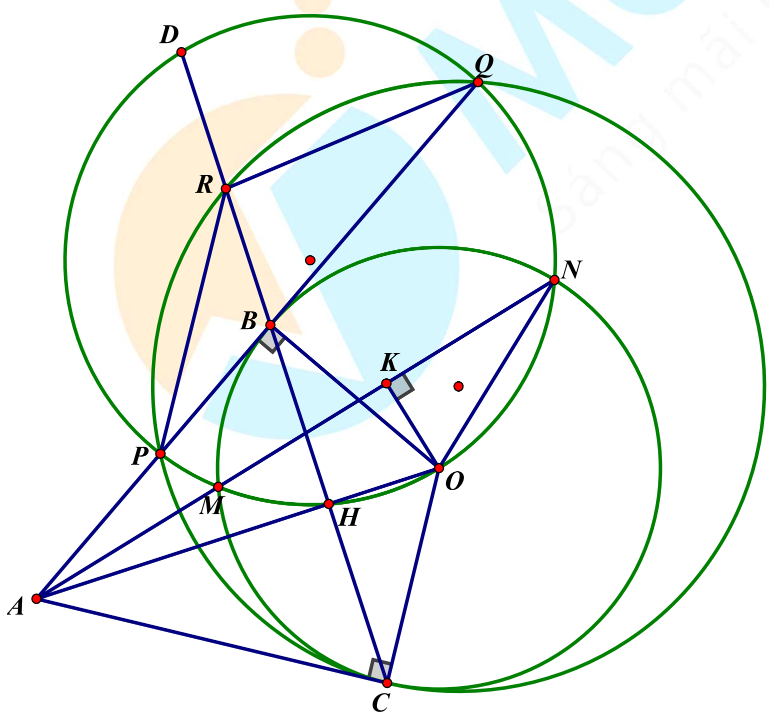
Từ điểm A nằm ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến AB với B là tiếp điểm. Một đường thẳng d đi qua A và cắt (O) tại M, N sao cho: O và B nằm khác phía so với d, điểm M ở giữa A và N. Kẻ $BH \perp AO$ (H thuộc AO), gọi K là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng $AB^2 = AM.AN$, $\widehat{KAO} = \widehat{OBK}$

b) Chứng minh rằng tứ giác $MHON$ nội tiếp và HB là phân giác của $\widehat{MHN}$

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác OMN cắt đường thẳng AB tại P, Q và cắt đường thẳng HB tại D (D khác H). Gọi R là trung điểm của BD. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR và (O) tiếp xúc với nhau.

Lời giải



a) Có AB là tiếp tuyến, AMN là một cát tuyến của (O)

nên $AB^2 = AM.AN$ (tính chất phương tích)

(Có thể chứng minh tam giác AMB đồng dạng với tam giác ABN)

K là trung điểm dây cung MN

$\Rightarrow \widehat{OKA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{OKA} = \widehat{OBA} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OKBA$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{KBO} = \widehat{KAO}$

b) Tam giác OBA vuông tại B, BH là đường cao

$\Rightarrow AB^2 = AH.AO$

Mặt khác $AB^2 = AM.AN \Rightarrow AM.AN = AH.AO \Rightarrow$ Tứ giác $MNOH$ nội tiếp (tính chất phương tích)

Tứ giác $MNOH$ nội tiếp $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{NMO} = \widehat{NHO} \\ \widehat{ONM} = \widehat{MHA} \end{cases}$

Mà $\widehat{NMO} = \widehat{ONM}$ (tam giác OMN cân tại O) $\Rightarrow \widehat{NHO} = \widehat{MHA}$ kết hợp với $\widehat{BHA} = \widehat{BHO} = 90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{BHM} = \widehat{BHN}$ hay HB là phân giác của $\widehat{MHN}$

c) Gọi AC là tiếp tuyến thứ 2 dựng từ A đến (O)

Tứ giác $OHMN$ nội tiếp, kết hợp với giả thiết điểm D

$\Rightarrow$ Các điểm D, Q, N, O, H, M, P đồng viên (1) $\Rightarrow DQHP$ nội tiếp $\Rightarrow BH.BD = BQ.BP$

$\Rightarrow BH.2BR = BQ.BP \Rightarrow BC.BR = BQ.BP$ (vì $BH \perp OA \Rightarrow BC \perp OA \Rightarrow BC = 2BH$)

Suy ra tứ giác $RQCP$ nội tiếp

Hay C nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác PQR (*)

Từ (1) suy ra tứ giác $PQOH$ nội tiếp $\Rightarrow AP.AQ = AH.AO = AB^2$ (theo ý b)

Mà $AB = AC \Rightarrow AP.AQ = AC^2$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp PQR

Mà AC cũng là tiếp tuyến của (O)

$\Rightarrow$ Hai đường tròn (PQR) và (O) tiếp xúc nhau với tiếp tuyến chung AC (đpcm).

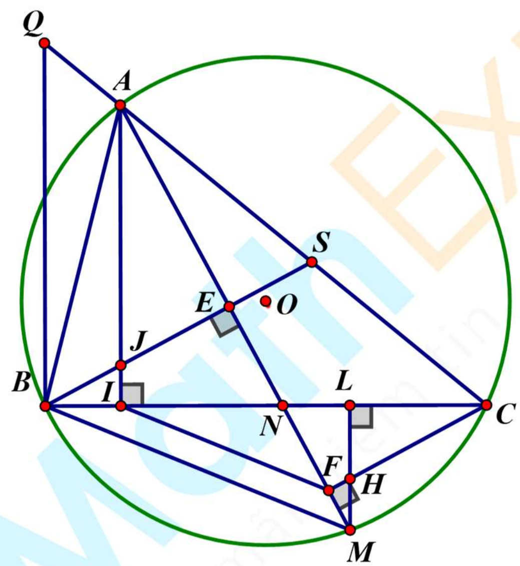
Bài 31. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Phú Thọ năm học 2024 – 2025)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) với các điểm A, B, C cố định. Điểm M di động trên cung BC không chứa A (M khác B, C và AM không vuông góc với BC). Kẻ BE vuông góc với AM tại E. Gọi N là giao điểm của AM và BC, H và J theo thứ tự là trực tâm của các tam giác CMN và ABN. Gọi I là chân đường vuông góc kẻ từ A đến đường thẳng BC, F là chân đường vuông góc kẻ từ C đến đường thẳng AM .

a) Chứng minh rằng $IF \,//\, MB$

b) Chứng minh $\Delta ABJ \backsim \Delta CMH$

c) Khi điểm M di động nhưng vẫn thỏa mãn yêu cầu bài toán, chứng minh rằng đường thẳng HE luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải

a) Ta có tứ giác $ABMC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MBC} = \widehat{MAC}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overparen{MC}\right)$

Ta lại có $AI \perp BC \Rightarrow \widehat{AIC} = 90^\circ; CF \perp AM \Rightarrow \widehat{AFC} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $AIFC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FIC} = \widehat{FAC}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overparen{CF}\right)$

Từ đó suy ra $\widehat{FIC} = \widehat{MBC}$, mà hai góc ở vị trí đồng vị. Vậy $FI // BM$.

b) Ta có tứ giác $ABMC$ nội tiếp suy ra $\widehat{BAM}=\widehat{BCM}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BM}\right)$

Gọi L là chân đường cao kẻ từ M đến NC. Suy ra $\widehat{ABJ}=\widehat{CMH}$ (1)

Từ tứ giác $AIFC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{IAF}=\widehat{ICF}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{IF}\right)$ và $\widehat{BAM}=\widehat{BCM}\left(=\frac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BM}\right)$

Suy ra $\widehat{BAJ}=\widehat{MCH}$ (2)

Từ $(1);(2)\Rightarrow \triangle ABJ \backsim \triangle CMH\,(g-g)$

c) Từ B vẽ $BQ\perp BC$ sao cho $Q\in AC \Rightarrow Q$ cố định

Ta có: $\Delta CHM \backsim \Delta AJB \Rightarrow \frac{MH}{BJ}=\frac{HC}{JA}=\frac{MC}{AB}$

$\Delta IBJ \backsim \Delta FMH\,(g\text{-}g) \Rightarrow \frac{FH}{IJ}=\frac{FM}{IB}=\frac{MH}{BJ}$

Suy ra $\frac{FH}{IJ}=\frac{HC}{JA}\Rightarrow \frac{FH}{HC}=\frac{IJ}{JA}=\frac{S_{BIJ}}{S_{ABJ}}=\frac{BI\cdot BJ\cdot \sin\widehat{IBJ}}{AB\cdot BJ\cdot \sin\widehat{ABJ}}=\frac{BI\cdot \sin\widehat{IBJ}}{AB\cdot \sin\widehat{ABJ}}$

Ta có $ES//FC \Rightarrow \frac{EF}{EA}=\frac{SC}{SA}$

Mà $\frac{SC}{SA}=\frac{S_{BSC}}{S_{ABS}}=\frac{BC\cdot BS\cdot \sin\widehat{IBJ}}{BA\cdot BS\cdot \sin\widehat{ABJ}}\Rightarrow \frac{EF}{EA}=\frac{BC\cdot \sin\widehat{IBJ}}{BA\cdot \sin\widehat{ABJ}}$

Ta lại có $BQ//AI \Rightarrow \frac{BI}{BC}=\frac{QA}{QC}\Rightarrow \frac{HF}{HC}\cdot\frac{EA}{EF}\cdot\frac{QC}{QA}=1$

Theo định lí Menelaus đảo vào tam giác $ACF \Rightarrow H,E,Q$ thẳng hàng

Mà Q cố định. Vậy HE luôn đi qua điểm Q cố định khi M di động trên cung nhỏ BC

Bài 32. (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Hòa Bình năm học 2024 – 2025)

Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính BC, điểm H cố định thuộc tia đối của tia BC. Qua H kẻ đường thẳng d vuông góc với BC. Lấy điểm M bất kì trên đường thẳng d, qua M kẻ các tiếp tuyến MP, MK với đường tròn (O). Dây PK cắt OM tại N và cắt OH tại Q.

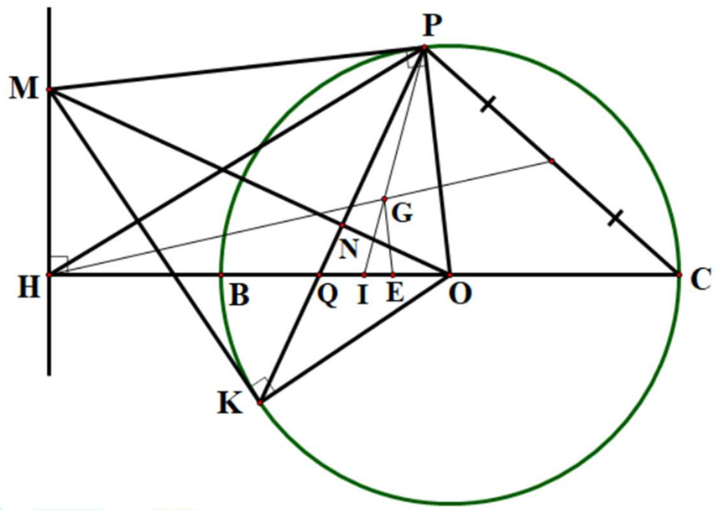
a) Chứng minh năm điểm M, P, O, K, H cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng $OH.OQ=R^2$.

c) Cho $\widehat{POK}=120^0$. Tính diện tích tứ giác $MPOK$ theo R.

d) Chứng minh rằng khi điểm M di chuyển trên đường thẳng d thì trọng tâm G của tam giác HPC chạy trên một đường tròn cố định.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{MHO}=\widehat{MPO}=\widehat{MKO}=90^0$

$\Rightarrow P, K, H$ thuộc đường tròn đường kính MO.

$\Rightarrow M$, P, O, K, H cùng thuộc đường tròn đường kính MO.

b) Xét $\triangle MPO$ vuông tại P, có $PN\perp MO$:

$\Rightarrow ON\cdot OM=OP^2$ (1) (Hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Có: $\triangle ONQ \backsim \triangle OHM$ ($\widehat{HOM}$ chung; $\widehat{ONQ}=\widehat{OHM}=90°$) $\Rightarrow \dfrac{ON}{OH}=\dfrac{OQ}{OM}\Rightarrow OM\cdot ON=OH\cdot OQ$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow OH\cdot OQ=OM\cdot ON=OP^2=R^2$.

c) Vì $\widehat{POK}=120^o$ nên $\widehat{PMK}=60°$ và MO là phân giác của $\widehat{PMK}$ $\Rightarrow \widehat{PMO}=\widehat{KMO}=30°$

$\triangle OPM$ vuông tại P, có: $OP=OM\,.\sin\widehat{PMO}$ $\Rightarrow OM=\dfrac{R}{\sin 30°}=2R$ (cm).

$\triangle PNO$ vuông tại N, có: $NP=OP.\sin\widehat{PON}$

mà $\widehat{PON}=90°-\widehat{OMP}=90°-30°=60°$ ($\triangle OPM$ vuông tại P).

$\Rightarrow NP=R\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$ (cm) $\Rightarrow$ $KP=R\sqrt{3}$ (cm)

Ta có $OM\perp KP\Rightarrow S_{MPOK}=\dfrac{1}{2}OM.KP=R^2\sqrt{3}$ (cm²).

d) Lấy I là trung điểm của HC, $G \in PI$ sao cho $PG = \frac{2}{3}PI$.

Từ G kẻ đường thẳng song song với OP cắt HC tại E. Có HC cố định $\Rightarrow I$ cố định

$\widehat{IPO}$ có $GE \,//\, PO \Rightarrow \frac{GE}{PO} = \frac{IE}{IO} = \frac{IG}{IP} = \frac{1}{3}$ (Định lí talet) (do G là trọng tâm của $\triangle PHC$).

$\Rightarrow IE = \frac{IO}{3}$ không đổi. Mà I, O cố định $\Rightarrow E$ cố định. (3)

$GE = \frac{PO}{3} = \frac{R}{3}$ không đổi. (4)

(3), (4) $\Rightarrow G \in \left(E;\, \frac{R}{3}\right)$ cố định khi M chuyển động trên d.

Bài 33 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Điện Biên năm học 2024 – 2025):

Cho đường tròn (O). B, C là các điểm cố định trên (O), $BC \neq 2R$. A là một điểm thay đổi trên (O) sao cho tam giác ABC nhọn. Kẻ các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC. AA' là đường kính của (O).

1) Chứng minh $\triangle BAD \backsim \triangle CAA'$

2) M là điểm đối xứng với A qua BC, N là điểm đối xứng với B qua AC.

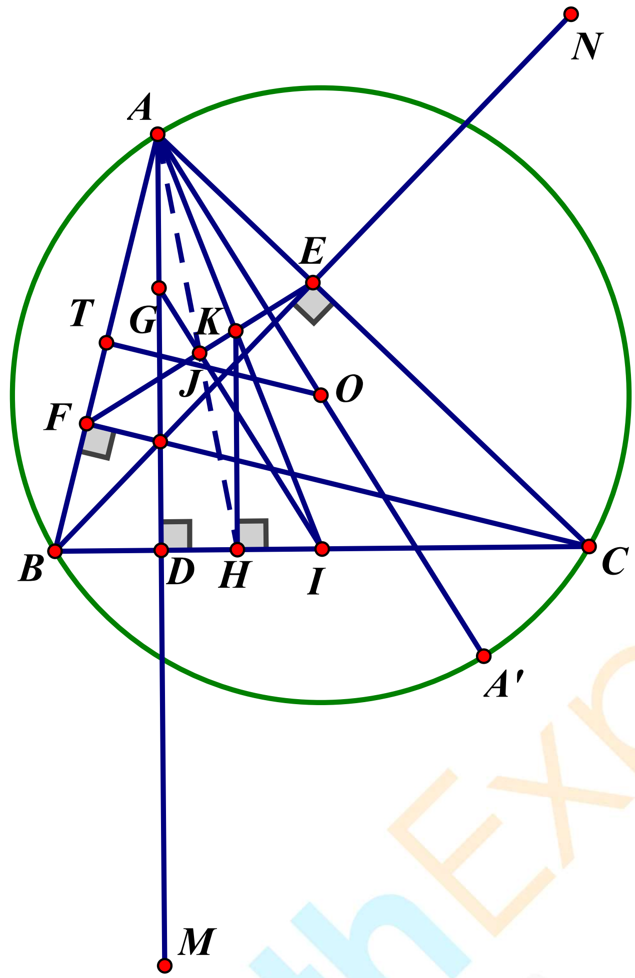
a) Chứng minh rằng $CM.CE = CN.CD$

b) Giả sử M, C, N thẳng hàng, $R = 8cm$. Tính AB.

3) I, J lần lượt là trung điểm của BC, EF. AI cắt EF tại K, H là hình chiếu của K lên BC.

Chứng minh A, J, H thẳng hàng.

Lời giải:



1) Ta có: $\widehat{CAA'} = \dfrac{180° - \widehat{AOC}}{2} = 90° - \widehat{ABC} = \widehat{BAD}$

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle CAA'$ ta có: $\widehat{CAA'} = \widehat{BAD}$, $\widehat{ACA'} = \widehat{BDA} = 90^0$

Suy ra $\triangle BAD \backsim \triangle CAA'(g-g)$

2a) Ta có $CM.CE = CN.CD$ tương đương $CA.CE = CD.CB$, điều này hiển nhiên đúng do tứ giác $AEDB$ nội tiếp.

2b) Có: $\widehat{ACN} = \widehat{BCA} = \widehat{BCM}$ nên nếu C, N, M thẳng hàng thì $\widehat{BCA} = 60°$ suy ra $\widehat{AOB} = 120°$

Gọi T là trung điểm AB, khi đó $AB = 2AT = 2OA.\sin\widehat{TIA} = 2R.\sin 60° = 8\sqrt{3}$

3) AJ cắt BC tại H'. Gọi N là trực tâm tam giác ABC, G là trung điểm của AN, theo kết quả quen thuộc thì G, J, I cùng thuộc trung trực của EF nên $\widehat{KJI} = 90°$

Mặt khác tam giác AEF và ABC đồng dạng mà J, I lần lượt là trung điểm của EF và BC nên tam giác AIC và AJF đồng dạng nên $\widehat{AIC} = \widehat{AJF} = \widehat{KJH'}$ nên tứ giác $KJH'I$ nội tiếp suy ra $\widehat{KH'I} = \widehat{KJI} = 90°$ nên $H' \equiv H$ suy ra điều phải chứng minh.

Bài 34 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC. Đường thẳng đi qua hai điểm M, N cắt (O) tại hai điểm P, Q (với M nằm giữa P và N). Gọi D là một điểm trên cạnh AB (với D khác A, D khác B), đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP cắt BC tại I (I khác B). Đường thẳng DI cắt đường thẳng AC tại K.

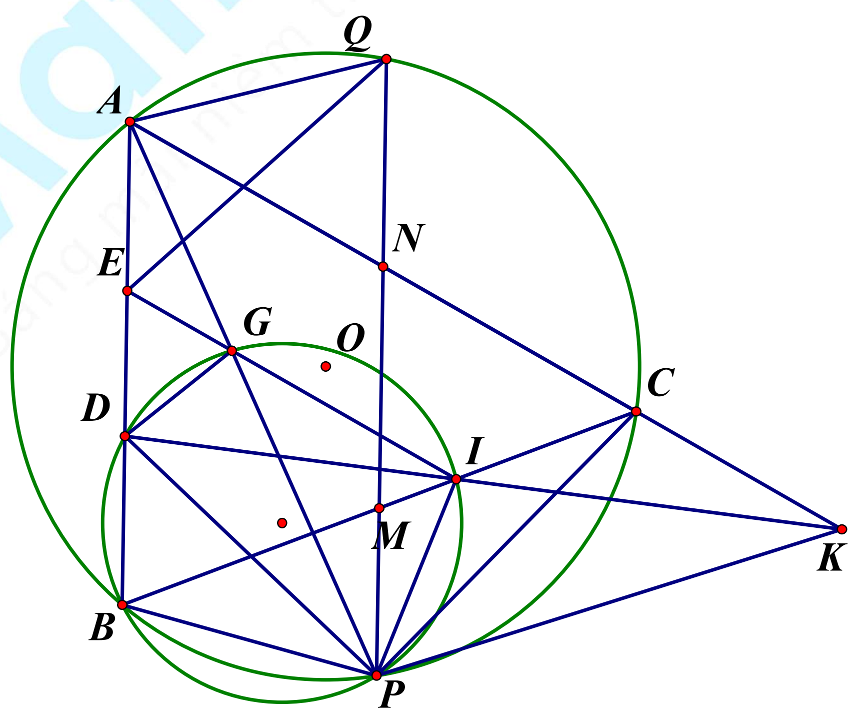
a) Chứng minh các điểm C, I, P, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{PK}{PD}$

c) Đường thẳng AP cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BDP tại G (G khác P). Đường thẳng IG cắt AB tại E. Chứng minh rằng khi D di chuyển trên cạnh AB thì tỉ số $\dfrac{S_{APD}}{S_{AQE}}$ không đổi.

Lời giải:

Gọi O' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BPD.



a) Tứ giác $ABPC$ nội tiếp (O)

$\Rightarrow \widehat{PCK} = 180^\circ - \widehat{PCA} = \widehat{ABP}$

Tứ giác $BDIP$ nội tiếp (O')

$\Rightarrow \widehat{PIK} = 180^\circ - \widehat{PID} = \widehat{PBD} = \widehat{ABP}$

$\Rightarrow \widehat{PCK} = \widehat{PIK}$

Mà C, I là hai đỉnh kề nhau nên $PICK$ nội tiếp (điều phải chứng minh)

b) $PICK$ nội tiếp (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{PKI} = \widehat{PCI}$ (cùng chắn cung PI)

$\Rightarrow \widehat{PKD} = \widehat{PCB} = \widehat{PQB}$ (cùng chắn cung PB của (O))

Trong (O) có $\widehat{BQM} = \widehat{PCM}$ (cùng chắn cung PB của (O)) và $\widehat{BMQ} = \widehat{PMC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \Delta BQM \backsim \Delta PCM(g-g) \Rightarrow \dfrac{QB}{QM} = \dfrac{CP}{CM}$ (1)

Tương tự ta có: $\Delta QCM \backsim \Delta BPM(g-g) \Rightarrow \dfrac{QC}{QM} = \dfrac{BP}{BM}$ (2)

Chia (1) cho (2) vế với vế ta được: $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{BM}{CM}.\dfrac{CP}{BP} = \dfrac{CP}{BP}$ (M là trung điểm của BC)

Trong (O') có $\widehat{PBI} = \widehat{PDI}$ hay $\widehat{PBC} = \widehat{PDK}$

Lại có $\widehat{PCB} = \widehat{PKD}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \Delta BPC \backsim \Delta DPK(g-g) \Rightarrow \dfrac{PC}{PB} = \dfrac{PK}{PD} \Rightarrow \dfrac{PK}{PD} = \dfrac{CP}{BP}$

Vậy $\dfrac{QB}{QC} = \dfrac{PK}{PD}\left(= \dfrac{CP}{BP}\right)$ (điều phải chứng minh)

c) Trong tam giác ABC có MN là đường trung bình $\Rightarrow MN // AB \Rightarrow PQ // AB$

$\Rightarrow d(Q,AB) = d(P,AB)$ (trong đó $d(P,\ AB)$ là khoảng cách từ P đến AB, tương tự với $d(Q,\ AB)$)

$\Rightarrow \dfrac{S_{APD}}{S_{AQE}} = \dfrac{0,5.AD.d(P,AB)}{0,5.AE.d(Q,AB)} = \dfrac{AD}{AE}$

Chứng minh được $\Delta ADG \backsim \Delta APB(g-g) \Rightarrow \dfrac{AD}{AG} = \dfrac{AP}{AB}$

$\Delta AEG \backsim \Delta CPB(g-g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AG} = \dfrac{CP}{BC} \Rightarrow \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{BC}{AB}$

Do A, B, C cố định $\Rightarrow M, N$ cố định $\Rightarrow P$ cố định $\Rightarrow \dfrac{BC}{AB}.\dfrac{AP}{CP}$ không đổi $\Rightarrow \dfrac{AD}{AE}$ không đổi

$\Rightarrow \dfrac{S_{APD}}{S_{AQE}}$ không đổi (điều phải chứng minh)

Bài 35 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Phan Bội Châu Nghệ An năm học 2024 – 2025):

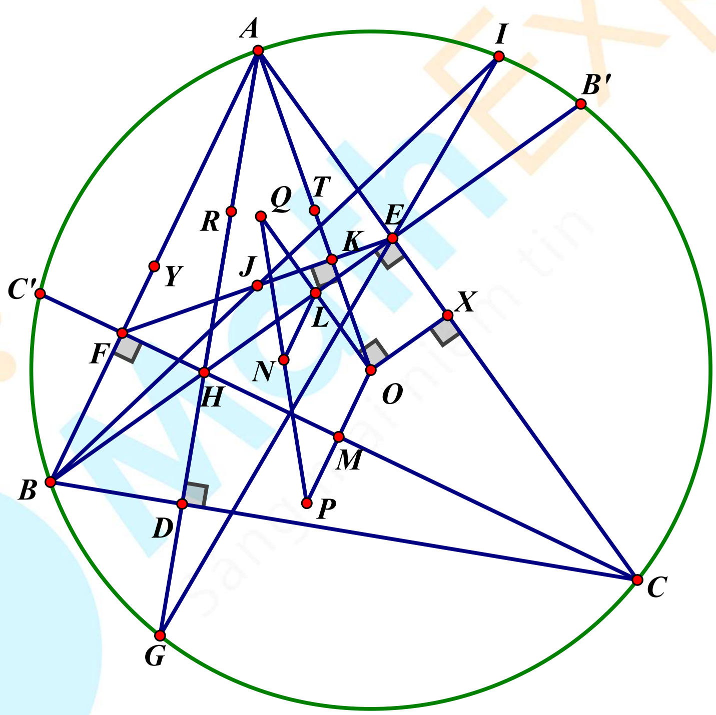
Cho tam giác nhọn ABC có $AB < BC < CA$, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H. Tia AD cắt đường tròn (O) tại điểm G, tia GE cắt đường tròn (O) tại điểm I (G khác A và I khác G). Gọi J là giao điểm của BI và EF, K là giao điểm của OA và EF.

a) Chứng minh $HF.CE.BC = HC.BF.EF$

b) Chứng minh $JE = JF$ và $HJ // DK$

c) Gọi P là điểm đối xứng với O qua đường thẳng CF, Q là điểm đối xứng với O qua đường thẳng BE và N là trung điểm của đoạn thẳng PQ. Chứng minh $NJ \perp EF$.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $CEFB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HEF} = \widehat{HCB}, \widehat{FBH} = \widehat{ECH}$

Từ đây suy ra $\Delta HEF \backsim \Delta HCB (g-g) \Rightarrow \dfrac{EF}{BC} = \dfrac{HF}{HB}$

Ta có biến đổi sau: $EF.HB = BC.HF \Rightarrow HF.BC.CE = EF.HB.CE$

Do đó để hoàn tất chứng minh, ta cần chỉ ra $HF.BC.CE = EF.HB.CE \Rightarrow HB.CE = HC.BF$

Ta cũng có $\Delta FHB \backsim \Delta EHC(g-g) \Rightarrow \dfrac{HB}{BF} = \dfrac{HC}{CE} \Rightarrow HC.BF = CE.HB$

Bài toán được chứng minh.

b) Gọi R là trung điểm của AH, J' là trung điểm EF.

Vì $\widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 90^0$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BEF} \Rightarrow \Delta BAH \backsim \Delta BEF(g-g)$

$\Rightarrow \dfrac{BH}{HA} = \dfrac{BF}{FE} \Rightarrow \dfrac{BH}{HR} = \dfrac{BF}{FJ'}$

Mà $\widehat{BFJ'} = \widehat{BHR}$ nên $\Delta BFJ' \backsim \Delta BHR(c-g-c) \Rightarrow \widehat{RBH} = \widehat{ABJ'}$

Ta có: $HA.HD = HB.HE \Rightarrow 2HR.HD = HB.HE$

$\Rightarrow HR.HG = HB.HE$ (vì H, G đối xứng nhau qua BC)

Từ đây ta có $RBGE$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{RBH} = \widehat{HGE} = \widehat{AGI} = \widehat{FBJ}$

Do đó $J \equiv J'$ hay J là trung điểm của EF.

Gọi T là trực tâm tam giác AEF.

Ta có $HETF$ là hình bình hành, T thuộc AO

Ta cũng có $\Delta AEF \backsim \Delta ABC(c-g-c) \Rightarrow \Delta AEK \backsim \Delta ABD(g-g) \Rightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AT}{AK}$

Theo định lý Thales đảo, ta được $HT // DK$ hay $HJ // DK$

Bài toán được chứng minh

c) Gọi giao điểm của HB, HC với (O) lần lượt là B', C'

OP cắt CF tại M, OQ cắt BE tại L

Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của AC, AB

Lúc này ta có $OY = FM = \dfrac{CH}{2} \Rightarrow CM = CF - FM = CF - \dfrac{CH}{2} = FH + \dfrac{CH}{2} = \dfrac{C'H}{2} + \dfrac{CH}{2} = \dfrac{CC'}{2}$

Vì vậy M là trung điểm CC', tương tự L là trung điểm BB'

Lại có NL là đường trung bình của tam giác QPO $\Rightarrow NL = \dfrac{OP}{2} = MO$

$LEXO$ là hình chữ nhật $\Rightarrow$ $LE = OX$, $LE \,//\, OX$, $LN \,//\, OM$

$\Rightarrow$ $\widehat{NLE} = \widehat{MOX} \Rightarrow$ $\Delta NLE = \Delta MOX$

Mặt khác, $\widehat{ABE} = \widehat{ACF} \Rightarrow AB' = AC' \Rightarrow NE = NF \Rightarrow NJ \perp EF$

Bài 36 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hà Tĩnh năm học 2024 – 2025):

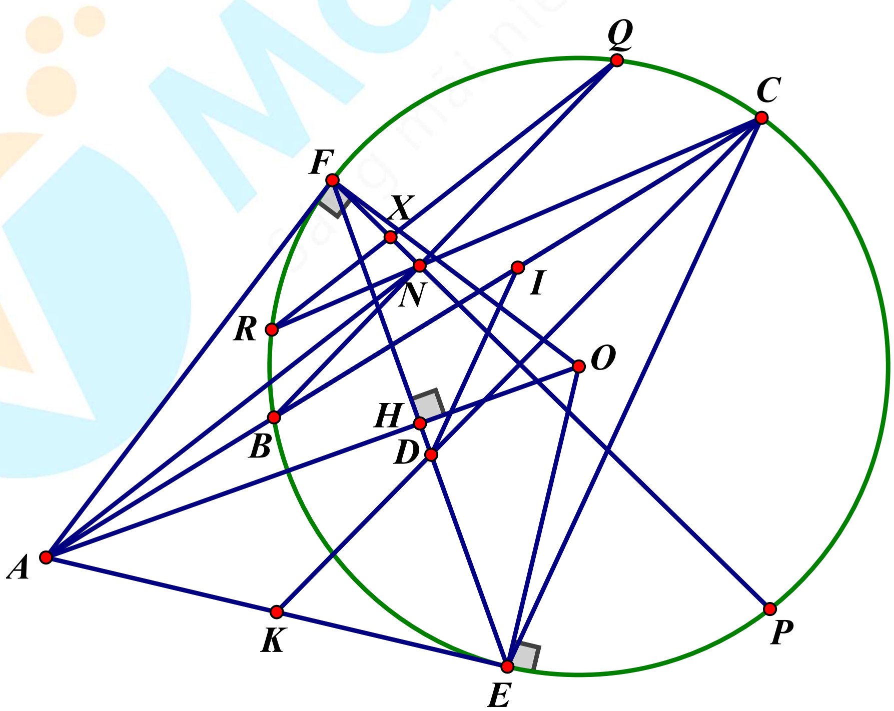
Cho đường tròn (O). Từ điểm A nằm ngoài đường tròn, vẽ các tiếp tuyến AE, AF tới đường tròn (O) (E, F là các tiếp điểm) và cát tuyến ABC (B, C thuộc đường tròn (O), B nằm giữa A và C).

a) Chứng minh rằng $BE.CF = CE.BF$

b) Gọi H là giao điểm của AO và EF, I là trung điểm của BC. Đường thẳng đi qua I song song với CE cắt EF tại D, CD cắt AE tại K. Chứng minh HK vuông góc với OF.

c) Trong tam giác FBC lấy điểm N sao cho $AN = AF$. Qua điểm N vẽ các dây cung BQ, CR, FP của đường tròn (O). Chứng minh rằng tam giác PQR là tam giác cân.

Lời giải:



a) Chứng minh $\Delta AEB \backsim \Delta ACE(g-g) \Rightarrow \dfrac{BE}{CE}=\dfrac{AE}{AC}$

Chứng minh $\Delta AFB \backsim \Delta ACF(g-g) \Rightarrow \dfrac{BF}{CF}=\dfrac{AF}{AC}$

Do $\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{AF}{AC} \Rightarrow \dfrac{BE}{CE}=\dfrac{BF}{CF} \Rightarrow BE.CF=CE.BF$

b) Do $ID\ //\ CE$ nên $\widehat{DIB}=\widehat{ECB}=\widehat{DFB} \Rightarrow IDBF$ nội tiếp

BD cắt CE tại J, 5 điểm O, I, E, A, F thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow \widehat{DBI}=\widehat{IFD}=\widehat{IAE}$

Mà 2 góc này ở vị trí đồng vị $\Rightarrow BJ\ //\ EA$

$ID\ //\ CJ$, I là trung điểm của $CB \Rightarrow ID$ là đường trung bình của tam giác $CJB \Rightarrow JD = DB$

Mà $BJ\ //\ EA$ theo Thalès $\dfrac{JD}{EK}=\dfrac{DB}{KA} \Rightarrow EK=KA \Rightarrow HK$ là đường trung bình của tam giác EFA

$\Rightarrow HK\ //\ FA$. Mà $OF \perp FA \Rightarrow HK \perp OF$

c) $\Delta AFB \backsim \Delta ACF(g-g) \Rightarrow \dfrac{AF}{AC}=\dfrac{AB}{AF} \Rightarrow AF^2=AB.AC$

Suy ra $AN^2=AF^2=AE^2=AB.AC \Rightarrow \dfrac{AN}{AB}=\dfrac{AC}{AN} \Rightarrow \Delta ANB \backsim \Delta ACN(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{BNA}=\widehat{NCA}=\widehat{BQR} \Rightarrow NA\ //\ QR$

Gọi X là giao của QR và PF, tam giác ANF cân tại A

$\dfrac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{PQ}+sd\,\overset{\frown}{RF})=\widehat{RXF}=\widehat{ANF}=\widehat{AFN}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{PF}=\dfrac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{PR}+sd\,\overset{\frown}{RF})$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{PQ}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{PR} \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{PQ}=sd\,\overset{\frown}{PR} \Rightarrow PQ=PR \Rightarrow$ Tam giác PQR cân tại P

Bài 37 (Đề khảo sát – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025):

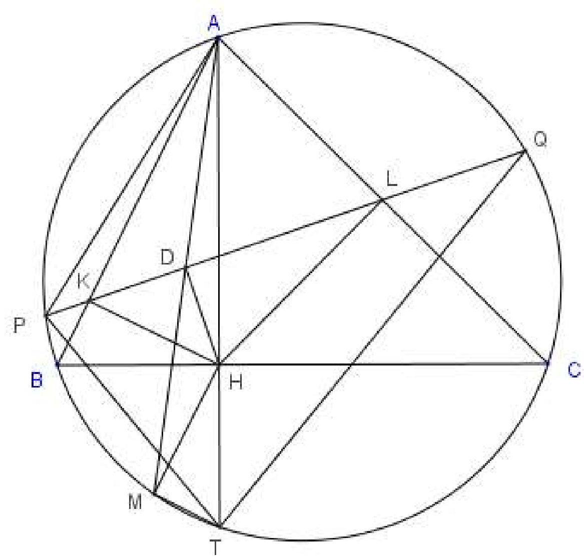
Tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và B cùng phía đối với AC).

a) Chứng minh tứ giác $BKLC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PHQ.

c) AH cắt lại đường tròn (O) tại T $(T \neq A)$. Gọi D là hình chiếu vuông góc của H lên KL; AD cắt đường tròn (O) tại M $(M \neq A)$. Chứng minh $\widehat{HMT} = 90^0$.

Lời giải:



a) Ta có tam giác AHB vuông tại H và có đường cao là HK, nên $AH^2 = AK.AB$ (1) (hệ thức trong tam giác vuông).

Tương tự ta có $AH^2 = AL.AC$ (2).

Từ (1) và (2) ta được

$AK.AB = AL.AC \Rightarrow \dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AC}{AB}$ (3)

Xét tam giác AKL và ACB có $\widehat{KAL}$ chung và thỏa mãn (3), suy ra

$\Delta AKL \backsim \Delta ACB\,(c-g-c) \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{ACB}$, suy ra tứ giác $BKLC$ nội tiếp.

b) Từ $\widehat{ACB} = \widehat{AKL} \Rightarrow \dfrac{1}{2} sd\,\overparen{APB} = \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overparen{AQ} + sd\,\overparen{PB}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overparen{AP} + sd\,\overparen{PB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overparen{AQ} + sd\,\overparen{PB}\right) \Rightarrow sd\,\overparen{AP} = sd\,\overparen{AQ} \Rightarrow A$ là trung điểm cung PQ,

Suy ra $AP = AQ$ (4)

Xét tam giác APK và tam giác ABP có $\widehat{PAB}$ chung và $\widehat{APK} = \widehat{ABP}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), suy ra $\Delta APK \backsim \Delta ABP(g-g) \Rightarrow \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AK}{AP} \Rightarrow AP^2 = AK.AB$ (5)

Từ (1), (5) và (4) suy ra $AP = AH = AQ$, suy ra A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PQH, mà $AH \perp BC$, nên BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác PQH.

c) Xét hai tam giác APD và AMP có $\widehat{PAM}$ chung và $\widehat{APD} = \widehat{APQ} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AQ} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{AP} = \widehat{AMP}$,

do đó $\Delta APD \backsim AMP(g-g) \Rightarrow \dfrac{AP}{AM} = \dfrac{AD}{AP} \Rightarrow AP^2 = AD.AM$,

do đó $AH^2 = AP^2 = AD.AM \Rightarrow \dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AM}{AH}$

Xét hai tam giác ΔAHM và ΔADH có $\widehat{HAM}$ chung và $\dfrac{AH}{AD} = \dfrac{AM}{AH}$, do đó $\Delta AHM \backsim \Delta ADH\,(c-g-c)$

$\Rightarrow \widehat{AMH} = \widehat{AHD} \Rightarrow AH$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DHM

Suy ra $\widehat{THM} = \widehat{HDM} = 90^0 - \widehat{MDP} = 90^0 - \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{PM} + sd\,\overset{\frown}{AQ}\right) = 90^0 - \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{PM} + sd\,\overset{\frown}{AP}\right)$

$= 90^0 - \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{APM} = 90^0 - \widehat{ATM} = 90^0 - \widehat{HTM} \Rightarrow \widehat{THM} + \widehat{HTM} = 90^0 \Rightarrow \widehat{HMT} = 90^0$.

Bài 38 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – THPT chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025):

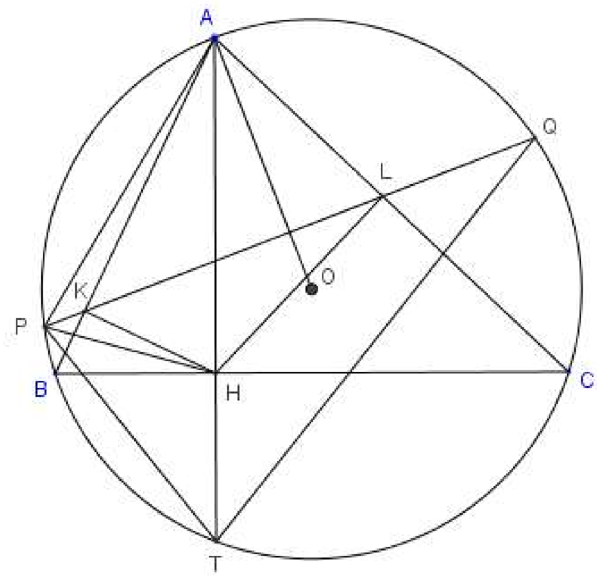
Tam giác nhọn không cân ABC nội tiếp đường tròn (O), đường cao AH $(H \in BC)$. Gọi K, L lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm H trên các cạnh AB, AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P và B cùng phía đối với AC).

a) Chứng minh tứ giác $BKLC$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh PQ vuông góc với AO.

c) AH cắt lại đường tròn (O) tại T $(T \neq A)$. Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác PTQ.

Lời giải:



a) Ta có tam giác AHB vuông tại H và có đường cao là HK, nên $AH^2 = AK.AB$ (1) (hệ thức trong tam giác vuông).

Tương tự ta có $AH^2 = AL.AC$ (2).

Từ(1) và (2) ta được

$AK.AB = AL.AC \Rightarrow \dfrac{AK}{AL} = \dfrac{AC}{AB}$ (3)

Xét tam giác AKL và ACB có $\widehat{KAL}$ chung và thỏa mãn (3), suy ra $\Delta AKL \backsim \Delta ACB \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{ACB}$, suy ra tứ giác $BKLC$ nội tiếp.

b) Từ $\widehat{ACB} = \widehat{AKL} \Rightarrow \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{APB} = \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AQ} + sd\,\overset{\frown}{PB}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AP} + sd\,\overset{\frown}{PB}\right) = \dfrac{1}{2}\left(sd\,\overset{\frown}{AQ} + sd\,\overset{\frown}{PB}\right) \Rightarrow sd\,\overset{\frown}{AP} = sd\,\overset{\frown}{AQ} \Rightarrow A$ là trung điểm cung PQ, do đó $PQ \perp AO$.

c) Từ A là trung điểm cung PQ, suy ra $AP = AQ$ (4) và TA là phân giác $\widehat{PTQ}$.

Xét tam giác APK và tam giác ABP có $\widehat{PAB}$ chung và $\widehat{APK} = \widehat{ABP}$ (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau), suy ra $\Delta APK \backsim \Delta ABP (g-g) \Rightarrow \dfrac{AP}{AB} = \dfrac{AK}{AP} \Rightarrow AP^2 = AK.AB$ (5)

Từ (1), (5) và (4) suy ra $AP = AH = AQ$.

Từ tam giác APH cân tại A, suy ra

$\widehat{APH} = \widehat{AHP} \Rightarrow \widehat{APQ} + \widehat{QPH} = \widehat{HPT} + \widehat{HTP} = \widehat{HPT} + \widehat{ATQ} = \widehat{HPT} + \widehat{APQ} \Rightarrow \widehat{QPH} = \widehat{HPT}$, suy ra PH là phân giác của $\widehat{TPQ}$.

Vậy H là giao điểm của hai đường phân giác trong trong tam giác TPQ, do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác TPQ.

Bài 39 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT chuyên Hùng Vương Phú Thọ năm học 2024 – 2025):

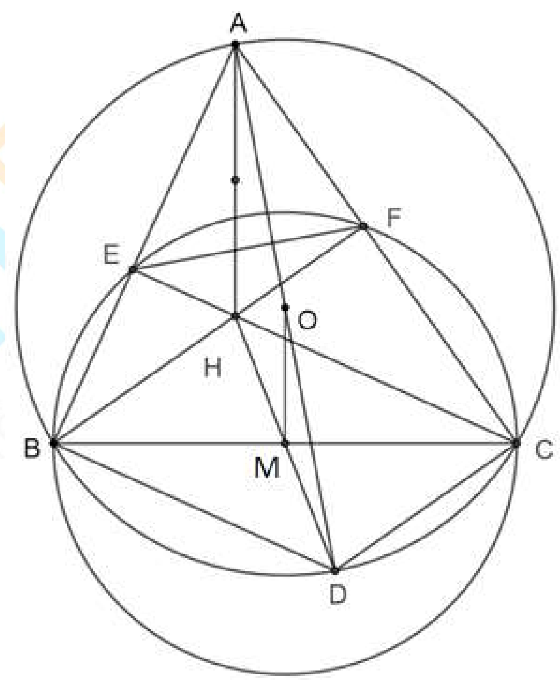
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính $R = 4\,cm$, $BC = 4\sqrt{3}\,cm$. Đường tròn đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E, F ($E \neq B$ và $F \neq C$). Gọi H là giao điểm của BF và CE.

a) Chứng minh rằng tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn và tính bán kính của đường tròn đó.

b) Chứng minh rằng $OA \perp EF$.

c) Từ A kẻ các tiếp tuyến AI, AJ tới đường tròn đường kính BC (I, J là các tiếp điểm). Đường thẳng AH cắt đường tròn (O, R) tại K (K khác A). Tính $\dfrac{HI.HJ}{HK}$.

Lời giải:

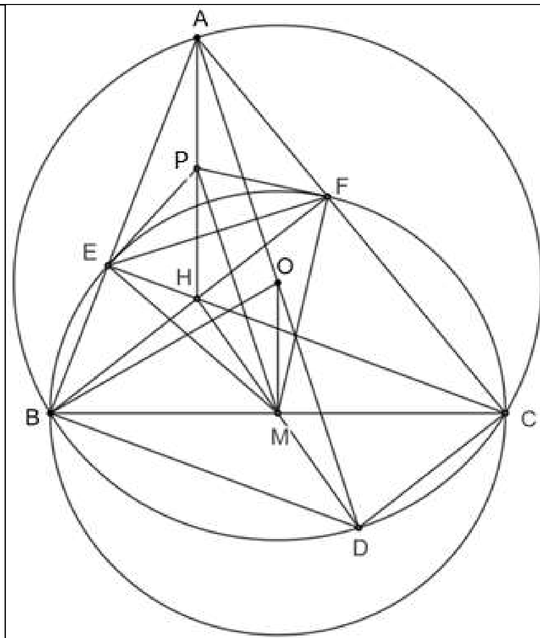
a) Ta có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$. Xét tứ giác $AEHF$ có: $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính $AH = 2R'$. Lấy điểm D đối xứng với điểm A qua O, M là trung điểm BC. Vì BD, HC cùng vuông góc với $AB \Rightarrow BD // HC$; BH, DC cùng vuông góc với $AC \Rightarrow BH // DC \Rightarrow HBDC$ là hình bình hành. Có M là trung điểm BC $\Rightarrow H, M, D$ thẳng hàng và M là trung điểm của HD $\Rightarrow OM$ là đường trung bình của tam giác DAH $\Rightarrow R' = \dfrac{1}{2}AH = OM = \sqrt{BO^2 - BM^2}$ $= \sqrt{4^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2}$ $= 2\,cm.$	

b) Gọi P là trung điểm $AH \Rightarrow PM$ là đường trung bình tam giác AHD $\Rightarrow PM//OA\,(1)$.

$ME = MF = R,\ PE = PF = R'$

$\Rightarrow MP$ là trung trực $EF \Rightarrow MP \perp EF\,(2)$.

Từ (1) và $(2) \Rightarrow OA \perp EF$.



c) $AH \cap BC = N$, $IJ \cap AN = H'$, $IJ \cap AM = L$.

Tứ giác $H'NML$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow AH'.AN = AL.AM = AJ^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông AJM)

Mặt khác $AJ^2 = AF.AC = AH.AN$ (tứ giác $HNCF$ nội tiếp).

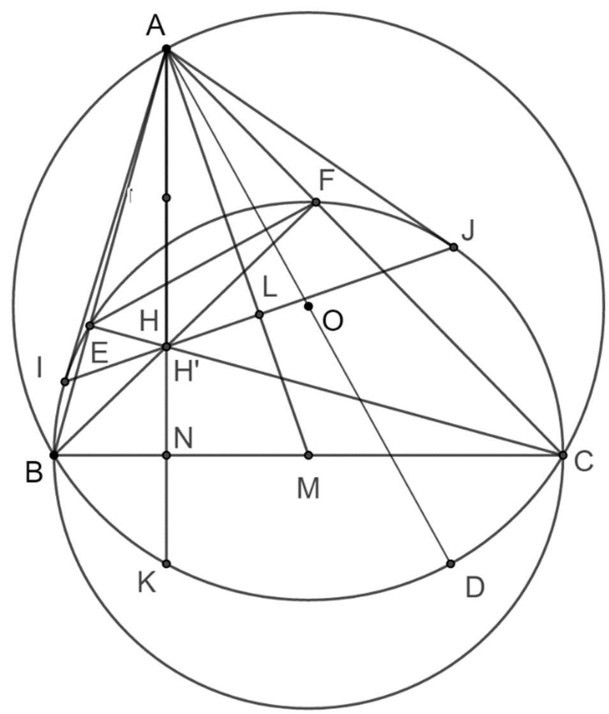
$\Rightarrow AH'.AN = AH.AN \Rightarrow H \equiv H' \Rightarrow I, H, J$ thẳng hàng.

Tứ giác $AINJ$ nội tiếp đường tròn (do 5 điểm A, I, N, M, J cùng thuộc đường tròn đường kính AM) nên $HI.HJ = HA.HN$

Tam giác BHK cân đỉnh B

$\Rightarrow HN = \dfrac{1}{2}HK \Rightarrow HI.HJ = HA.\dfrac{1}{2}HK$

$\Rightarrow \dfrac{HI.HJ}{HK} = \dfrac{1}{2}HA = 2\,cm.$



Bài 40 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O) và có hai đường cao BD, CE cắt nhau tại H. Các tiếp tuyến tại B và C của (O) cắt nhau tại F. Các đường thẳng FB, FC lần lượt cắt đường thẳng DE tại M, N. Gọi I là trung điểm BC.

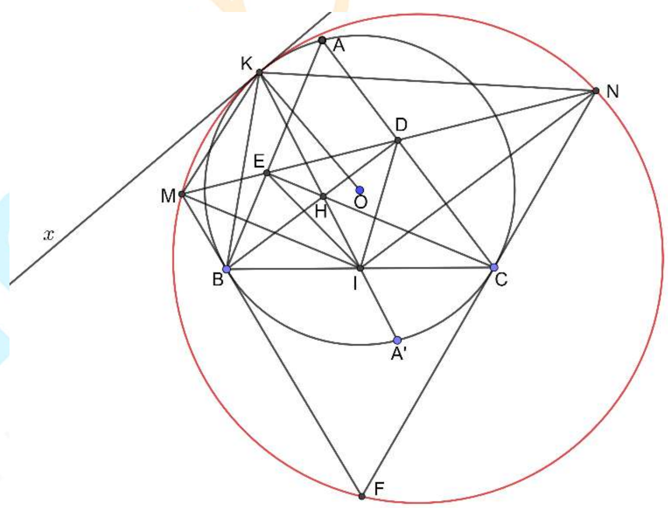
a) Chứng minh $ME = MB$ và MI là tia phân giác của $\widehat{FMN}$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADE cắt (O) tại K (K khác A). Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.

c) Chứng minh các điểm F, M, N, K cùng thuộc một đường tròn.

d) Gọi đường tròn qua các điểm F, M, N, K là (S). Chứng minh (S) tiếp xúc với (O).

Lời giải:



a) $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90^0 \Rightarrow$ tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{MEB} = \widehat{BCD}$.

Mà $\widehat{MBE} = \widehat{BCD}$ nên $\widehat{MEB} = \widehat{MBE}$.

Tam giác MBE cân tại M nên $MB = ME$.

Lại có tam giác BCE vuông tại E, trung tuyến EI nên $IB = IE$.

Suy ra MI là trung trực đoạn BE.

Vậy MI là tia phân giác của $\widehat{FMN}$.

b) Kẻ đường kính AA' của (O). Ta có $BH \parallel CA'$ (cùng vuông góc AC)

và $CH \parallel BA'$ (cùng vuông góc AB) nên $BHCA'$ là hình bình hành và I là trung điểm BC.

Suy ra H, I, A' thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{ADH} = \widehat{AEH} = 90^0$ suy ra tam giác ADE nội tiếp đường tròn đường kính AH.

Lại có $\widehat{HKA} = \widehat{A'KA} = 90^0$ nên K, H, A' thẳng hàng. Do đó H, I, K thẳng hàng.

c) $\widehat{BKI} = \widehat{BKA} - \widehat{HKA} = 180^0 - \widehat{BCA} - 90^0 = 90^0 - \widehat{BCA} = 90^0 - \widehat{MBA} = \widehat{BMI}$.

Do đó tứ giác $BMKI$ nội tiếp. Tương tự ta được tứ giác $CNKI$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{BMK} = \widehat{KIC}$. Mà $\widehat{KIC} + \widehat{KNC} = 180^0$ nên $\widehat{BMK} + \widehat{KNC} = 180^0$.

Vậy các điểm F, M, N, K cùng thuộc một đường tròn.

d) Kẻ tia tiếp tuyến Kx của (O). Ta có:

$\overset{\frown}{xKM} = \overset{\frown}{xKB} - \overset{\frown}{MKB} = \overset{\frown}{KCB} - \overset{\frown}{MIB} = \overset{\frown}{KNI} - \overset{\frown}{MIB}.$

Do $\widehat{MNI} = \widehat{CNI} = \widehat{FCI} - \widehat{CIN} = \widehat{BAC} - \left(90^0 - \widehat{ACB}\right) = \widehat{BAC} + \widehat{ACB} - 90^0 = 90^0 - \widehat{ABC} = \widehat{MIB}$

nên $\widehat{KNI} - \widehat{MIB} = \widehat{KNM}$.

Suy ra Kx là tiếp tuyến của (S). Vậy (S) tiếp xúc với (O).

Bài 41 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025):

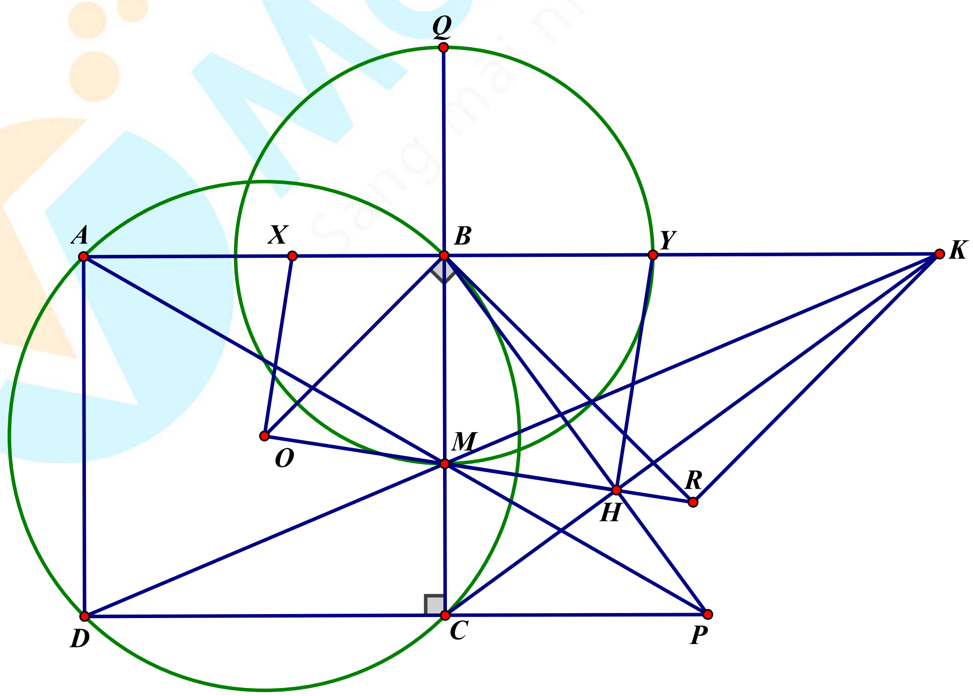
Cho hình vuông $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O), điểm M nằm giữa hai điểm B và C. Hai đường thẳng AM và DC cắt nhau tại P. Hai đường thẳng DM và AB cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tam giác BCK đồng dạng với tam giác CPB

b) Hai đường thẳng BP và CK cắt nhau tại H. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng MH tại R. Chứng minh tam giác BRK là tam giác vuông cân.

c) Các đường thẳng vuông góc với OH kẻ từ O và H, cắt đường thẳng AB lần lượt tại X và Y. Lấy điểm Q thuộc tia đối của tia BC sao cho $BQ = CM$. Chứng minh hai đường thẳng QR, DK cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác MXY.

Lời giải:



a) Ta có hình vuông $ABCD \Rightarrow AB\ //\ CD$

$AB\ //\ CD \Rightarrow AB\ //\ CP \Rightarrow \dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BM}{MC}$ (1) (Định lý Thales)

$AB\ //\ CD \Rightarrow BK\ //\ DC \Rightarrow \dfrac{BK}{CD} = \dfrac{BM}{MC}$ (2) (Định lý Thales)

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{BK}{CD} = \dfrac{AB}{CP} \Rightarrow \dfrac{BK}{CB} = \dfrac{BC}{CP}$

Xét tam giác BCK và tam giác CPB có: $\dfrac{BK}{CB} = \dfrac{BC}{CP}$ (chứng minh trên); $\widehat{CBK} = \widehat{BCP} = 90^\circ$

$\Rightarrow\ \Delta BCK \backsim \Delta CPB (c-g-c)$

b) ***Cách 1:*** Gọi cạnh hình vuông là $a > 0$

Ta có: $\widehat{MAB} = \widehat{APD}$ (so le trong); $\widehat{MBA} = \widehat{ADP} = 90^\circ$

$\Rightarrow\ \Delta MAB \backsim \Delta APD \Rightarrow \dfrac{MB}{AD} = \dfrac{AB}{PD} \Rightarrow\ MB.PD = AB.AD = a^2 = BO.BD$

$\Rightarrow\ \Delta BOM \backsim \Delta DPB \Rightarrow\ \widehat{BOM} = \widehat{DPB}$ (*)

Mà $\Delta BCK \backsim \Delta CPB \Rightarrow \widehat{BCK} = \widehat{CPB}$

Cũng có $\widehat{HBK} = \widehat{CPB}$ (so le trong) $\Rightarrow\ \widehat{HBK} = \widehat{BCK}$

Ta có: $\widehat{HBK} + \widehat{BKH} = \widehat{BCK} + \widehat{BKH} = 90^\circ \Rightarrow\ \widehat{BHK} = 90^\circ$

Mà $\widehat{BOC} = 90^\circ \Rightarrow\ B,\ O,\ C,\ H$ thuộc đường tròn đường kính BC

$\Rightarrow\ \widehat{BOH} = \widehat{BCH} \Rightarrow \widehat{BOH} = \widehat{DPB} (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow\ \widehat{BOH} = \widehat{BOM} \Rightarrow\ O,\ H,\ M$ thẳng hàng

Mà tứ giác $BOCH$ nội tiếp nên ta có $\widehat{OHC} = \widehat{OBC} = 45^\circ$

Lại có: $BR\ //\ AC$ (vì cùng vuông góc với OB) $\Rightarrow\ \widehat{RBK} = \widehat{CAB} = \widehat{MHC} = \widehat{KHR} = 45^0$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHRK$ nội tiếp

$\Rightarrow\ \widehat{BRK} = \widehat{BHK} = 90^\circ$

Mà $\widehat{RBK} = 45^\circ$ nên tam giác RBK vuông cân tại R

Cách 2: Ta có: (chứng minh phần a) $\Rightarrow\ \widehat{BCK} = \widehat{BPC}$ (hai góc tương ứng)

Mà $\widehat{BCK} + \widehat{HCP} = \widehat{BCP} = 90^\circ \Rightarrow\ \widehat{HCP} + \widehat{HPC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tam giác CHP vuông tại H

$\Rightarrow\ CK \perp BP$ tại H

Có $\dfrac{HB}{HC}=\dfrac{CB}{CP}=\dfrac{MB}{MC}\Rightarrow HM$ là tia phân giác của $\widehat{BHC}\Rightarrow \widehat{MHC}=45^\circ=\widehat{RBK}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BHRK$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{RBK}=\widehat{RHC}=45^\circ,\widehat{RKB}=\widehat{MHC}=\widehat{RHK}=45^\circ$

$\Rightarrow$ Tam giác RBK vuông cân tại R

c) Dễ chứng minh $\Delta OBX=\Delta OCM\,(c-g-c)\Rightarrow BX=CM$

Tứ giác $BMHY$ nội tiếp nên tam giác BMY vuông cân tại B (do $\widehat{BHO}=\widehat{BHY}=45^\circ$) $\Rightarrow BM=BY$

Từ đó ta có: $BX.BY=CM.BM=BQ.BM\Rightarrow$ Tứ giác $QXMY$ nội tiếp

Gọi QR giao (MXY) tại. K' là giao điểm DT, AB

Ta chứng minh K' trùng K

Thật vậy, tam giác BMY vuông cân nên $\widehat{BMY}=\widehat{OBM}=45^\circ$

$\Rightarrow OB\,//\,MY\Rightarrow MY\perp BR\Rightarrow BR$ là đường trung trực của MY

$\Rightarrow \widehat{RYK}=180^\circ-\widehat{BYR}=180^\circ-\widehat{BMR}=\widehat{BMO}=\widehat{QTM}=\widehat{RTK'}\Rightarrow$ Tứ giác $TYK'R$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{RK'B}=\widehat{QTY}=\widehat{QXB}=45^\circ$

Từ đó tam giác BRK' vuông cân. Do đó K' trùng K

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 42. (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Chuyên KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025)

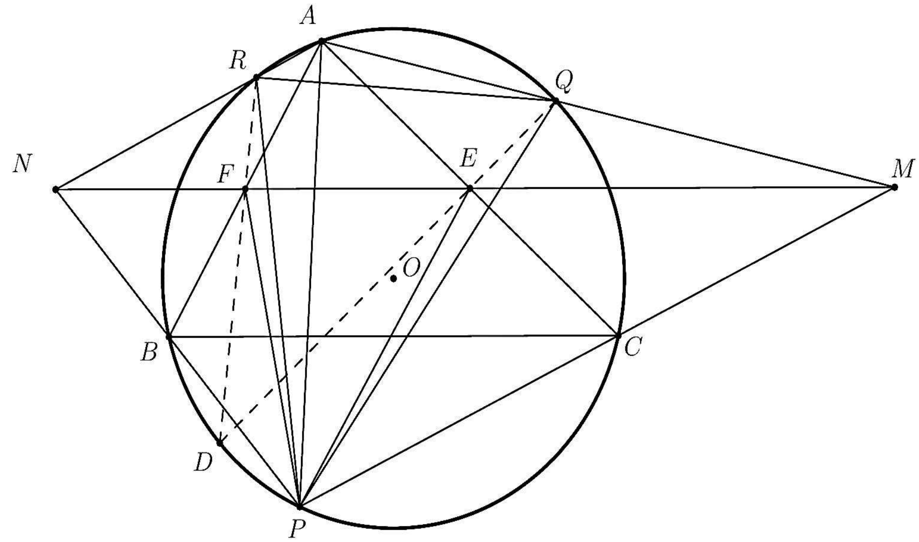
Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O). E,F lần lượt là trung điểm của CA,AB. Điểm P di chuyển trên cung nhỏ BC (P khác B,C). Gọi M,N lần lượt là giao điểm của PC,PB với EF. AM,AN cắt (O) theo thứ tự tại Q,R (Q,R khác A).

a) Chứng minh rằng tứ giác $AFPM$ nội tiếp và $\widehat{EPF}=\widehat{QPR}$.

b) Chứng minh rằng giao điểm của QE và RF nằm trên (O).

c) Lấy S,T lần lượt thuộc vào các đường thẳng CA,AB sao cho ba đường thẳng ET,FS,AP song song với nhau. Gọi K và L lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác NFS và MET. Đường thẳng qua K vuông góc với AB cắt đường thẳng qua L vuông góc với AC tại J. Chứng minh rằng J luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi P thay đổi.

Lời giải:



a) Vì $EF//BC$ và tứ giác $ABPC$ nội tiếp nên ta thu được $\widehat{PMF}=\widehat{PCB}=\widehat{PAB}=\widehat{PAF}$.

Do đó, tứ giác $AFPM$ nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta cũng được tứ giác $AEPN$ nội tiếp. Từ đó ta có biến đổi góc

$\widehat{EPF}=\widehat{EPA}+\widehat{FPA}=\widehat{ENA}+\widehat{FMA}=180^\circ-\widehat{MAN}=180^\circ-\widehat{QAR}=\widehat{QPR}$ (điều phải chứng minh)

b) Từ các tứ giác nội tiếp $AEPN$ và $AQPR$ ta thu được $\widehat{PEF}=\widehat{PEN}=\widehat{PAN}=\widehat{PAR}=\widehat{PQR}$.

Vì thế ta được $\triangle PEF \backsim \triangle PQR(g-g)$, dẫn đến $\dfrac{PE}{PQ}=\dfrac{PF}{PR}$.

Kết hợp với $\widehat{EPQ}=\widehat{RPQ}-\widehat{RPE}=\widehat{FPE}-\widehat{RPE}=\widehat{FPR}$, ta suy ra $\triangle PEQ \backsim \triangle PFR(c-g-c)$.

Do đó, $\widehat{PRF}=\widehat{PQE}$. Gọi D là giao điểm của QE và RF. Từ $\widehat{PRF}=\widehat{PQE}$ ta suy ra tứ giác $DPQR$ nội tiếp. Vì vậy $D\in(O)$ và ta có điều phải chứng minh.

c) Trước hết ta phát biểu ba bổ đề như sau

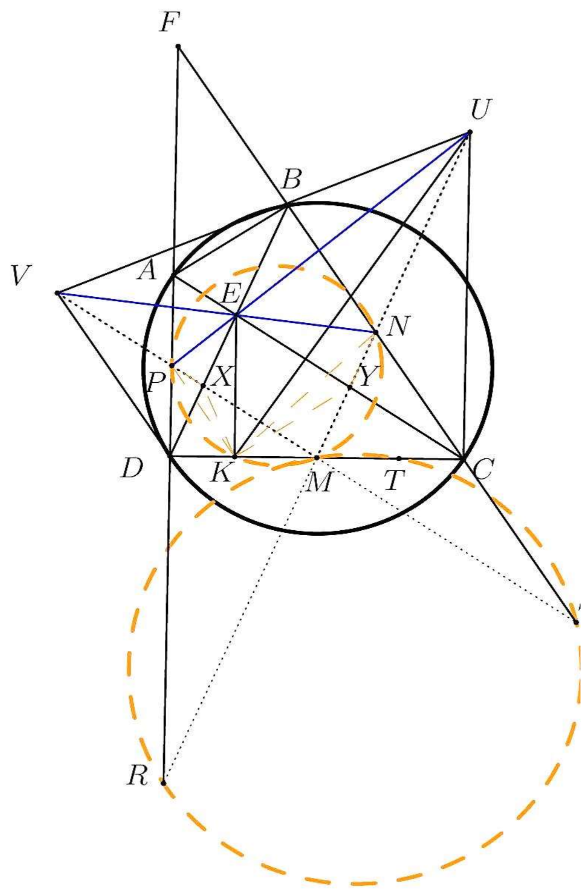
Bổ đề 1. Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E,F sao cho tứ giác $BCEF$ nội tiếp. BE cắt CF tại điểm K. Khi đó, ba đường tròn $(O),(AEF)$ và (AK) có một điểm chung khác A.

Đây là bổ đề quen thuộc, nên xin phép không nhắc lại chứng minh ở đây.

Bổ đề 2. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại E. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của CD,BC,AD. K là hình chiếu của E trên BC và T là điểm đối xứng với K qua M Trên các đường thẳng AD,BC lấy các điểm R,S sao cho $MR//BD$ và $MS//AC$. Khi đó ta có

(a) Bốn điểm K,M,N,P cùng thuộc một đường tròn;

(b) Bốn điểm M,R,S,T cùng thuộc một đường tròn.



Chứng minh bổ đề 2 .

(a) Gọi X,Y lần lượt là trung điểm của ED,EC.

Từ tính chất đường trung bình thì ta có $X\in MP$ và $Y\in MN$. Để ý rằng E,K đối xứng nhau qua XY và $EXMY$ là hình bình hành, ta được $\widehat{XKY}=\widehat{XEY}=\widehat{XMY}$, dẫn đến tứ giác $KXYM$ nội tiếp.

Do đó $\widehat{KXM}=\widehat{KYM}$ và kéo theo $\widehat{KXP}=\widehat{KYN}$.

Mặt khác, để ý rằng $\triangle EAD\backsim\triangle EBC$ nên ta có

$$\frac{KX}{XP}=\frac{XE}{XP}=\frac{\frac{1}{2}ED}{\frac{1}{2}EA}=\frac{ED}{EA}=\frac{EC}{EB}=\frac{2KY}{2YN}=\frac{KY}{YN}$$

Như vậy $\triangle KXP\backsim\triangle KYN\left(c-g-c\right)$. Vì thế $\widehat{KPX}=\widehat{KNY}$ và do đó $KMNP$ là tứ giác nội tiếp.

(b) Gọi U,V lần lượt là các điểm đối xứng với S,R qua M. Ta chỉ cần chứng minh tứ giác $KMUV$ nội tiếp, rồi dùng tính đối xứng để thu được điều phải chứng minh.

Gọi U,V lần lượt là các điểm đối xứng với S,R qua M. Ta chỉ cần chứng minh tứ giác $KMUV$ nội tiếp, rồi dùng tính đối xứng để thu được điều phải chứng minh.

Đầu tiên để ý rằng $\widehat{NRP}=\widehat{EDA}=\widehat{ECB}=\widehat{NSP}$, vì thế tứ giác $NPRS$ nội tiếp. Kết hợp với $UV//RS$ ta thu được $\widehat{NUV}=\widehat{NRS}=\widehat{NPS}$, dẫn đến tứ giác $NUVP$ là tứ giác nội tiếp.

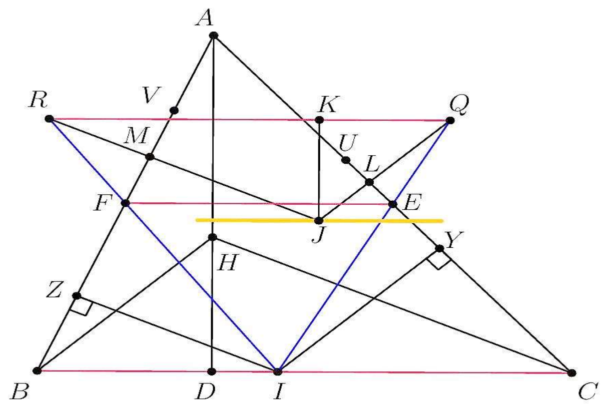
Bây giờ ta sẽ đi chứng minh N,E,V thẳng hàng. Đặt $AD\cap BC\equiv F$. Chú ý rằng $DV//BC$ và $PV//AC$, ta được $\widehat{PDV}=\widehat{AFC}$ và $\widehat{DPV}=\widehat{FAC}$, kéo theo $\triangle DPV\backsim\triangle FAC$ (g.g). Do đó,

$$\frac{DV}{BN}=\frac{DV}{DP}\cdot\frac{DP}{BN}=\frac{FC}{FA}\cdot\frac{AD}{BC}=\frac{CD}{AB}\cdot\frac{EA}{EB}=\frac{ED}{EA}\cdot\frac{EA}{EB}=\frac{ED}{EB}$$

Từ đó suy ra E,N,V thẳng hàng. Chứng minh tương tự ta cũng được P,E,U thẳng hàng. Áp dụng bổ đề 1 cho $\triangle MUV$, để ý rằng tứ giác $NUVP$ nội tiếp, ta suy ra ba đường tròn $\left(MUV\right),\left(MNP\right)$ và

(ME) đồng quy tại một điểm khác M. Mặt khác, từ ý (a) ta lại có (MNP) và (ME) cắt nhau tại K. Vì vậy ta thu được $K \in (MUV)$.

Bổ đề 3. Cho tam giác ABC. E, F lần lượt là trung điểm của CA, AB. I là một điểm di chuyển trên BC. Y, Z lần lượt là hình chiếu của I trên CA, AB. U, V lần lượt đối xứng với Y, Z qua E, F. Trung trực của EU và FV cắt nhau tại J. Khi đó, điểm J chạy trên một đường thẳng cố định.



Chứng minh bổ đề. Gọi L, M lần lượt là trung điểm của EU và FV. Khi đó, ta có $EL = \frac{1}{2}EY$ và $FM = \frac{1}{2}FZ$. Trên tia đối của tia EI lấy điểm Q sao cho $EQ = \frac{1}{2}EI$. Trên tia đối của tia FI lấy điểm R sao cho $FR = \frac{1}{2}FI$. Khi đó ta được $MR // IZ$ và $LQ // IY$ và dẫn đến $Q \in JL$ và $R \in JM$.

Gọi H là trực tâm của $\triangle ABC$. AH cắt BC tại D và gọi K là hình chiếu của J trên QR.

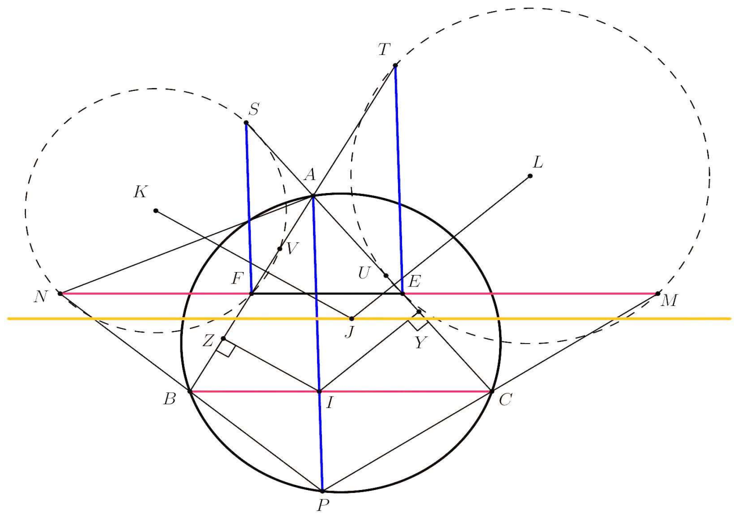
Khi đó ta có $IQ // HB$ (cùng vuông góc với CA) và $JR // HC$ (cùng vuông góc với AB).

Lại để ý rằng $QR // FE // BC$, ta chứng minh được $\triangle JQR \backsim \triangle HBC (g-g)$. Để ý rằng JK và HD là hai đường cao tương ứng của hai tam giác này, vì thế ta thu được $\frac{JK}{HD} = \frac{QR}{BC} = \frac{QR}{EF} \cdot \frac{EF}{BC} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

Do đó, $JK = \frac{3}{4}HD =$ const. Mặt khác, từ cách dựng điểm Q, R thì đường thẳng QR là một đường cố định với khoảng cách giữa QR và BC bằng $\frac{3}{2}$ khoảng cách từ EF đến BC. Do đó, lại chú ý rằng $QR // BC$, ta có thể kết luận rằng điểm J chạy trên đường thẳng cố định song song với BC.

Trở lại bài toán. Gọi I là giao điểm của AP và BC. Y, Z lần lượt là hình chiếu của I trên CA, AB. Gọi U, V lần lượt là đối xứng của Y, Z qua E, F. Áp dụng hai lần bổ đề 2 cho tứ giác nội tiếp

$ABCD$ ta suy ra được $U \in (MET)$ và $V \in (NFS)$. Do đó, JK và JL tương ứng là trung trực của FV và EU. Do đó, áp dụng bổ đề 3 cho $\triangle ABC$ thì điểm J luôn chạy trên một đường thẳng song song với BC cố định.



Bài 43 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Chuyên Sư Phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025):

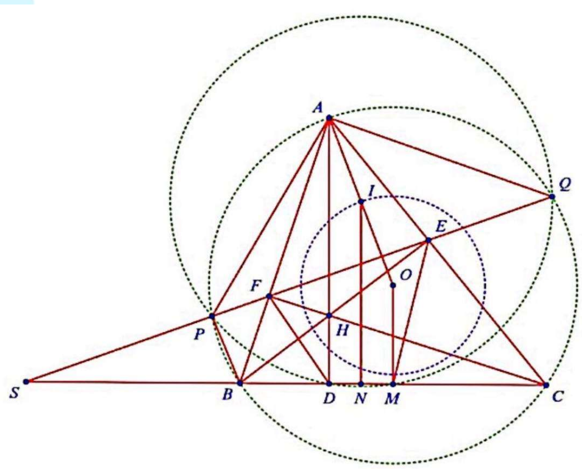
Cho đường tròn (O,R) và dây cung BC cố định không đi qua tâm O. A là một điểm di động trên đường tròn (O,R) sao cho tam giác ABC nhọn và $AB \neq AC$. Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại hai điểm P và Q sao cho F nằm giữa P và E. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh rằng

a) $AP^2 = AQ^2 = AH \cdot AD$.

b) Bốn điểm P, Q, M, D cùng nằm trên một đường tròn (ω).

c) Tâm I của đường tròn (ω) luôn thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải:



a) Ta có $\angle BEC = \angle BFC = 90^0$ và $\angle HDB + \angle HFB = 90^0 + 90^0 = 180^0$ nên các tứ giác $BCEF$ và $BDHF$ nội tiếp. Lại có tam giác OAC cân tại O nên

$$\angle OAC = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} = 90^\circ - \angle ABC = 90^\circ - \angle AEF$$

Suy ra $\angle OAC + \angle AEF = 90^\circ$. Từ đây, ta có $OA \perp PQ$.

Xét đường tròn (O,R) có A là điểm chính giữa của cung PAQ nên $AP = AQ$.

Suy ra $\angle APQ = \angle AQP = \angle ABP$

Từ đó, dễ thấy hai tam giác ABP và APF đồng dạng (g-g). Suy ra $AQ^2 = AP^2 = AB \cdot AF = AD \cdot AH$

b) Ta xét các điểm ở vị trí như trong hình vẽ, các trường hợp còn lại chứng minh tương tự.

Do các tứ giác $BCEF, BDHF$ nội tiếp nên $\angle CFE = \angle CBE = \angle HFD$. Suy ra $\angle DFE = 2\angle CFE$.

Vì M là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCEF$ nên $\angle CME = 2\angle CFE = \angle DFE$.

Suy ra tứ giác $DMEF$ nội tiếp.

Bây giờ, gọi S là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC.

Ta có $SD \cdot SM = SE \cdot SF = SB \cdot SC = SP \cdot SQ$.

Do đó, bốn điểm P, Q, M, D cùng thuộc đường tròn (ω).

c) Do điểm I thuộc đường trung trực của PQ và $AO \perp PQ$ nên điểm I thuộc đường thẳng AO. Qua điểm I, kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng DM tại điểm N thì N là trung điểm của đoạn thẳng DM và $AD // OM // IN$. Áp dụng tính chất đường trung bình của hình thang, ta có I là trung điểm của đoạn thẳng OA. Suy ra $OI = \frac{OA}{2} = \frac{R}{2}$ không đổi. Vậy, tâm I của đường tròn (ω) luôn thuộc đường tròn $\left(O, \frac{R}{2}\right)$ cố định khi điểm A thay đổi.

Bài 44 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – Sở GD & ĐT Hà Nội năm học 2024 – 2025):

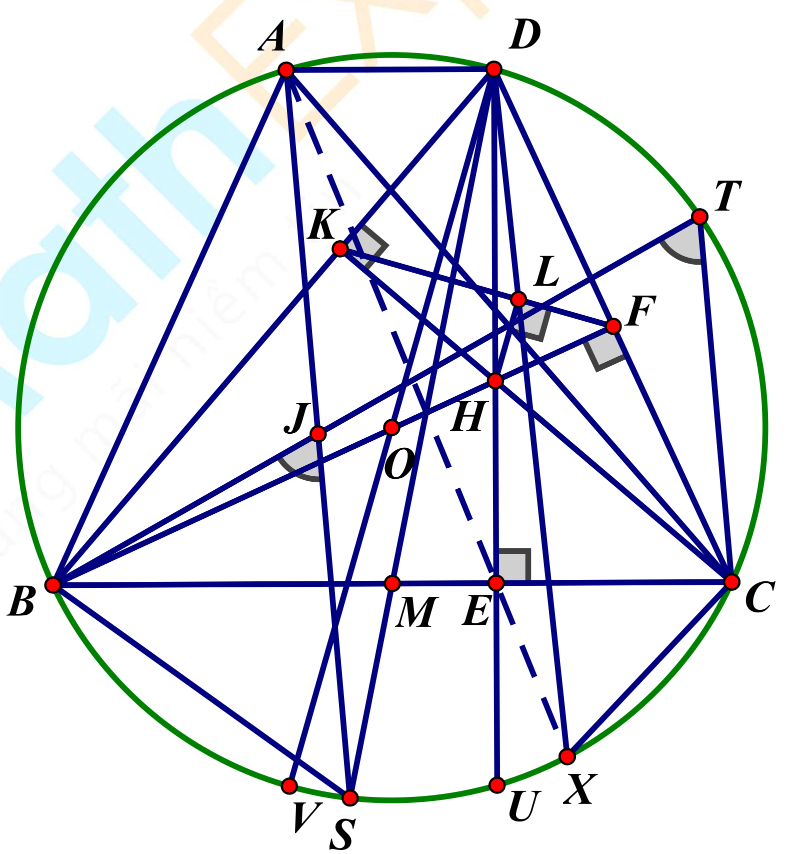
Cho tam giác nhọn $ABC(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Đường thẳng đi qua A và song song với BC cắt (O) tại giao điểm thứ hai là D. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng DM cắt (O) tại giao điểm thứ hai là S.

a) Chứng minh rằng tam giác ACS đồng dạng với tam giác BMS.

b) Gọi J là trung điểm của đoạn thẳng AS. Đường thẳng BJ cắt (O) tại giao điểm thứ hai là T. Chứng minh rằng đường thẳng CT song song với đường thẳng AS.

c) Các đường cao DE, BF, CK của tam giác BDC đồng quy tại H. Gọi L là chân đường vuông góc kẻ từ H đến KF. Chứng minh rằng các đường thẳng AE và DL cắt nhau tại một điểm nằm trên đường tròn (O).

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{ASC} = \widehat{BSM}$ (do $AC = BD$)

Mà $\widehat{SBM} = \widehat{SAC}$

$\Rightarrow \triangle SBM \backsim \triangle SAC (g-g)$

b) Từ câu a) ta có

$BS.AC = AS.BM = \frac{1}{2}.AS.BC = SJ.BC$

$\Rightarrow \frac{BS}{SJ} = \frac{BC}{AC}$

$\Rightarrow \triangle JBS \backsim \triangle ABC (c-g-c)$

Từ đó $\widehat{SJB} = \widehat{BAC} = \widehat{BTC} \Rightarrow TC \,//\, AS$

c) DL cắt (O) tại X khác D

Ta có: $\widehat{DXC} = \widehat{DBC} = \widehat{DFK}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $LXCF$ nội tiếp

Suy ra $DL.DX = DF.DC = DH.DE \Rightarrow$ $HEXL$ nội tiếp

Kẻ đường kính DV của (O); DE cắt (O) tại U

Ta có: $\widehat{EXL}=\widehat{DHL}=\widehat{ODH}$ (do $OD\perp FK$) $=\frac{1}{2}sd\overparen{UV}=\frac{1}{2}sd\overparen{AD}=\widehat{AXD}$

Vậy A,E,X thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh.

Bài 45 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2024 – 2025):

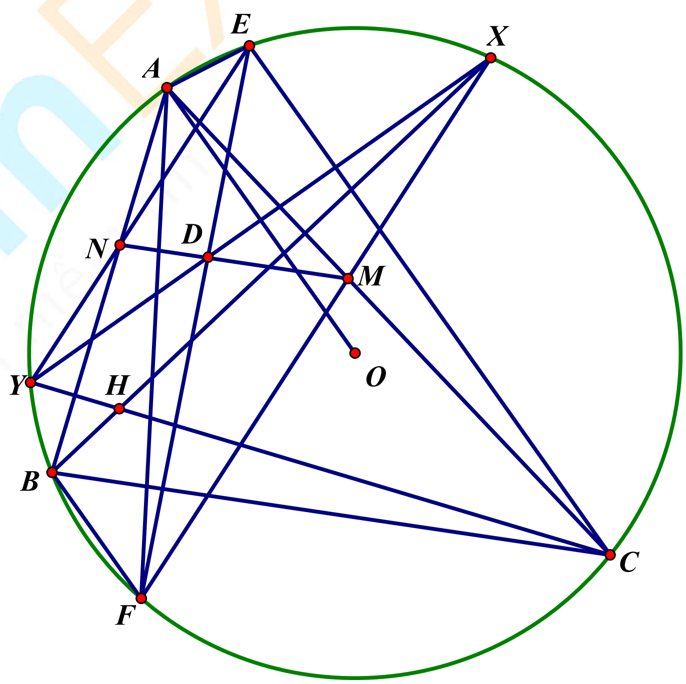
Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) và $\widehat{BAC}=60^\circ$. Các đường thẳng qua C và B song song với AO cắt đường tròn (O) lần lượt tại E và F (E khác C, F khác B). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. Đường thẳng BH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là X $(X\neq B)$; đường thẳng CH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai Y $(Y\neq C)$.

a) Chứng minh tam giác AEF đồng dạng với tam giác HBC

b) Gọi M là giao điểm của XF với AC và N là giao điểm của YE với AB. Chứng minh $MN\ //\ BC$.

c) Chứng minh ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{AFE}=\widehat{ACE}=\widehat{OAC}$

$=90^\circ-\frac{1}{2}\widehat{AOC}=90^\circ-\widehat{ABC}=\widehat{HCB}$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $\widehat{AEF}=\widehat{HBC}$

Từ đó suy ra hai tam giác AEF và HBC đồng dạng

b) Vì $BF\ //\ CE$ nên chứng minh được $EF=BC$

Mà hai tam giác AEF và HBC đồng dạng (theo câu a) nên hai tam giác này cũng bằng nhau

Suy ra $AE=HB$ và $AF=HC$

Mà $HB=BY$ và $HC=CX$ (tính chất của trực tâm)

Nên $AE=HB=BY$ và $AF=HC=CX$. Vì $AE=BY$ nên tứ giác $AEBY$ là hình thang cân

Suy ra $\frac{AN}{NB}=\frac{AY}{BE}$. Chứng minh tương tự ta cũng có $\frac{AM}{MC}=\frac{AX}{CF}$

Mặt khác ta lại có $AY = AX = AH$ (theo tính chất của trực tâm) và $BE = CF$ (do tứ giác $BFCE$ là hình thang cân) nên $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{MC} \Rightarrow MN // BC$

c) Tứ giác $AXCF$ là hình thang cân nên $\widehat{FCY} = \widehat{FCA} - \widehat{YCA} = \widehat{CAX} - \widehat{YCA} = \widehat{HBC} - \widehat{YCA}$

Mà $\widehat{YCA} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{OBC}$ nên $\widehat{FCY} = \widehat{HBC} - \widehat{OBC} = \widehat{HBO}$

Chứng minh tương tự ta cũng có $\widehat{XCE} = \widehat{HCO}$

Mặt khác, ta lại có $\widehat{BHC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = 120^\circ = \widehat{BOC}$

Nên tứ giác $BHOC$ nội tiếp. Vì thế $\widehat{HCO} = \widehat{HBO}$

Từ đây, ta suy ra $\widehat{FCY} = \widehat{HBO} = \widehat{HCO} = \widehat{XCE}$. Như vậy, $XE = FY$

Từ đó $YE // FX$

Bây giờ, sử dụng định lý Thales, ta có $\frac{MX}{MF} = \frac{AX}{FC} = \frac{AY}{BE} = \frac{NF}{NE}$

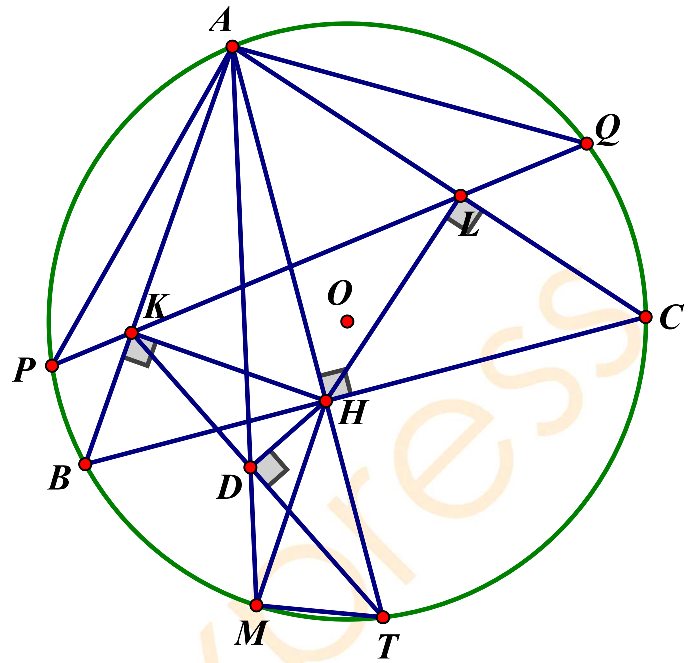
Kết hợp với $YE // FX$ ta dễ dàng suy ra ba đường thẳng MN, XY, FE đồng quy.

Bài 46 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bắc Ninh năm học 2024 – 2025):

1. Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O), đường cao $AH\,(H \in BC)$. Gọi K, L lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB và AC. Đường thẳng KL cắt đường tròn (O) tại hai điểm $P, Q(P$ nằm trên cung nhỏ $AB)$. Chứng minh $\widehat{AKL} = \widehat{ACB}$ và $AP = AQ$.

2. Cho đoạn thẳng BC cố định và một điểm A thay đổi sao cho tam giác ABC vuông tại A. Hai đường phân giác trong của tam giác ABC là BD và CE cắt nhau tại điểm O. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\frac{BD^2}{BO^2} + \frac{CE^2}{CO^2}$.

Lời giải:



1. Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông thì:

$AH^2 = AK.AB = AL.AC$

Nên $\frac{AK}{AC} = \frac{AL}{AB}$ đồng thời có $\widehat{BAC}$ chung

Suy ra $\triangle AKL \backsim \triangle ACB\,(c-g-c) \Rightarrow \widehat{AKL} = \widehat{ACB}$

Ta có: $180^\circ - \widehat{AKL} = 180^\circ - \widehat{ACB}$ nên $\widehat{AKP} = \widehat{APB}$

Có $\widehat{PAB}$ chung, suy ra $\triangle AKP \backsim \triangle APB(g-g)$

Nên $\frac{AK}{AP} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow AP^2 = AB.AK = AH^2$

Suy ra $AP = AH$, tương tự có $AQ = AH$. Nên $AP = AQ$

2. Từ giả thiết ta có O là tâm đường tròn nội tiếp của $\triangle ABC$.

Khi này, ta dễ dàng có những biến đổi sau, theo tính chất đường phân giác:

$$\frac{BD}{BO} = \frac{AD+AB}{AB} = 1 + \frac{AD}{AB} = 1 + \frac{AD+DC}{AB+BC} = \frac{AB+BC+CA}{AB+BC}$$

Tương tự ta có $\frac{CE}{CO} = \frac{AB+BC+CA}{AC+BC}$

Khi đó $S = \left(\frac{BD}{BO}\right)^2 + \left(\frac{CE}{CO}\right)^2$

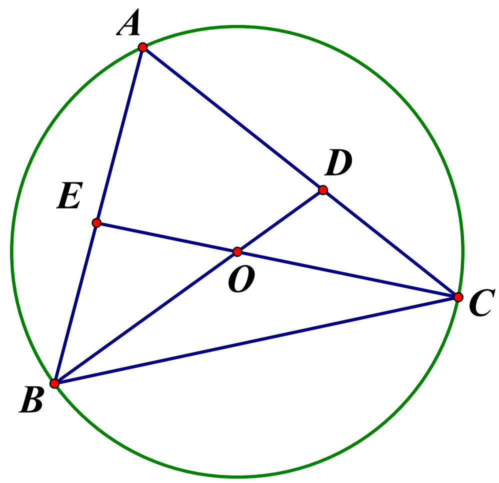
Suy ra $S \ge 2\cdot\frac{BD}{BO}\cdot\frac{CE}{CO} \ge 2\cdot\frac{(AB+BC+CA)^2}{(AB+BC)(AC+BC)} \ge 2\cdot\frac{(AB+BC+CA)^2}{AB\cdot AC + BC(AB+AC) + BC^2}$

Đặt $BC = a, CA = b, AB = c$, ta có: $S \ge 2.\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}{a^2+ab+bc+ca} = 2\left(2 + \frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+ab+bc+ca}\right)$

Mà $b^2+c^2-a^2 = 0$. Nên $S \ge 2.2 = 4$

Dấu $=$ xảy ra khi $AB = AC = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot BC$

Tức A là điểm chính giữa cung BC.



Bài 47 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hưng Yên năm học 2024 – 2025):

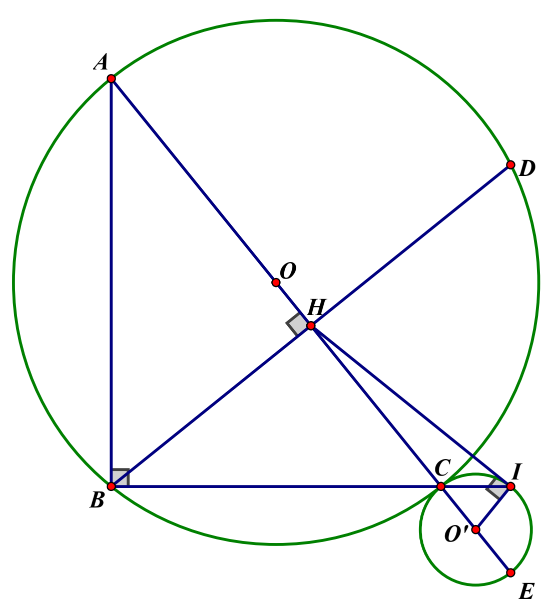
1. Cho tam giác ABC vuông tại B $(BC > AB)$ nội tiếp trong đường tròn tâm O, đường kính $AC = 2R$. Kẻ dây cung BD vuông góc với AC, H là giao điểm của AC và BD. Trên HC lấy điểm E sao cho E đối xứng với A qua H. Đường tròn tâm O' đường kính EC cắt đoạn BC tại I (I khác C)

a) Chứng minh HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC

b) Khi điểm B thay đổi thì điểm H cũng thay đổi. Tìm vị trí của điểm H trên đoạn AC để diện tích tam giác $O'IH$ là lớn nhất

2. Một xô bằng tôn dạng hình nón cụt (giả sử mép không đáng kể, đáy nhỏ bị bịt tôn) có các bán kính đáy là 17cm và 10cm, chiều cao 24cm. Tính diện tích tôn để làm xô.

Lời giải:



1. a) Do đường tròn đường kính EC cắt BC tại I nên

$\widehat{BIE} = \widehat{CIE} = 90^\circ$ (1)

Mà theo giả thiết, BD vuông AC tại H $\Rightarrow \widehat{BHE} = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BHEI$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HIB} = \widehat{HEB}$

Do A đối xứng với E qua H, BH vuông AE nên $\triangle AEB$ cân tại B $\Rightarrow \widehat{BAH} = \widehat{BEH}$

$\triangle O'CI$ cân tại O' nên $\widehat{O'CI} = \widehat{O'IC}$

Có $\widehat{ABC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \widehat{BAH} + \widehat{BCH} = \widehat{BAH} + \widehat{O'CI} = \widehat{O'IC} + \widehat{BEH} = \widehat{O'IC} + \widehat{CIH} = \widehat{O'IH} = 90^0$

Do đó: HI là tiếp tuyến của đường tròn đường kính EC

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có: $\widehat{HIO'} = 90^\circ$

Do đó: $S_{O'IH} = \frac{1}{2}O'I.IH; O'I^2 + IH^2 = HO'^2$. Mà $O'I.IH \le \frac{O'I^2 + IH^2}{2} = \frac{O'H^2}{2} \Rightarrow S_{O'IH} \le \frac{O'H^2}{4}$

Mặt khác $AC = AE - EC = 2HE - 2EO' = 2HO' = 2R \Rightarrow HO' = R$. Vì thế $S_{O'IH} \le \frac{R^2}{4}$

Dấu "=" xảy ra khi $IH = IO' = \frac{EC}{2}$

Mà $\widehat{HIB} = \widehat{HEB}$ ($BHEI$ nội tiếp) $= \widehat{HAB} = \widehat{HBC}$ (cùng phụ $\widehat{ABH}$)

Nên tam giác HIB cân tại H. Suy ra: $HI = HB$

Do đó: $\frac{EC}{2} = HB \Rightarrow \frac{EC^2}{4} = HB^2$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ABC, đường cao BH, ta có: $HB^2 = HA.HC$

$\Rightarrow \frac{EC^2}{4} = HA.HC = \frac{(HA - HC)^2}{4}$ (*) (do $EC = HE - HC = HA - HC$)

Đặt $HA = x(x > 0)$ thì $HC = 2R - x$

Từ (*) $\Rightarrow x(2R - x) = \frac{(2R - x - x)^2}{4} = (R - x)^2 \Rightarrow 2x^2 - 4Rx + R^2 = 0$

Do $0 < x < 2R$ nên $x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R \Rightarrow HA = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$

Vậy H nằm trên AC sao cho $HA = \frac{2-\sqrt{2}}{2}R$ thì $S_{O'IH}$ lớn nhất

2. $S = S_{xq} + S_{daynho} \Rightarrow S = \pi(r_1 + r_2)l + \pi r_1^2 (r_1 = 10, r_2 = 17)$ (có $l = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} = 25$)

$\Rightarrow S = \pi(17 + 10).25 + \pi.10^2 = 775\pi(cm^2)$

Vậy diện tích tôn để làm xô là $775\pi(cm^2)$.

Bài 48 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Hà Giang năm học 2024 – 2025):

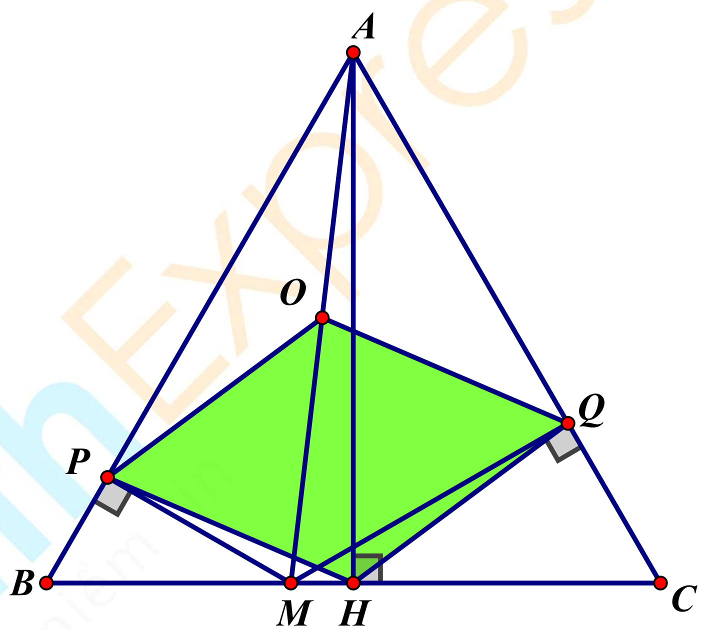
Cho tam giác đều ABC, cạnh a, đường cao AH. M là một điểm thay đổi trên cạnh BC, qua M kẻ MP vuông góc với AB, MQ vuông góc với AC. Gọi O là trung điểm của AM.

a) Chứng minh năm điểm A, P, M, H, Q cùng thuộc một đường tròn.

b) Tứ giác $OPHQ$ là hình gì? Vì sao?

c) Xác định vị trí của điểm M trên cạnh BC để độ dài PQ nhỏ nhất, tìm độ dài đó theo a.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{APM} = 90^0$; $\widehat{AHM} = 90^0$; $\widehat{AQM} = 90^0$

Suy ra $\widehat{APM} = \widehat{AQM} = \widehat{AHM} = 90^0$

Vậy năm điểm A, H, M, H, Q cùng thuộc một đường tròn tâm O đường kính AM

b) Theo chứng minh ở câu a) $\triangle OPH$ cân tại O

Lại có $\widehat{POH} = 2\widehat{BAH} = \widehat{BAC} = 60^0$ ư

Suy ra $\triangle OPH$ đều nên $OP = PH = OH$

Tương tự $OQ = QH = HO$. Suy ra $OP = OQ = QH = HP$. Vậy tứ giác $OPHQ$ là hình thoi.

c) Theo chứng minh ý b) $\widehat{POH} = 60^\circ$. Gọi I là giao điểm của PQ và OH.

Suy ra $OI \perp PQ$ và $PQ = 2PI$

Trong $\triangle IOP$ ta có $PI = PO \cdot \sin \widehat{IOP} = \frac{1}{2} AM \cdot \sin 60^\circ \Rightarrow PQ = AM \cdot \sin 60^\circ$.

PQ nhỏ nhất khi AM nhỏ nhất, khi đó M trùng H.

Vậy $PQ = AH \cdot \sin 60^\circ = AH \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{4}$.

Bài 49 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Trị năm học 2024 – 2025):

Trên đường tròn đường kính AB, lấy các điểm C và D sao cho $BC = BD < \frac{1}{2}AB$. Gọi E là điểm đối xứng với D qua đường thẳng BC, AE cắt tia CB tại F, cắt đường tròn (B, BC) tạo $H(H \neq E), CH$ cắt AB tại I.

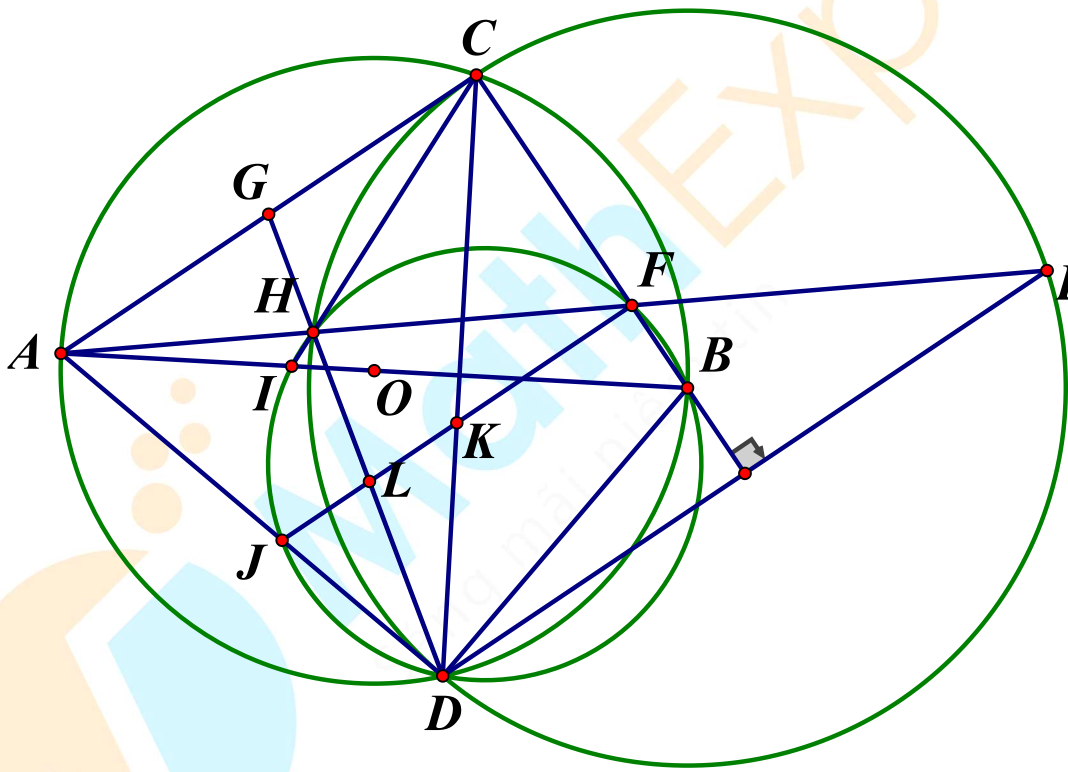
a) Chứng minh DC là tia phân giác của góc $\widehat{ADE}$.

b) Chứng minh năm điểm B, D, F, H và I cùng nằm trên một đường tròn.

c) AD cắt đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFDH$ tại $J(J \neq D), JF$ cắt CD tại K.

Chứng minh DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng JK.

Lời giải : Gọi O là trung điểm AB, nên O là tâm đường tròn đường kính AB.



a) Từ giả thiết $BC = BD$, nên C, D đối xứng nhau qua AB. Mà D, E đối xứng nhau qua BC nên CB vuông góc DE. (1)

Mặt khác C, D thuộc đường tròn đường kính nên $\widehat{ACB} = \widehat{ADB} = 90^\circ$, hay AC vuông góc BC. (2)

Từ (1)(2) suy ra AC song song với DE hay $\widehat{CDE} = \widehat{ACD} = \widehat{ADC}$ do đó DC là tia phân giác $\widehat{ADE}$.

b) Ta có: $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$ (do cùng chắn cung AC của (O)) (3)

Mà do DC là tia phân giác $\widehat{ADE}$ nên $\widehat{ADC}=\widehat{CDE}=\widehat{CHE}$. (4)

Từ (3)(4), ta có tứ giác $IBFH$ nội tiếp (5)

Kéo dài CB cắt DE tại N

Ta có: $\widehat{DBN}=\widehat{DAC}$ (do cùng bù với góc $\widehat{DBC}$).

Mặt khác: $\widehat{DAC}=2\widehat{DAB}=2\widehat{DCB}=2\widehat{DCF}=\widehat{DCE}$ (do D,E đối xứng qua BC).

Và $\widehat{DCE}=\widehat{DHE}$ (do cùng chắn cung DE của đường tròn (B,BC)).

Suy ra $\widehat{DBN}=\widehat{DAC}=\widehat{DHE}$ hay tứ giác $BFHD$ nội tiếp. (6)

Từ (5)(6) suy ra 5 điểm I,B,F,D,H cùng thuộc một đường tròn.

c) Ta có: $\widehat{DJF}=\widehat{DBN}$ (do $BDJF$ nội tiếp). Và $\widehat{DBN}=\widehat{DAC}$ (do cùng bù với góc $\widehat{DBC}$). Suy ra $\widehat{DJF}=\widehat{DAC}$ hay JF song song với AC.

Gọi G,L là giao điểm của HD và AC,JK. Ta thấy GC vuông góc với CB nên GC là tiếp tuyến của đường tròn tâm B, bán kính BC. Hay $GC^2=GH\cdot GD$ (7)

Mặt khác $\widehat{AHG}=\widehat{DHE}=\widehat{DAC}$ (theo 6) với $\widehat{AGH}$ chung nên $\triangle AGH\backsim\triangle DGA(g.g)$

Suy ra: $\dfrac{GA}{DG}=\dfrac{GH}{GA}\Rightarrow GA^2=GH\cdot DG$ (8)

Từ (7)(8) suy ra $GC^2=GA^2\Rightarrow GC=GA$. Như vậy HD đi qua trung điểm AC.

Khi đó: $\dfrac{JL}{AG}=\dfrac{DL}{DG}=\dfrac{LK}{GC}\Rightarrow LJ=LK$ (theo định lý Talet và JF song song với AC).

Vậy HD đi qua trung điểm JK. Ta được điều phải chứng minh.

Bài 50 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – Thừa Thiên Huế năm học 2024 – 2025):

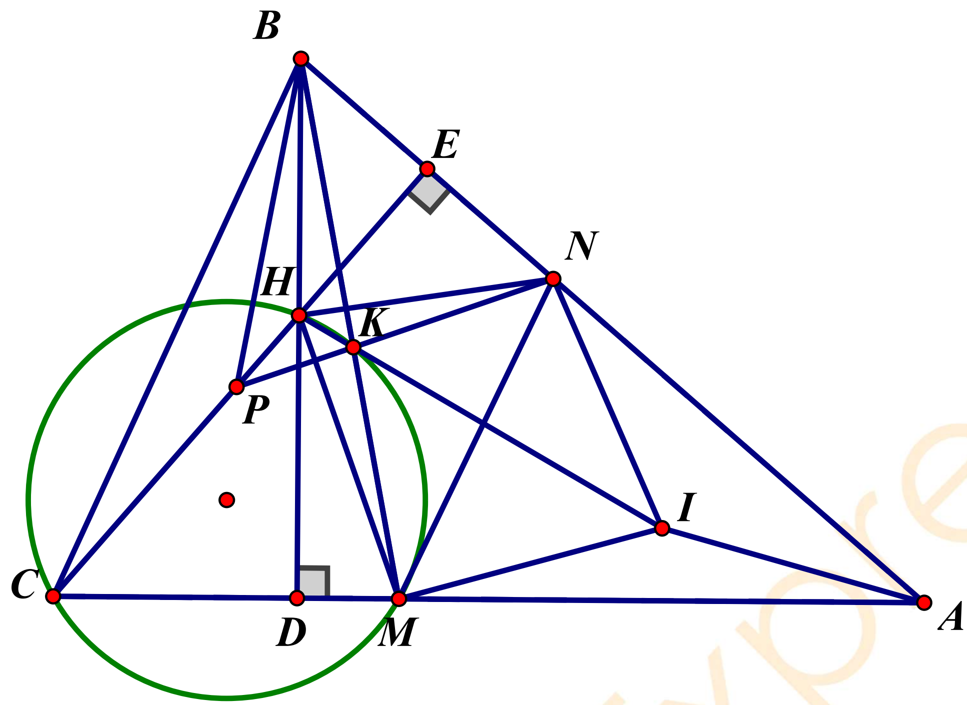
Cho tam giác nhọn ABC có $BC<AB<AC$. Gọi BD, CE là các đường cao, H là trực tâm của tam giác ABC. Trên đoạn thẳng HC lấy điểm P (P khác H và C), M là điểm trên cạnh AC sao cho tia BD là phân giác của góc MBP. Gọi N là điểm đối xứng với B qua E. Đường tròn ngoại tiếp tam giác MHC cắt BM tại K (K khác M).

a) Chứng minh $BHKN$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BKP.

c) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN. Chứng minh I, K, H thẳng hàng.

Lời giải :



a) Ta có: $\widehat{BNH}=\widehat{NBH}=\widehat{ABH}=\widehat{ACH}=\widehat{MCH}=\widehat{BKH}$

Suy ra tứ giác $BHKN$ nội tiếp

b) Ta có: $\widehat{KHP}=\widehat{KHC}=180^\circ-\widehat{KMC}=180^\circ-\widehat{BMD}$

Mặt khác, $\dfrac{\widehat{KBP}}{2}=\widehat{KBH}=\widehat{MBD}$

Suy ra, $\widehat{KHP}-\dfrac{\widehat{KBP}}{2}=180^\circ-\widehat{BMD}-\widehat{MBD}=90^\circ$

Hay $\widehat{KHP}=90^\circ+\dfrac{\widehat{KBP}}{2}$

Kết hợp với BH là phân giác của góc KBP ta thu được H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác KBP.

c) Vì H là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác KBP nên PH là tia phân giác của góc KPB.

Hay nói cách khác, đường thẳng PK và PB đối xứng với nhau qua CH.

Kết hợp với N và B đối xứng nhau qua HC, ta thu được ba điểm P, K, N thẳng hàng.

Ta có: $\widehat{MKN}=\widehat{BKP}=90^\circ+\dfrac{\widehat{BHP}}{2}=90^\circ+\dfrac{180^\circ-\widehat{BAC}}{2}=180^\circ-\dfrac{\widehat{MAN}}{2}=180^\circ-\widehat{MIN}$

Do đó tứ giác $MINK$ nội tiếp

Cuối cùng, $\widehat{IKN} = \widehat{IMN} = 90^\circ - \widehat{MAN} = 90^\circ - \widehat{BAD} = \widehat{ABD} = \widehat{NBH} = 180^\circ - \widehat{NKH}$

Vậy ba điểm I, K, N thẳng hàng

Bài 51 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Sóc Trăng năm học 2024 – 2025):

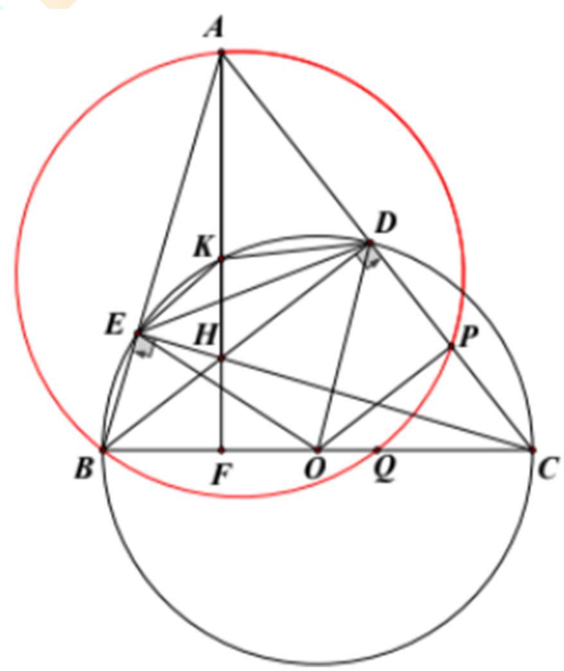
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có $BC = 10cm$. Đường tròn tâm O đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại E và D. Hai đường thẳng BD và CE cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $AEHD$ nội tiếp

b) Đường thẳng AH cắt cung nhỏ ED tại K. Giả sử $\widehat{EKD} = 135^\circ$, tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung nhỏ ED và dây cung ED (cho $\pi = 3{,}14$ và kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

c) Đường thẳng AH cắt đường thẳng BC tại F. Gọi P là trung điểm CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP cắt đường thẳng BC tại điểm thứ hai là Q. Chứng minh rằng AF vuông góc BC và Q là trung điểm CF.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{BDC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{ADH} = 90^\circ$

$\widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AEH} = 90^\circ$

Khi đó: $\widehat{ADH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Vậy tứ giác $AEHD$ nội tiếp

b) Gọi L là một điểm tuỳ ý trên cung lớn BC.

Ta có: $\widehat{ELD} = 180^\circ - \widehat{EKD} = 45^\circ$

Khi đó: $\widehat{EOD} = 2\widehat{ELD} = 90^\circ$

Diện tích tam giác OED là: $S_{EOD} = \dfrac{25}{2}(cm^2)$

Diện tích hình quạt giới hạn bởi OD, OE và cung nhỏ ED là: $S_{quat} = \dfrac{25\pi}{4}(cm^2)$

Diện tích hình viên phân cần tính là $S = S_{EOD} - S_{quat} = \dfrac{25\pi}{4} - \dfrac{25}{2} \approx 7{,}13(cm^2)$

c) Ta có: $BD \perp AC, CE \perp AB$ và H là giao điểm của BD với EC.

Khi đó H là trực tâm của tam giác ABC

Nên $AF \perp BC$

Ta có: OP là đường trung bình của tam giác BCD,

Nên $BD\ //\ OP$. Mà $BD \perp AC \Rightarrow OP \perp AC$

Xét tam giác AFC và tam giác OPC có

$\widehat{C}$ chung

$\widehat{AFC} = \widehat{OPC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \Delta AFC \backsim \Delta OPC\left(g-g\right) \Rightarrow \frac{CA}{CF} = \frac{CO}{CP} \Rightarrow CA.CP = CO.CF \quad (1)$$

Xét tam giác BCP và ACQ có

$\widehat{C}$ chung

$\widehat{CBP} = \widehat{CAQ}$ (cùng chắn cung QP)

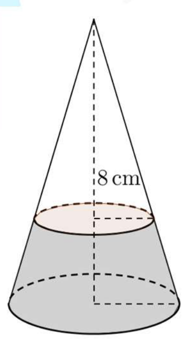
$$\Rightarrow \Delta BCP \backsim \Delta ACQ\ (g-g) \Rightarrow \frac{CB}{CP} = \frac{CA}{CQ} \Rightarrow CA.CP = CQ.CB \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta được $CO.CF = CB.CQ \Rightarrow CO.CF = 2CO.CQ \Rightarrow CF = 2CQ$

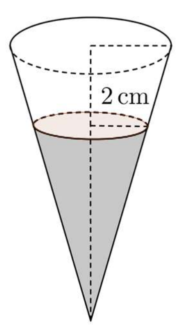
Do đó Q là trung điểm của CF.

Bài 52 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Cần Thơ năm học 2024 – 2025):

Một cái bình hình nón được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang sao cho đỉnh của nó hướng lên trên. Người ta rót nước vào bình cho đến khi mực nước dâng cao cách đỉnh $8cm$ (như hình 1). Sau đó, người ta đảo ngược cái bình lại sao cho đỉnh bình hướng xuống (như hình 2). Khi đó, người ta đo được phần không gian trống của bình có chiều cao $2cm$. Biết rằng lượng nước bên trong bình không thay đổi. Tính chiều cao của cái bình đã cho.



Hình 1



Hình 2

Lời giải:

Gọi $h\,(\text{cm})$ là chiều cao của bình nước, $r\,(\text{cm})$ là bán kính đáy của hình nón.

Thể tích của bình nước là $\frac{1}{3}\pi r^2 h.$

Khi đặt bình nước có đỉnh hướng lên, thể tích của lượng nước là $\frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8r}{h}\right)^2.8$ (1)

Khi úp bình xuống, lượng nước trên chiếm một thể tích bằng với thể tích hình nón có chiều cao là $h-2$ và bằng $\frac{1}{3}\pi\left(\frac{(h-2)r}{h}\right)^2(h-2)$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $h^3-8^3=(h-2)^3 \Leftrightarrow h^2-2h-84=0 \Rightarrow h=1+\sqrt{85}$

Vậy chiều cao của bình là $1+\sqrt{85}$ cm.

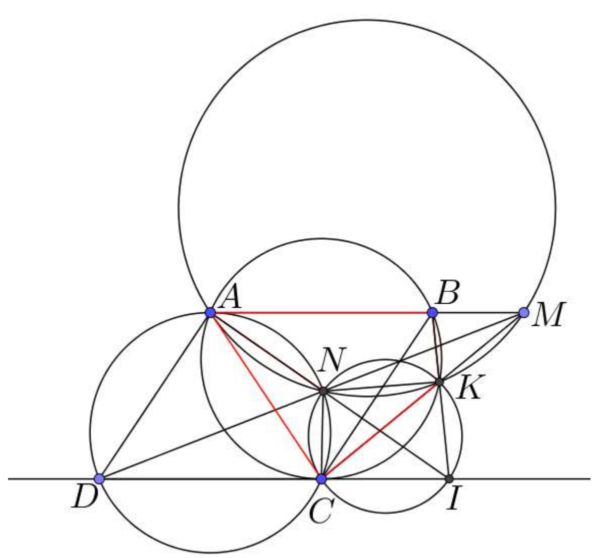
Bài 53 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Cần Thơ năm học 2024 – 2025):

Cho hình bình hành $ABCD$ có $CB=CA$. Gọi M là điểm bất kỳ trên tia đối của tia BA. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD cắt MD tại N (N khác D), đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt MC tại K (K khác M).

a) Chứng minh tứ giác $ABKC$ nội tiếp.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AN và đường thẳng BK. Chứng minh I luôn thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi.

Lời giải:



a) $\widehat{ABC}=\widehat{BAC}$ (tam giác CAB cân, do $CA=CB$)

$\widehat{BAC}=\widehat{ACD}$ (so le trong) $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{ACD}$

$ANCD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{ACD}=\widehat{AND}$ (cùng chắn $\overset{\frown}{AD}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{AND}$

Mà $\widehat{AND}=\widehat{MNI}$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{MNI}$ (1)

Mặt khác $\widehat{AKC}+\widehat{AKM}=180^\circ$ (kề bù) và $\widehat{MNI}+\widehat{ANM}=180^\circ$ (kề bù)

Mà $\widehat{AKM}=\widehat{ANM}$ ($AMKN$ nội tiếp, cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

Nên $\widehat{AKC}=\widehat{MNI}$ (2)

Từ (1), (2), suy ra $\widehat{AKC}=\widehat{ABC}$ (cùng nhìn $\overset{\frown}{AC}$)

Vậy $ABKC$ nội tiếp.

b) Do I là giao điểm của AN và BK. Ta sẽ chứng minh C,D,I thẳng hàng.

$ABKC$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{IKC}$ (cùng bù với $\widehat{BKC}$)

$ADCN$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{INC}=\widehat{ADC}$ (cùng bù với $\widehat{ANC}$)

Mà $\widehat{BAC}=\widehat{ADC}$ ($ABCD$ là hình bình hành có $CA=CB$)

Nên $\widehat{IKC}=\widehat{INC}$ (cùng nhìn $\overset{\frown}{IC}$)

$\Rightarrow$ Tứ giác $CIKN$ nội tiếp.

Ta có $\widehat{CIA}=\widehat{CIN}=\widehat{CKN}=180^\circ-\widehat{MKN}=\widehat{MAN}=\widehat{MAI}$

Suy ra $AM//CI$. Mà $AM//CD$ nên C,D,I thẳng hàng

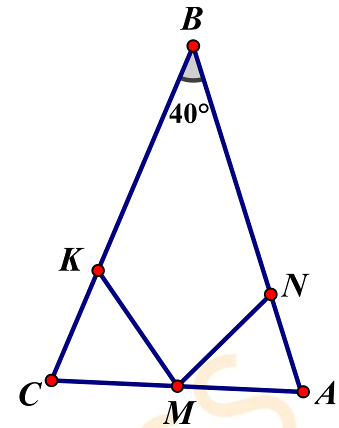
Vậy I thuộc đường thẳng CD cố định khi M thay đổi.

Bài 54 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác ABC cân tại B, có $\widehat{ABC}=40^\circ$ và $AC=1$. Trên các cạnh BA,BC, lấy các điểm tương ứng N,K sao cho $AN\cdot CK=\frac{1}{4}$. Gọi M là trung điểm của AC.

Tính số đo của $\widehat{NMR}$.

Lời giải : Phân tích.



Nhận thấy $\widehat{NMK} = 180^\circ - \left(\widehat{NMA} + \widehat{KMC}\right)$ và $\widehat{NMA}, \widehat{KMC}$, tương ứng là góc của các tam giác AMN, CKM.

Cùng với đó, các giả thiết của bài toán cũng "đổ dồn" về các yếu tố cạnh, góc của hai tam giác vừa nêu trên (AN và CK, tương ứng, là cạnh của các tam giác AMN và CKM, cho số đo góc ở đỉnh của tam giác cân ABC cùng tức là cho số đo hai góc đáy NAM, KCM của tam giác đó)

Từ những điều dễ dàng nhận thấy nêu trên, việc tìm hiểu hai tam giác NAM và KCM, từ đó tìm ra cách tính số đo của $\widehat{NMK}$, là một lẽ tự nhiên.

Lời giải. (Xem hình vẽ ở phần Phân tích.)

Vì tam giác ABC cân tại B và $\widehat{ABC} = 40^\circ$, nên $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - 40^\circ\right) = 70^\circ$ $\quad (1)$

Vì $AC = 1$ và M là trung điểm AC, nên $AM = CM = \frac{1}{2}$ $\quad (2)$

Do đó, $AN \cdot CK = \frac{1}{4} = AM \cdot CM$. Suy ra, $\frac{AN}{AM} = \frac{CM}{CK}$.

Từ (1) và (2) suy ra, $\widehat{NMA} = \widehat{MKC}$.

Vì vậy $\widehat{NMK} = 180^\circ - \left(\widehat{NMA} + \widehat{KMC}\right) = 180 - \left(\widehat{MKC} + \widehat{KMC}\right) = \widehat{KCM} = \widehat{BCA} = 70^0$

Ta có điều cần tính theo yêu cầu đề bài.

Bài 55 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Kiên Giang năm học 2024 – 2025):

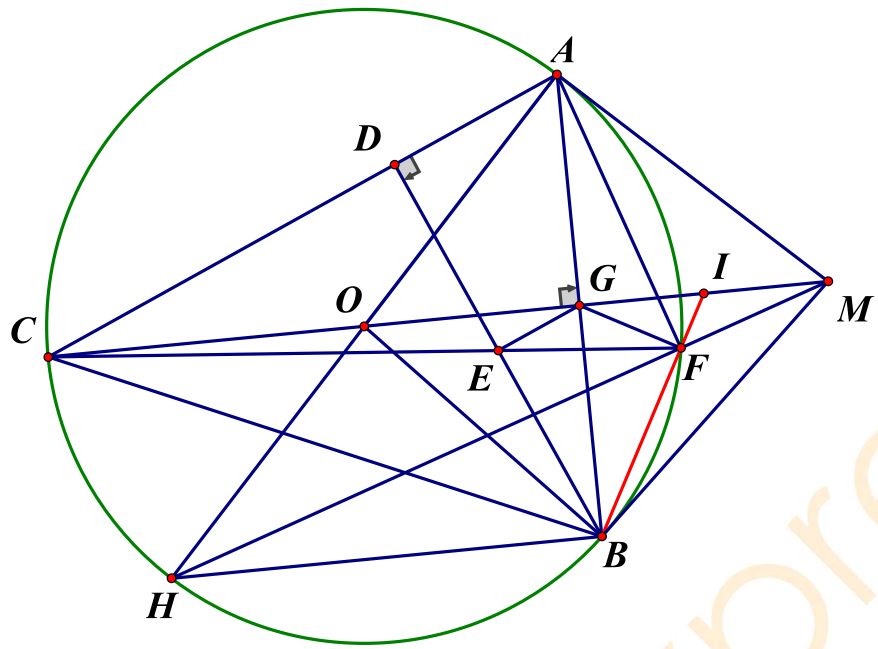
Cho đường tròn (O) và dây cung AB không là đường kính. Gọi C là điểm chính giữa của cung lớn AB. Các tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại M. Gọi D là hình chiếu vuông góc của B trên AC và E là trung điểm của BD. Tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F. Gọi G là giao điểm của MC với AB.

a) Chứng minh rằng, bốn điểm B, E, F, G cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tia MF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M. Chứng minh rằng: AH là đường kính của đường tròn (O)

c) Gọi T là trung điểm của đoạn thẳng MG. Chứng minh rằng, ba điểm B, F, I thẳng hàng.

Lời giải:



a) Vì C là điểm chính giữa của cung AB, nên $CA = CB$. (1)

Vì M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến tại B, của (O), nên $MA = MB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra, MC là đường trung trực của AB. (3)

Do đó, G là trung điểm của AB. Mà E là trung điểm của BD, nên EG là đường trung bình của tam giác DBA. Vì thế, $EG // DA$. (4)

Suy ra, $\widehat{CAB} = \widehat{EGB}$ (hai góc ở vị trí đồng vị). (5)

Vì cùng chắn cung BC của (O), nên $\widehat{CAB} = \widehat{CFB} = \widehat{EFB}$. (6)

Từ (5) vì (6), suy ra $\widehat{EGB} = \widehat{EFB}$. (7)

Do C thuộc cung lớn AB, và D nằm trong đoạn AC (vì $BD \perp AC$ và góc ABC là góc nhọn), nên G và F nằm cùng phía đối với DB. Vì thế, từ (7) suy ra, $EGFB$ là tứ giác nội tiếp; hay, bốn điểm E, G, F, B cùng nằm trên một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

b) Từ (4), do $BD \perp DA$ (giả thiết), suy ra $BD \perp EG$ nên $\widehat{BEG} = 90^\circ$; suy ra BG là đường kính của đường tròn $(EGFB)$. $MG \perp GB$ (do (3)), nên MG là tiếp tuyến tại G của đường tròn $(EGFB)$.

Suy ra, $\widehat{MGF} = \widehat{GBF}$ (tính chất) (8)

Vì cùng chắn cung AF của (O), nên $\widehat{GBF} = \widehat{ABF} = \widehat{MAF}$. (9)

Từ (8) và (9), suy ra $\widehat{MGF}=\widehat{ABF}=\widehat{MAF}$. (10)

Do đó, $AGFM$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra $\widehat{BAF}=\widehat{GAF}=\widehat{GMF}=\widehat{CMH}$ (11)

Vì cùng chắn cung BF của (O), nên $\widehat{BAF}=\widehat{BHF}=\widehat{BHM}$. (12)

Từ (11) và (12), suy ra $\widehat{CMH}=\widehat{BHM}$. Do đó, $HB//CM$. Mà $CM\perp AB$, nên $HB\perp AB$, hay $\widehat{ABH}=90^\circ$. Vì vậy, AH là đường kính của đường tròn (O).

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

c) Từ (10) và (11), suy ra $\triangle AFB\backsim\triangle MFG(g-g)$. Mà G là trung điểm của AB và I là trung điểm của MG, nên $\triangle GFB\backsim\triangle IFG$. Suy ra, $\widehat{BFG}=\widehat{GFI}$.

Vì BG là đường kính của đường tròn ($EGFB$) (chứng minh trên), nên $\widehat{BFG}=90^\circ$.

Từ (13) và (14), suy ra $\widehat{BFG}+\widehat{GFI}=180^\circ$.

Do đó, ba điểm B,F,I thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Lưu ý: Trong lời giải của ý c) trên đây, chúng tôi đã sử dụng một kết quả rất cơ bản, liên quan đến sự đồng dạng của các tam giác. Kết quả này không được trình bày trong các sách giáo khoa phổ thông hiện hành, nhưng nằm trong nội dung bồi dưỡng, giảng dạy học sinh khá, giỏi toán của nhiều địa phương trên toàn quốc. Kết quả đó như sau:

Một tính chất cơ bản của các tam giác đồng dạng. Cho hai tam giác, ABC và $A'B'C'$, đồng dạng với nhau. Trên các cạnh $BC,B'C'$ tương ứng, lấy các điểm M,M' (M không trùng B,C, và M' không trùng B',C') sao cho $\frac{MB}{MC}=\frac{M'B'}{M'C'}$

Khi đó, $\triangle ABM\backsim\triangle A'B'M'$ và $\triangle BMC\backsim\triangle B'M'C'$.

Chứng minh: Do $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$, nên với lưu ý $M\in BC$ và $M'\in B'C'$, ta có:

$$\widehat{ABM}=\widehat{A'B'M'},\widehat{ACM}=\widehat{A'C'M'}(1)$$

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}\quad(2)$$

Từ giả thiết $\frac{MB}{MC}=\frac{M'B'}{M'C'}$. Ta có: $\frac{BM}{B'M'}=\frac{MC}{M'C'}=\frac{BM+MC}{B'M'+M'C'}=\frac{BC}{B'C'}\quad(3)$

Từ (2) và (3), ta được: $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BM}{B'M'},\frac{CA}{C'A'}=\frac{MC}{MC'}\quad(4)$

Từ (1) và (4), hiển nhiên suy ra, $\triangle ABM=\triangle A'B'M'(c-g-c)$ và $\triangle BMC\backsim\triangle B'M'C'(c-g-c)$.

Bài 56 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Tiền Giang năm học 2024 – 2025):

Cho đường tròn tâm O và một điểm A ở ngoài đường tròn đó. Qua điểm A vẽ hai tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (O) (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AO và BC, D là trung điểm của AC, tia BD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là E.

a) Chứng minh $CDEH$ là một tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng $DA^2 = DE.DB$.

c) Gọi F là giao điểm thứ hai của AE với đường tròn (O). Chứng minh OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

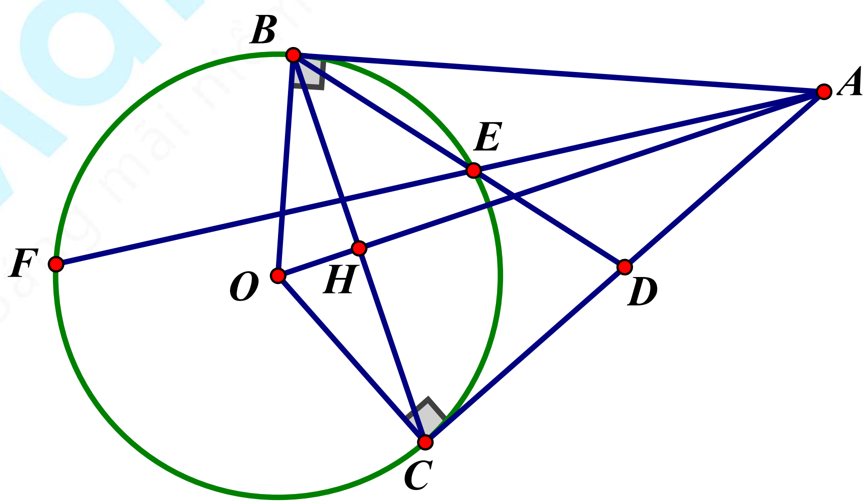
Lời giải:

a) Ta có $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$OB = OC$ (bán kính (O)) nên AO là đường trung trực của đoạn thẳng BC.

ΔABC có D là trung điểm AC, H là trung điểm BC nên HD là đường trung bình của tam giác ABC, suy ra $HD // AB$. Khi đó $\widehat{HDE} = \widehat{ABE} = \widehat{BCE} = \widehat{HCE} = \frac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{BE}$

Do đó, tứ giác $CDEH$ nội tiếp.



b) Xét ΔDCE và ΔDBC ta có

$\widehat{EDC}$ chung

$\widehat{DCE} = \widehat{DBC} = \frac{1}{2} sd\, \overset{\frown}{BE}$

Suy ra $\Delta DCE \backsim \Delta DBC (g-g)$

Do đó $\frac{DC}{DB} = \frac{DE}{DC}$.

Suy ra $DC^2 = DE.DB$. Mặt khác, do $DA = DC$ nên $DA^2 = DE.DB$

c) Từ $DA^2 = DE.DB$ nên ta có $\frac{DA}{DE} = \frac{DB}{DA}$.

Xét hai tam giác DAE và tam giác DBA có: $\widehat{EDA}$ chung và $\dfrac{DA}{DE}=\dfrac{DB}{DA}$

Do đó $\triangle DAE \backsim \triangle DBA\,(c-g-c)$

Suy ra $\widehat{EAD}=\widehat{DBA}=\widehat{BFE}=\dfrac{1}{2}sd\,\overset{\frown}{BE}$, do đó $BF\,//\,AC$. Mà $OC\perp AC$ nên $OC\perp BF$.

Mặt khác, $OF=OB$ (bán kính của (O)) nên OC là đường trung trực của đoạn thẳng BF.

Bài 57 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Long An năm học 2024 – 2025):

Cho ΔABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF của ΔABC cắt nhau tại H.

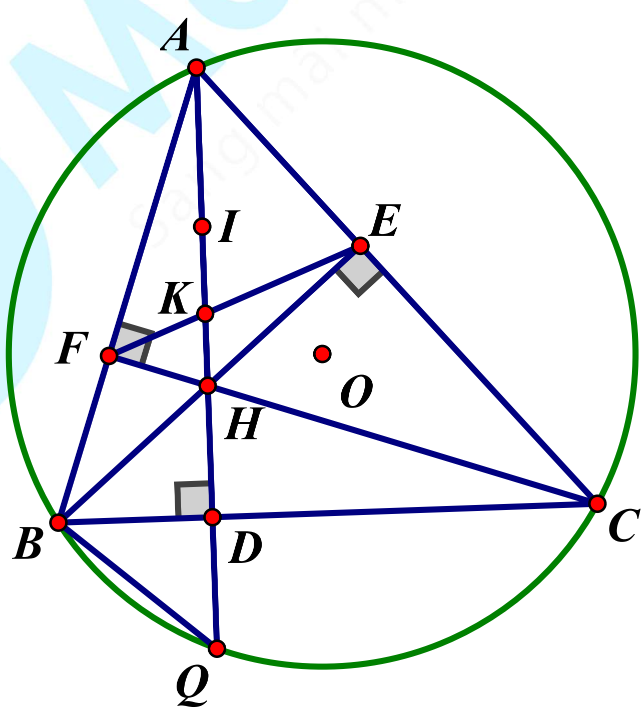
a) Chứng minh rằng tứ giác $BFEC$ là một tứ giác nội tiếp, xác định tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

b) Gọi Q là giao điểm của đường cao AD với (O) (Q khác A). Chứng minh rằng ΔBHQ là tam giác cân.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AH; K là giao điểm của AH và EF.

Chứng minh rằng $IE^2=IK\,ID$.

Lời giải:



a) Xét tứ giác $BFEC$ có

$\widehat{BFC}=90^\circ$ (CF là đường cao của $\triangle ABC$);

$\widehat{BEC}=90^\circ$ (BE là đường cao của $\triangle ABC$)

$\Rightarrow \widehat{BFC}+\widehat{BEC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$.

Suy ra tứ giác $BFEC$ nội tiếp được đường tròn. Lại có $\widehat{BFC}=90^\circ$ và $\widehat{BFC}$ là góc nội tiếp nên BC là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$.

Vậy tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BFEC$ là trung điểm của BC.

b) Ta có $\widehat{CBE}=\widehat{CAD}$ (cùng phụ với $\widehat{BCA}$) hay $\widehat{DBH}=\widehat{CAQ}$.

Mà $\widehat{CAQ}=\widehat{CBQ}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung CQ) nên

$\widehat{CBE}=\widehat{CBQ}\left(=\widehat{CAQ}\right)$ hay $\widehat{DBQ}=\widehat{DBH}$.

Xét $\triangle BHQ$ có $BD\perp HQ \Rightarrow BD$ là đường cao.

$\widehat{DBQ}=\widehat{DBH}$ (chứng minh trên) nên BD là đường phân giác.

Vậy tam giác BHQ cân tại B.

c) Tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH}+\widehat{AFH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH (do $\widehat{AEH}=90^\circ$) hay $AEHF$ nội tiếp đường tròn .

Suy ra $\widehat{FEH}=\widehat{FAH}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung FH) hay $\widehat{FEB}=\widehat{BAD}$.

Và $IA=IE$ nên tam giác IAE cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEA}=\widehat{IAE}$.

Lại có $\widehat{IEK}=\widehat{AEB}-\left(\widehat{IEA}+\widehat{FEB}\right)=90^\circ-\left(\widehat{IAE}+\widehat{BAD}\right)=90^\circ-\widehat{BAC}=\widehat{ABE}$ (1)

Tứ giác $ABDE$ có $\widehat{ADB}=\widehat{AEB}=90^\circ$ (giả thiết) nên tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn.

Suy ra $\widehat{ABE}=\widehat{ADE}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AE) hay $\widehat{ABE}=\widehat{IDE}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{IEK}=\widehat{IDE}\left(=\widehat{ABE}\right)$.

Xét $\triangle IEK$ và $\triangle IDE$ có

$\widehat{EID}$: góc chung.

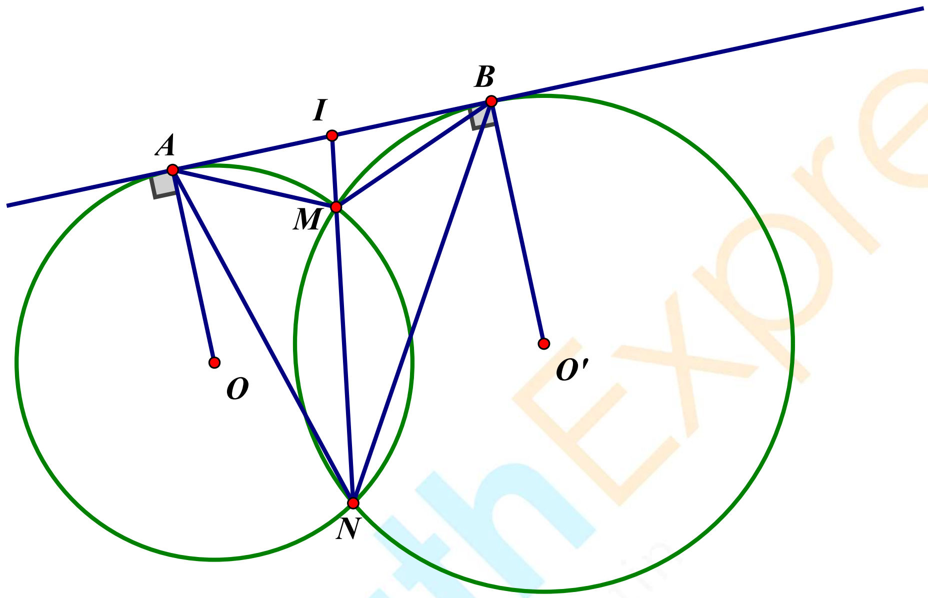
$\widehat{IEK}=\widehat{IDE}$ (chứng minh trên) $\Rightarrow \triangle IEK \backsim \triangle IDE\,(g-g) \Rightarrow \dfrac{IK}{IE}=\dfrac{IE}{ID}$ hay $IE^2=IK\cdot ID$.

Bài 58 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Long An năm học 2024 – 2025):

Cho đường tròn (O) và đường tròn (O') cắt nhau tại M và N. Kẻ một tiếp tuyến chung ngoài lần lượt tiếp xúc với đường tròn (O) và đường tròn (O') tại A và B.

Chứng minh rằng $\dfrac{MA}{MB}+\dfrac{NB}{NA}-2\geq 0$.

Lời giải:



Gọi I là giao điểm của MN và AB.

Xét $\triangle IAM$ và $\triangle INA$ có

$\widehat{NIA}$ góc chung.

$\widehat{IAM}=\widehat{INA}$ (tính chất).

$\Rightarrow \triangle IAM \backsim \triangle INA(g-g) \Rightarrow \dfrac{IA}{IM}=\dfrac{IN}{IA}$ hay $IA^2=IM\cdot IN$.

Tương tự xét $\triangle IBM$ và $\triangle INB$ có

$\widehat{NIB}$: góc chung.

$\widehat{IBM}=\widehat{INB}$ (tính chất).

$\Rightarrow \triangle IBM \backsim \triangle INB(g-g) \Rightarrow \dfrac{IB}{IM}=\dfrac{IN}{IB}$ hay $IB^2=IM\cdot IN$.

Từ (1) và (2) suy ra $IA^2=IB^2(IM\cdot IN)$, suy ra $IA=IB$. Vì $\triangle IAM \backsim \triangle INA$ nên $\dfrac{IA}{IN}=\dfrac{MA}{NA}$.

Lại vì $\triangle IBM \backsim \triangle INB$ nên $\frac{IB}{IN}=\frac{MB}{NB}$ hay $\frac{IA}{IN}=\frac{MB}{NB}$ (do $IA=IB$).

Suy ra $\frac{MA}{NA}=\frac{MB}{NB}\left(\frac{IA}{IN}\right)$ hay $\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương, ta có

$$\frac{MA}{MB}+\frac{NB}{NA}=\frac{NA}{NB}+\frac{NB}{NA}\ge 2\sqrt{\frac{NA}{NB}\cdot\frac{NB}{NA}}=2.$$

Suy ra $\frac{MA}{MB}+\frac{NB}{NA}\ge 2$ hay $\frac{MA}{MB}+\frac{NB}{NA}-2\ge 0$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\frac{MA}{MB}=\frac{MB}{MA}\\ \frac{NA}{NB}=\frac{NB}{NA}\end{cases}$ hay MN là đường trung trực của AB.

Bài 59 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Năng Khiếu TP Hồ Chí Minh năm học 2024 – 2025):

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) có tam giác ABD nhọn, AC đi qua $(O), I$ là trung điểm BD, H là trực tâm của tam giác ABD. Gọi E là giao điểm của AI và đường tròn (O) (E khác A), kẻ HK vuông góc với AI (K nằm trên AI).

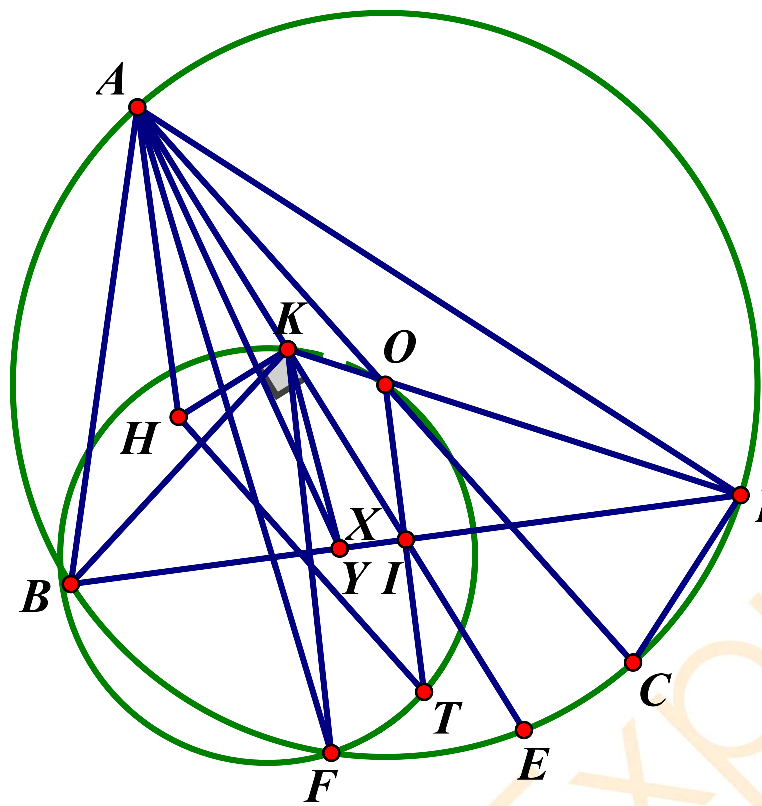
a) Chứng minh rằng tứ giác $CEHK$ là hình bình hành và $IB^2=ID^2=IA\cdot IK$.

b) Lấy điểm F thuộc cung nhỏ BD sao cho $\widehat{BAF}=\widehat{DAI}$. Chứng minh rằng K đối xứng với F qua BD

c) Chứng minh rằng các đường phân giác trong của các góc $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ đồng quy trên BD.

d) Qua H kẻ đường thẳng song song với AC, lấy T sao cho $TH=TK$. Chứng minh bốn điểm O,K,T,F cùng nằm trên một đường tròn.

Lời giải:



a) Ta có $BH//CD$ và $DH//CB$ nên tứ giác $BHDC$ là hình bình hành.

Suy ra I là trung điểm của CH

Hai tam giác vuông HKI và CEI có $IH = IC$ và $\widehat{HIK} = \widehat{CIE}$ nên chúng bằng nhau, suy ra $HK = CE$ Tứ giác $HKCE$ có $HK = CE$ và $HK//CE$ nên tứ giác $HKCE$ là hình bình hành.

Tứ giác $HKCE$ là hình bình hành nên I là trung điểm của KE.

Tứ giác $ABED$ nội tiếp nên suy ra $IA \cdot IE = IB \cdot ID$. Do đó $IK \cdot IA = IE \cdot IA = IB \cdot ID = IB^2 = ID^2$.

b) Từ $\widehat{BAF} = \widehat{DAI}$ suy ra $BF = DE$ và $BE = DF$. Lại có tứ giác $BKDE$ là hình bình hành (do I là trung điểm chung của KE và BD) nên $BK = DE$ và $BE = DK$. Ta thu được $BK = DE = BF$ và $DK = BE = DF$, do đó BD là đường trung trực của KF nên K đối xứng với F qua BD.

c) Kẻ AX, AY lần lượt là phân giác $\widehat{BAD}$ và $\widehat{BKD}$ (X, Y thuộc cạnh BD).

Khi đó ta được: $\dfrac{BX}{DX} = \dfrac{BA}{DA}, \dfrac{BY}{DY} = \dfrac{BK}{DK}$

Từ câu a, $IK \cdot IA = IB \cdot ID = IB^2 = ID^2$ suy ra các cặp tam giác IKB và IBA, IKD và IDA đồng dạng, vì vậy ta có: $\dfrac{BA}{BK} = \dfrac{BI}{KI}, \dfrac{DA}{KD} = \dfrac{DI}{KI}$. Suy ra $\dfrac{BA}{BK} = \dfrac{DA}{KD} \Rightarrow \dfrac{BA}{DA} = \dfrac{BK}{KD}$. Do đó $\dfrac{BX}{DX} = \dfrac{BY}{DY}$.

Hơn nữa X, Y cùng nằm trên đoạn BC nên ta suy ra X trùng Y.

d) Dựng hình bình hành $AHT'O$ khi đó ta có $T'H = OA$ và $OT' = AH$ (1)

Xét tam giác AHC có I là trung điểm HC và $OI // AH$.

Suy ra OI là đường trung bình của $\triangle AHC \Rightarrow AH = 2OI$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $OT' = AH = 2OI$ nên T' đối xứng với O qua BD.

Suy ra $T'B = T'D = OB = OA = T'H$. Do đó T' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBD.

Hơn nữa, ta lại có I là trung điểm KE (chứng minh câu a) nên $OKT'E$ là hình bình hành, suy ra $T'K = OE = OA = T'H$. Khi đó T' nằm trên đường thẳng qua H song song với AC và $T'K = T'H$ nên T' trùng T.

Ta có K đối xứng với F qua BD và O đối xứng với T qua BD, từ đó ta suy ra $OKFT$ là hình thang cân nên tứ giác $OKFT$ nội tiếp.

Bài 60 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Đồng Nai năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O), có đường cao AD. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại B cắt đường trung trực đoạn thẳng BD tại điểm P. Hai đường thẳng DP và AC cắt nhau tại điểm E.

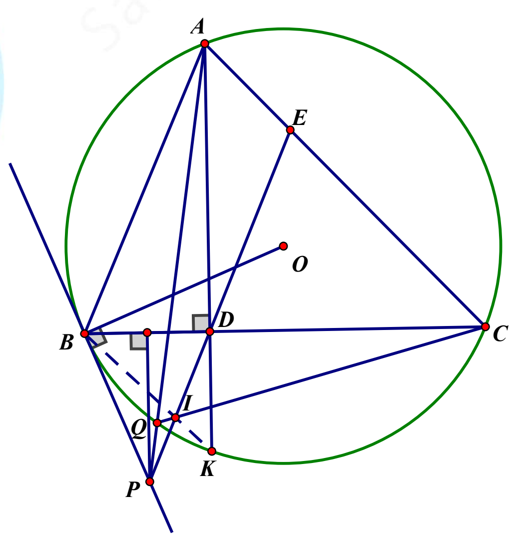
a) Chứng minh rằng tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn

b) Gọi Q là giao điểm của đường thẳng AP và đường tròn (O), với Q khác A.

Chứng minh $\widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$

c) Gọi K là giao điểm của đường thẳng AD và đường tròn (O), với K khác A. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng CQ và DP. Chứng minh rằng ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Lời giải:



a) Ta có: $PB = PD$ (vì P thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BD)

$\Rightarrow$ tam giác PBD cân tại P $\Rightarrow$ $\widehat{PDB} = \widehat{PBD}$ hay $\widehat{PDB} = \widehat{PBC}$

Mà $\widehat{PBC} = \widehat{BAC}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O))

Nên $\widehat{PDB} = \widehat{BAC}$ hay $\widehat{PDB} = \widehat{BAE}$

Vậy tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn (vì có góc ngoài bằng góc trong đỉnh đối nên hai góc đối bù nhau)

Cách 2: Ba bước đầu như cách 1

Mà $\widehat{PDB} + \widehat{BDE} = 180^\circ$ (Hai góc kề bù)

Vậy $\widehat{BAE} + \widehat{BDE} = 180^\circ$

Do đó tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn.

b)

Ta có: $\widehat{PBQ} = \widehat{BAQ}$ (góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây và góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O))

Hay $\widehat{PBQ} = \widehat{BAP}$ mà $\widehat{BPQ} = \widehat{BPA}$ (góc chung)

Vậy $\Delta BPQ \backsim \Delta APB (g-g) \Rightarrow \dfrac{PB}{AP} = \dfrac{PQ}{PB} \Rightarrow \dfrac{PD}{AP} = \dfrac{PQ}{PD}$ (do $PB = PD$, chứng minh trên) mà

$\widehat{DPQ} = \widehat{APD}$ (góc chung). Vậy $\Delta DPQ \backsim \Delta APD (c-g-c) \Rightarrow \widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$ (điều phải chứng minh)

c) Tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BDI}$ (vì cùng bù với $\widehat{BDE}$)

Hay $\widehat{BAC} = \widehat{BDI}$

Tứ giác $ABQC$ nội tiếp $(O) \Rightarrow \widehat{BQC} + \widehat{BAC} = 180^\circ$

Hay $\widehat{BQI} + \widehat{BAC} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{BQI} + \widehat{BDI} = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác $BDIQ$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow$ $\widehat{QBI} = \widehat{QDI}$ (Hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDIQ$)

Mà $\widehat{QDI} = \widehat{PDQ} = \widehat{PAD}$ (chứng minh trên)

Mặt khác $\widehat{PAD} = \widehat{QAK} = \widehat{QBK}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O))

Vậy $\widehat{QBI} = \widehat{QBK}$

Do đó ba điểm B, I, K thẳng hàng

Cách 2: Ta có: $\widehat{AQC}=\widehat{ABC}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O))

Hay $\widehat{AQI}=\widehat{ABD}$

Mà $\widehat{ABD}+\widehat{AED}=180^\circ$ (Do tứ giác $ABDE$ nội tiếp đường tròn)

Hay $\widehat{ABD}+\widehat{AEI}=180^\circ \Rightarrow \widehat{AQI}+\widehat{AEI}=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEIQ$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{EIQ}+\widehat{EAQ}=180^\circ \Rightarrow \widehat{DIQ}+\widehat{CAQ}=180^\circ$

Lại có: $\widehat{CAQ}=\widehat{CBQ}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của (O))

Hay $\widehat{CAQ}=\widehat{DBQ}$

Nên $\widehat{DIQ}+\widehat{DBQ}=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDIQ$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{QBI}=\widehat{QDI}$ (hai góc nội tiếp có cùng cung bị chắn của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BDIQ$)

Mà $\widehat{QDI}=\widehat{PDQ}=\widehat{PAD}$ (chứng minh trên)

Mặt khác $\widehat{PAD}=\widehat{QAK}=\widehat{QBK}$ (hai góc nội tiếp có cung cùng bị chắn của (O))

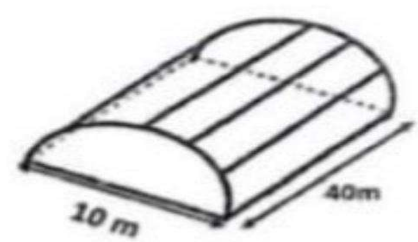
Vậy $\widehat{QBI}=\widehat{QBK}$

Do đó ba điểm B, I, K thẳng hàng.

Bài 61 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025):

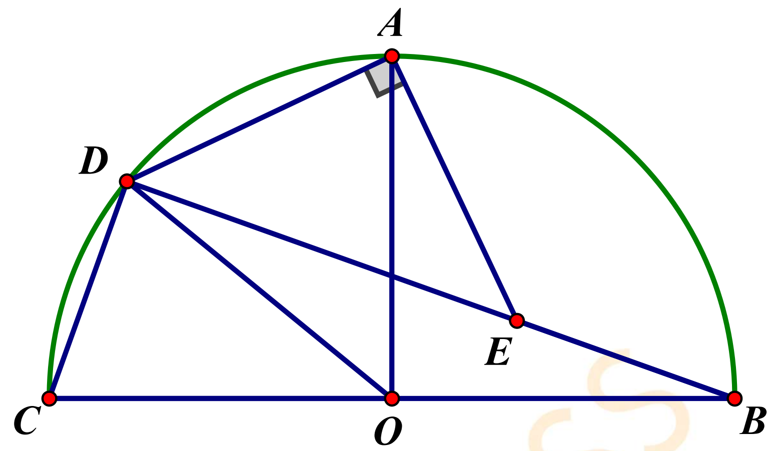
1) Cho nửa hình tròn tâm O đường kính BC. Gọi A là điểm chính giữa cung BC, D là điểm thuộc cung AC (điểm D không trùng điểm A và C). Trên dây BD lấy điểm E sao cho $BE=CD$ Chứng minh rằng tam giác ADE vuông cân.

2) Bác An dự định làm một nhà kính trồng rau sạch, phần mái vòm có dạng nửa hình trụ đường kính đáy là 10 m, chiều dài là 40 m (minh họa bởi hình bên). Để phủ kín mái vòm (gồm diện tích xung quanh nửa hình trụ và kế cả hai nửa đáy) bác An ra cửa hàng mua một tấm nhựa Politiv, mỗi tấm có chiều rộng $2,2m$ và chiều dài



50 m với giá 15000 đồng $/\text{m}^2$.Tính số tiền bác An mua các tấm nhựa Politiv để phủ kín mái vòm ở trên, biết rằng cửa hàng chỉ bán nguyên tấm (lấy $\pi\approx 3,14$)

Lời giải:



1) Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ACD$ có:

$AB = AC$
$BE = CD$
$\widehat{ABE} = \widehat{ACD}$
$\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACD\ (c-g-c)$

Suy ra $AE = AD$ và $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$

Ta có $\widehat{BAE} + \widehat{EAC} = \widehat{BAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{CAD} + \widehat{EAC} = 90^0 \Rightarrow \widehat{EAD} = \widehat{BAC} = 90^\circ$

Do đó, ta thu được $\triangle EAD$ vuông cân tại A.

2) Diện tích xung quanh nửa hình trụ là $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{10}{2} \cdot 40 \approx 628\left(\text{ m}^2\right)$

Diện tích hai nửa đáy là $\pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 \approx 78,5\left(m^2\right)$

Diện tích của mỗi tấm Politiv là $2,2.50 = 110\left(\text{ m}^2\right)$

Ta có $(628 + 78,5) : 110 \approx 6,42$

Suy ra Bác An cần mua 7 tấm nhựa Politiv.

Số tiền bác An mua các tấm nhựa là $7.110.15000 = 11550000$ đồng.

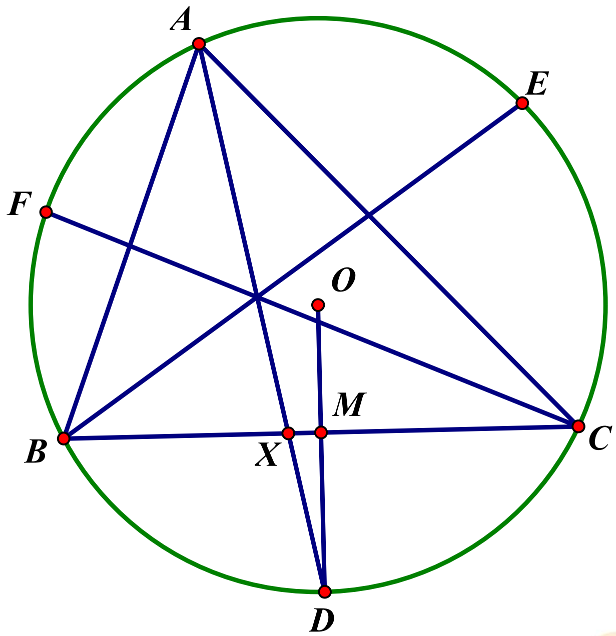
Bài 62 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Lâm Đồng năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm (O). Tia phân giác của các góc $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ cắt đường tròn (O) lần lượt tại D, E, F. Chứng minh:

a) $AD \cdot BC = AC \cdot BD + AB \cdot CD$

b) $AD + BE + CF > AB + AC + BC$

Lời giải:



1. a) Gọi X là giao điểm của AD và BC.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AXC$ có: $\widehat{BAD} = \widehat{XAC}$ và $\widehat{ADB} = \widehat{ACX} \Rightarrow \triangle ABD \backsim \triangle AXC\ (g-g)$

Suy ra $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{CX}{AC} \Rightarrow DB \cdot AC = CX.AD$. (1)

Tương tự, ta thu được $DC.AB = BX.AD$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta thu được: $DB \cdot AC + DC \cdot AB = AD\left(CX + BX\right) = AD \cdot BC$.

b) Gọi M là trung điểm BC, do đó O, M, D thẳng hàng

Từ kết quả ý a), ta có $AD = \dfrac{AC \cdot BD + AB \cdot CD}{BC} = \left(AB + AC\right)\dfrac{BD}{2BM}$

(Do $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DC} \Rightarrow BD = CD$)

$\Rightarrow AD = \dfrac{AB + AC}{2} \dfrac{1}{\sin \widehat{BDM}} > \dfrac{AB + AC}{2}$.

Tương tự, ta thu được $BE > \dfrac{BC + BA}{2}$ và $CF > \dfrac{CA + CB}{2}$

Cộng vế theo vế 3 đẳng thức trên, ta suy ra $AD + BE + CF > AB + BC + AC$. Ta thu được điều phải chứng minh.

Bài 63 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Đắk Nông năm học 2024 – 2025):

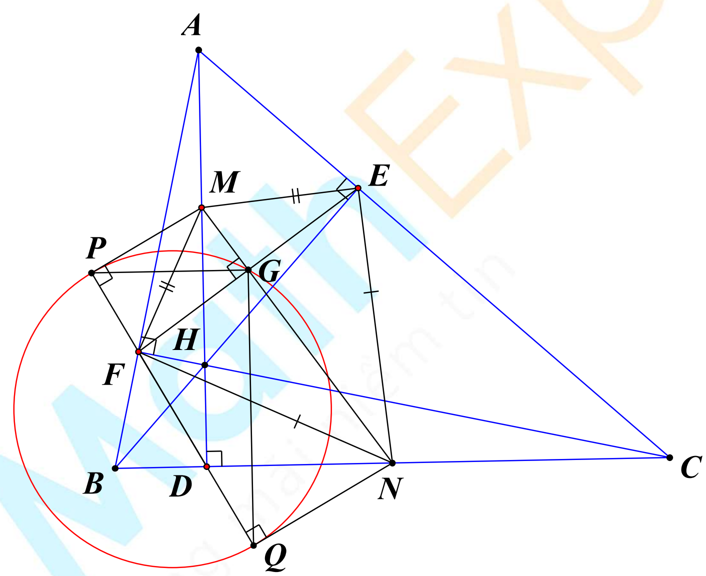
Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn $(AB < AC)$. Vẽ đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và BC.

a) Chứng minh rằng ΔMFN là tam giác vuông.

b) Chứng minh $\Delta FMN \backsim \Delta FAC$.

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc từ M, N đến đường thẳng DF. Chứng minh rằng giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ.

Lời giải :



a) Ta có các tam giác FHA và tam giác FBC là các tam giác vuông nên có

$FM = MA = \dfrac{AH}{2}$ và $FN = NB = \dfrac{BC}{2}$ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)

$\Rightarrow \widehat{MFA} = \widehat{BAD}$ và $\widehat{NFB} = \widehat{DBA}$

$\Rightarrow \widehat{MFA} + \widehat{NFB} = \widehat{BAD} + \widehat{DBA} = 90°$ (vì tam giác BAD vuông tại D)

$\Rightarrow \widehat{MFN} = 180° - \widehat{MFA} - \widehat{NFB} = 180° - 90° = 90° \Rightarrow \Delta MFN$ là tam giác vuông tại F

b) Xét ΔBFC và ΔHFA có: $\widehat{AFH} = \widehat{BFC} = 90°$ và $\widehat{FAH} = \widehat{FCB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \Delta BFC \backsim \Delta HFA(g.g) \Rightarrow \frac{AH}{AF}=\frac{BC}{FC} \Rightarrow \frac{2AM}{AF}=\frac{2CN}{FC} \Rightarrow \frac{AM}{AF}=\frac{CN}{FC}$.

Xét ΔAMF và ΔCNF có:

$\frac{AM}{AF}=\frac{CN}{FC}$ (chứng minh trên)

$\widehat{FAH}=\widehat{FCB}$ (cùng phụ $\widehat{ABC}$)

$\Rightarrow \Delta AMF \backsim \Delta CNF\ (c-g-c) \Rightarrow \frac{FM}{AF}=\frac{FN}{FC}$

Xét ΔFMN và ΔFAC có:

$\frac{FM}{AF}=\frac{FN}{FC}$ (chứng minh trên)

$\widehat{AFC}=\widehat{MFN}\ (=90^\circ)$

$\Rightarrow \Delta FMN \backsim \Delta FAC(c.g.c)$.

Cách khác: Ta có: $MF=ME\left(=\frac{1}{2}AH\right)$ và $NF=NE\left(=\frac{1}{2}BC\right)$

$\Rightarrow MN$ là đường trung trực của FE mà ΔNFE cân tại N $(NF=NE)$

$\Rightarrow MN$ đồng thời là đường phân giác của ΔNFE $\Rightarrow \widehat{FNM}=\frac{1}{2}\widehat{FNE}$ (3)

+) Ta có: tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn tâm N (chứng minh câu a)

$\Rightarrow \widehat{FCE}=\frac{1}{2}\widehat{FNE}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung FE) (4)

Từ (3), (4) suy ra $\widehat{FNM}=\widehat{FCA}\left(=\frac{1}{2}\widehat{FNE}\right) \Rightarrow \Delta FMN \backsim \Delta FAC(g-g)$

c) Gọi G là giao điểm của MN và FE $\Rightarrow MN \perp FE$ tại G (do $NF=NE=\frac{BC}{2}$ và

$MF=ME=\frac{AH}{2}$ nên MN là đường trung trực của EF)

Ta có: Tứ giác $MPFG$ nội tiếp $\left(\widehat{MPF}+\widehat{MGF}=180^\circ\right) \Rightarrow \widehat{GPF}=\widehat{GMF}$.

Ta có: Tứ giác $GFQN$ nội tiếp $\left(\widehat{FGN}+\widehat{FQN}=180^\circ\right) \Rightarrow \widehat{GQF}=\widehat{GNF}$.

Cộng lại ta được $\widehat{GPF}+\widehat{GQF}=\widehat{GMF}+\widehat{GNF}=90^\circ$ (vì tam giác MFN vuông ở F)

$\Rightarrow \widehat{PGQ}=90^\circ$. Vậy giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ.

Bài 64 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Hùng Vương Gia Lai năm học 2024 – 2025):

Cho đường tròn $(O;\,R)$ có đường kính AB cố định, I là điểm thuộc đoạn thẳng AO sao cho $AI=2IO$. Đường thẳng qua I vuông góc với đường thẳng AB cắt đường tròn (O) tại hai điểm phân biệt M và N. Điểm C di động trên cung nhỏ MB (C không trùng với M và B), E là giao điểm của hai đường thẳng AN và BM. Đường thẳng qua E vuông góc với đường thẳng AB cắt đường thẳng AM tại F.

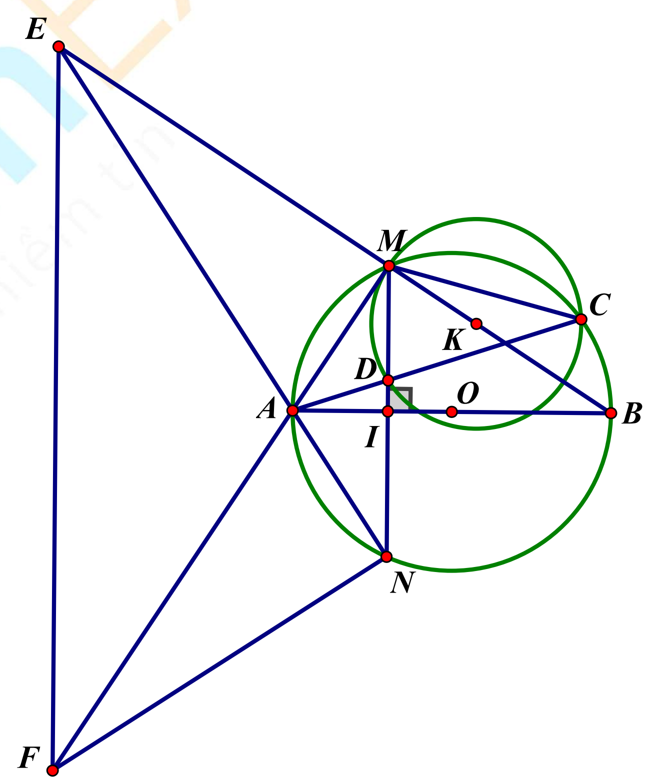
a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Gọi D là giao điểm của hai đường thẳng AC và MN. Chứng minh rằng $AD.AC-AI.IB=AI^2$

c) Gọi K là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác MCD. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$P=2KM.KB-MK.MB$

Lời giải:



a) Dễ thấy tam giác AMN cân tại A

$\Rightarrow \widehat{AMN}=\widehat{ANM}$

Mà $EF \,//\, MN$ (cùng vuông góc với OA)

$\Rightarrow \widehat{AMN}=\widehat{ANM}=\widehat{FEN}$

$\Rightarrow M, N, F, E$ cùng thuộc 1 đường tròn

b) Ta cần chứng minh

$AD.AC-AI.IB=AI^2 \Rightarrow AD.AC=AI(AI+IB)$

$\Rightarrow AD.AC=AI.AB\,(*)$

Mà do $DCIB$ là tứ giác nội tiếp

(vì $\widehat{DIB}+\widehat{DCB}=180^\circ$) $\Rightarrow$ (*) đúng.

c) Trước hết ta chứng minh K, M, B thẳng hàng

Thật vậy, ta có: $\widehat{AMK}=\widehat{AMD}+\widehat{DMK}=\widehat{AMD}+90^\circ-\dfrac{\widehat{MKD}}{2}=\widehat{AMD}+90^\circ-\widehat{MCD}$

Mà $\widehat{AMD}=\widehat{MCD}$ (2 góc nội tiếp chắn 2 cung bằng nhau) $\Rightarrow \widehat{AMK}=90^\circ$

Mà $\widehat{AMB}=90^\circ \Rightarrow K, M, B$ thẳng hàng

Ta có: $P = 2KM.KB - KM.MB = KM\left(2KB - MB\right) = KM\left(KB - KM\right) = \dfrac{2KM(KB - KM)}{2}$

$\Rightarrow P \le \dfrac{(KB + KM)^2}{8} = \dfrac{MB^2}{8}$

Mặt khác, $MB^2 = IA.IB = \dfrac{8}{3}R^2 \Rightarrow P \le \dfrac{R^2}{3}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\dfrac{R^2}{3}$ xảy ra khi $MK = \dfrac{1}{4}MB$.

Bài 65 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bình Thuận năm học 2024 – 2025):

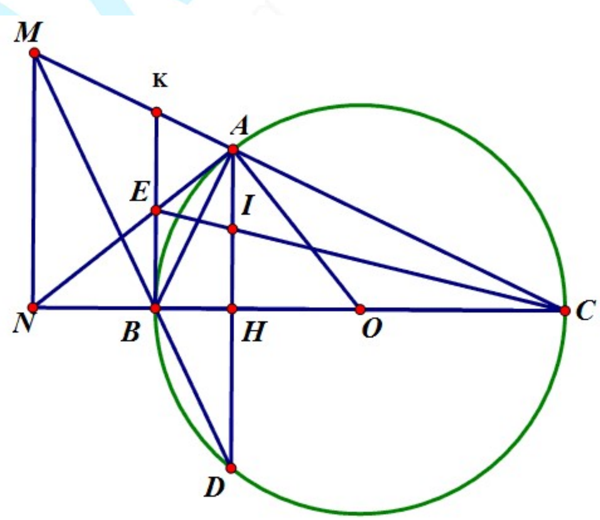
Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC, cắt đường tròn (O) tại A và D. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD, N là chân đường vuông góc kẻ từ M đến .

a) Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{ACD}$.

b) Chứng minh $2\left(\dfrac{BO}{AB}\right)^2 - \dfrac{OH}{BH} = 1$.

c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AN tại E. Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO.

Lời giải :



a) Ta có $\widehat{BAC}=90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BAM}=90^0$, mặt khác $\widehat{MNB}=90^0$ nên tứ giác $MNBA$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ANM}=\widehat{ABM}=\widehat{ACD}$ (điều phải chứng minh)

b) Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A, nên: $BH=\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{AB^2}{2BO}$

Mà $OH=BO-BH=BO-\dfrac{AB^2}{BC}=\dfrac{2BO^2-AB^2}{2BO}\Rightarrow \dfrac{OH}{BH}=\dfrac{2BO^2-AB^2}{AB^2}=2\left(\dfrac{BO}{AB}\right)^2-1$

Suy ra $2\left(\dfrac{BO}{AB}\right)^2-\dfrac{OH}{BH}=1$ (điều phải chứng minh)

c) $\widehat{MBN}=\widehat{DBC}$ (đối đỉnh), mà $\widehat{DAC}=\widehat{DBC}$ (tứ giác $DBAC$ nội tiếp)

suy ra $\widehat{MBN}=\widehat{DAC}\Rightarrow \widehat{NMB}=\widehat{BCA}$ (1)

Do tứ giác $MNBA$ nội tiếp nên ta có $\widehat{NMB}=\widehat{NAB}$ (2)

Tam giác OAC cân tại O $\Rightarrow \widehat{BCA}=\widehat{OAC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{NAB}=\widehat{OAC}\Rightarrow \widehat{OAC}+\widehat{BAO}\Rightarrow \widehat{BAC}=\widehat{NAO}$, mà $\widehat{BAC}=90°\Rightarrow \widehat{NAO}=90°$. Vậy AN là tiếp tuyến của (O).

Ta có $EA=EB$ (tính chất tiếp tuyến) và $\widehat{EAB}=\widehat{EBA}$.

Trong tam giác vuông ABK, ta có $\widehat{EAB}=\widehat{EBA}\Rightarrow \widehat{BKA}=\widehat{EAK}$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau) nên ΔKAE cân tại $E\Rightarrow AE=KE\Rightarrow EB=KE$

Mặt khác $AI\,//\,KE\rightarrow \dfrac{CI}{CE}=\dfrac{AI}{KE}$; $HI\,//\,EB\Rightarrow \dfrac{CI}{CE}=\dfrac{HI}{BE}$, suy ra $\dfrac{AI}{KE}=\dfrac{HI}{BE}$.

Mà $KE=BE$ nên suy ra $AI=HI$, do đó I là trung điểm đoạn thẳng AH.

Bài 66 (Đề thi vào 10 – Toán Chung – tỉnh Ninh Thuận năm học 2024 – 2025):

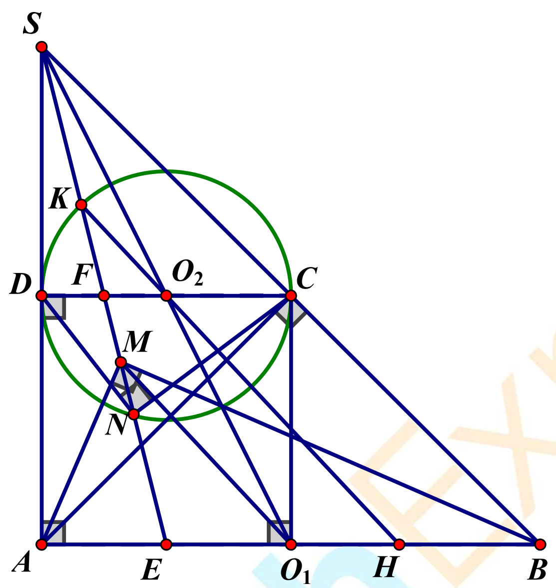
Cho hình thang $ABCD$, vuông tại A và D, $AD=CD=\dfrac{1}{2}AB$. Gọi O_1,O_2 lần lượt là trung điểm của AB và CD và E,F là trung điểm các đoạn AO_1 và DO_2. Trên đoạn thẳng EF lấy các điểm M,N sao cho $\widehat{AMB}=\widehat{CND}=90^\circ$.

a) Chứng minh tứ giác $ABCM$ nội tiếp.

b) Gọi S là giao điểm của AD và BC. Chứng minh BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S.

c) Chứng minh bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải:



a) Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn đường kính AB (1)

Dễ thấy tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông và $CD = DA = \frac{1}{2}AB$ nên $ADCO_1$ là hình vuông và $BCDO_1$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AC \perp DO_1$ và $DO_1 // BC$ nên $AC \perp BC$

Vậy C thuộc đường tròn đường kính AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai điểm M, C cùng thuộc đường tròn đường kính AB. Do đó tứ giác $ABCM$ nội tiếp.

b) Theo giả thiết ta có BC đi qua S (1)

Ta có $D \in SA, C \in SB$ và $DC // AB; DC = \frac{1}{2}AB$ nên DC là đường trung bình của ΔSAB.

Suy ra D,C lần lượt là trung điểm SA,SB

Xét ΔSO_1B ta có C là trung điểm SB và $CO_2//BO_1 \Rightarrow CO_2$ là đường trung bình của ΔSBO_1

$\Rightarrow O_2$ là trung điểm của SO_1. Vậy O_1O_2 đi qua S $\quad (2)$

Xét ΔSBE ta có C là trung điểm SB và $CF//BE$ $\Rightarrow CF$ là đường trung bình của ΔSBE

$\Rightarrow F$ là trung điểm của SE. Vậy EF đi qua S $\quad (3)$

Từ (1) và (2) suy ra BC,EF và O_1O_2 đồng quy tại S.

c) Gọi K là giao điểm của EF với đường tròn đường kính CD; H là giao điểm của KO_2 với AB

Ta có $K \in SM$, O_2 là trung điểm SO_1 và $KO_2 = \frac{1}{2}O_1M$ nên KO_2 là đường trung bình của ΔSO_1M

$\Rightarrow KO_2//MO_1 \Rightarrow$ $\widehat{KO_2D} = \widehat{KHA} = \widehat{MO_1A}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{KO_2D} = 2\widehat{KND}$ và $\widehat{MO_1A} = 2\widehat{MAD} \Rightarrow \widehat{KND} = \widehat{MAD}$ hay $\widehat{MND} = \widehat{MAD}$

Vậy tứ giác $ADMN$ nội tiếp hay bốn điểm A,D,M,N cùng thuộc một đường tròn.

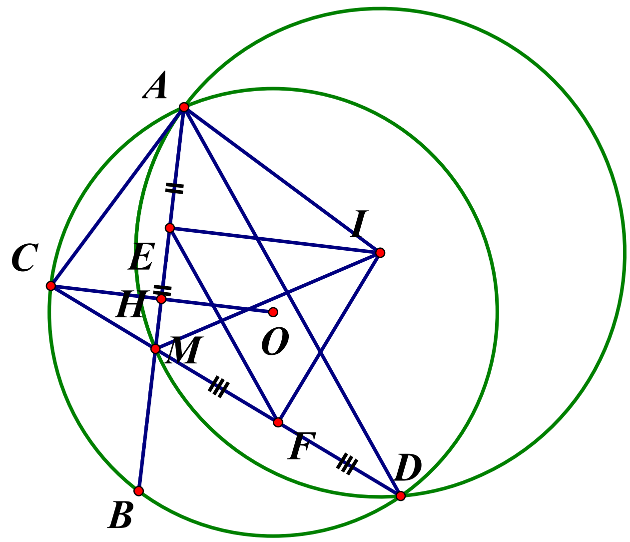
Bài 67 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa năm học 2024 – 2025):

Cho A,B là hai điểm cố định trên đường tròn (O,R), C là điểm chính giữa cung AB và M là điểm di động trên dây cung $AB(M \neq A, M \neq B)$. Tia CM cắt (O,R) tại $D(D \neq C)$.

a) Chứng minh $AC^2 = CM.CD$ và AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM.

b) Cho $R = 5cm, AB = 6cm$, tính $R_1 + R_2$, với R_1,R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và tam giác BDM.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{CAB}=\frac{1}{2}Sd\,\overset\frown{CB}=\frac{1}{4}Sd\,\overset\frown{AB}$; $\widehat{ADC}=\frac{1}{2}Sd\,\overset\frown{AC}=\frac{1}{4}Sd\,\overset\frown{AB}\Rightarrow\widehat{CAB}=\widehat{ADC}$

$\Rightarrow\triangle CAM\backsim CDA(g\cdot g)\Rightarrow\frac{CA}{CD}=\frac{CM}{CA}\Rightarrow CA^2=CD\cdot CM$

Vẽ 2 đường trung trực của AM,DM cắt nhau tại I. Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AM và DM.

Suy ra $EF//AD$, nên $\widehat{EFM}=\widehat{ADM}$ (1)

Mà $\widehat{ADM}=\widehat{CAM}$,(do $\triangle CAM\backsim\triangle CDA)(2)$

Lại có tứ giác $EMFI$ là tứ giác nội tiếp do $\widehat{E}+\widehat{F}=90^0$, nên $\widehat{EFM}=\widehat{EIM}$ (3)

Hơn nữa $\widehat{EIM}=\widehat{AIE}$ (EI là trung trực của AM)

Từ (1), (2), (3), (4) suy ra: $\widehat{CAM}=\widehat{AIE}$

Do vậy : $\widehat{CAM}+\widehat{IAM}=\widehat{AIE}+\widehat{IAM}=\widehat{AEI}=90^0\Rightarrow\widehat{CAI}=90^0$ hay CA vuông góc với AI

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM.

b) Nối OC, vì C là điểm chính giữa cung nên OC là đường trung trực của AB. Gọi H là giao điểm của OC và AB

$AH=\frac{AB}{2}=3;OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

$CH=OC-OH=5-4=1$

$AC=\sqrt{CH^2+AH^2}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$

$\sin\widehat{CAH}=\frac{CH}{AC}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$R_1 = IA = \dfrac{AE}{\sin \widehat{AIE}} = \dfrac{AE}{\sin \widehat{CAH}} = \dfrac{AM\sqrt{10}}{2}$

Chứng minh tương tự, ta cũng có BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD và có bán kính là $R_2 = \dfrac{BM\sqrt{10}}{2}$.

Như vậy $R_1 + R_2 = \dfrac{(AM + BM)\sqrt{10}}{2} = \dfrac{AB\sqrt{10}}{2} = 3\sqrt{10}\,(\text{ cm})$.

Bài 68 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025):

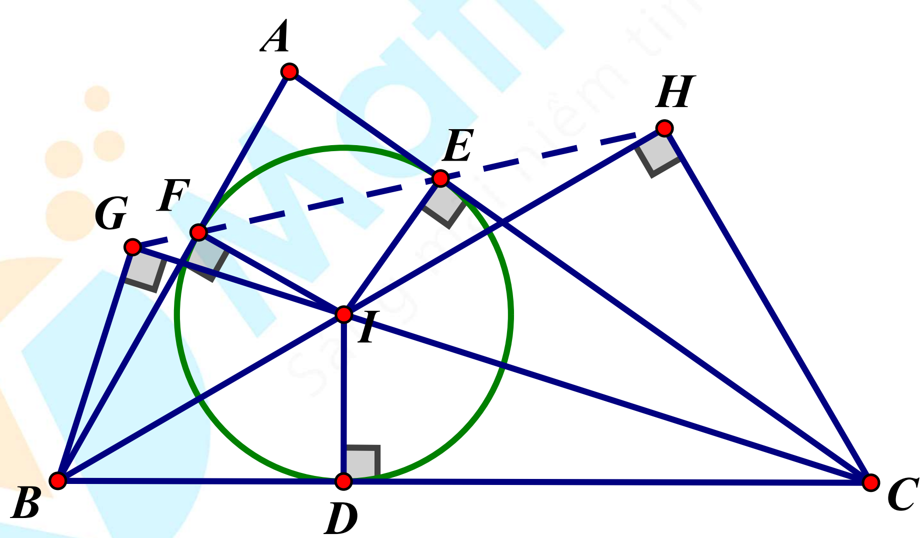
Cho tam giác ABC $(AB < AC < BC)$ ngoại tiếp đường tròn (I) với các tiếp điểm trên BC, CA, AB lần lượt là D, E, F. Gọi G và H lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B và C xuống CI và BI. Chứng minh rằng

a) Tứ giác $BGED$ là hình thang

b) Tứ giác $BGFD$ nội tiếp

c) Các điểm E, F, G, H thẳng hàng.

Lời giải:



a) Ta có: $BG \perp IC$ (giả thiết), $IC \perp DE$ (tính chất tiếp tuyến) $\Rightarrow$ $BG \,//\, DE$

Do đó tứ giác $BGED$ là hình thang.

b) Do $AB < AC < BC$ nên $\widehat{ACB} < \widehat{ABC} < \widehat{BAC}$

Do $\dfrac{\widehat{ACB}}{2} + \widehat{ABC} < \dfrac{\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + \widehat{BAC}}{2} = 90^\circ$

Nên tia BF nằm giữa hai tia BE và BG.

Tương tự ta cũng chứng minh được tia CE nằm giữa hai tia CF và CH

Ta có: $\widehat{BGI}=\widehat{BDI}=90^\circ \Rightarrow BGID$ nội tiếp đường tròn đường kính BI (1)

Ta có: $\widehat{BFI}=90^\circ \Rightarrow F$ nằm trên đường tròn đường kính BI (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B,\ G,\ F,\ I,\ D$ cùng nằm trên đường tròn đường kính BI

Hay $BGFD$ là tứ giác nội tiếp

c) $BGFD$ là tứ giác nội tiếp (chứng minh trên) $\Rightarrow \widehat{GFD}+\widehat{GBD}=180^\circ$ (3)

Lại có $\widehat{EFD}=\widehat{EDC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung của đường tròn (I)) (4)

Hơn nữa, do $BG \,//\, ED$ (chứng minh trên) nên $\widehat{GBD}=\widehat{EDC}$ (5)

Từ (3), (4) và (5) $\Rightarrow \widehat{GFD}+\widehat{EFD}=180^\circ$

Hay $G,\ F,\ E$ thẳng hàng

Tương tự $H,\ E,\ F$ thẳng hàng

Suy ra điều phải chứng minh.

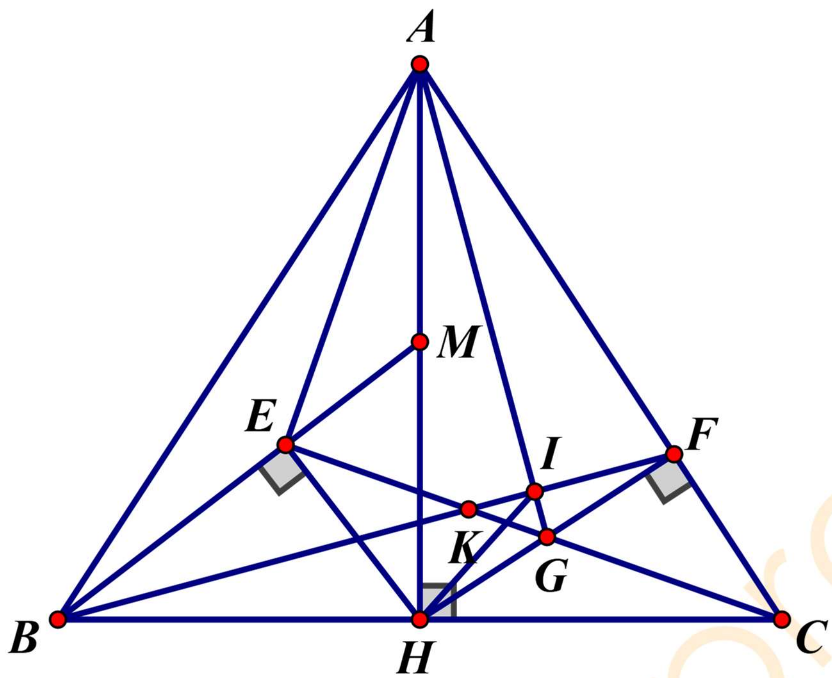
Bài 69 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Phú Yên năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác ABC cân tại A, có đường cao AH. Gọi M là trung điểm của AH; $E,\ F$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên $BM,\ AC$. Đường thẳng CE cắt các đường thẳng HF và BF lần lượt tại G và K. Chứng minh rằng

a) $\widehat{BEC}=\widehat{HEA}$

b) AG vuông góc với BF.

Lời giải:



a) Do $HE \perp BM, AH \perp BC$ (giả thiết) $\Rightarrow \widehat{HBE} = \widehat{MHE}$ (cùng phụ $\widehat{EHB}$) (1)

Suy ra hai tam giác vuông HBE và MHE đồng dạng

Suy ra $\dfrac{BH}{BE} = \dfrac{HM}{HE}$ (2)

Do M, H lần lượt là trung điểm của AH, BC nên $BC = 2BH$ và $HA = 2HM$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{HA}{HE}$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \Delta EBC \backsim \Delta EHA (c-g-c)$

Do vậy $\widehat{BEC} = \widehat{HEA}$ (điều phải chứng minh).

b) Do $\Delta EBC \backsim \Delta EHA$ (chứng minh trên) nên $\widehat{HCE} = \widehat{BCE} = \widehat{HAE}$ $\Rightarrow$ Tứ giác $AEHC$ nội tiếp

Do tứ giác $AEHC$ nội tiếp nên $\widehat{HEA} + \widehat{HCA} = 180^\circ$ (5)

Do M, E, B thẳng hàng nên $\widehat{MEG} + \widehat{BEC} = 180^\circ$ (6)

Do $\Delta EBC \backsim \Delta EHA$ nên $\widehat{BEC} = \widehat{HEA}$ (7)

Từ (5), (6), (7) suy ra $\widehat{HCA} = \widehat{MEG}$ (8)

Lại có $\widehat{HCA} = \widehat{MHG}$ vì cùng phụ $\widehat{HAC}$ (9)

Từ (8) và (9) suy ra $\widehat{MEG} = \widehat{MHG} \Rightarrow$ Tứ giác $MEHG$ nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HGM} = \widehat{MEH} = 90^\circ \Rightarrow MG \perp HF \Rightarrow MG // AF$

Mà M là trung điểm của HA nên G là trung điểm của HF.

Ta có: $\widehat{AHF}=\widehat{ACH}$ vì cùng phụ $\widehat{CHF} \Rightarrow \Delta HFA \backsim \Delta CFH \Rightarrow \dfrac{HA}{HF}=\dfrac{CH}{CF}$

Do H, G lần lượt là trung điểm của BC, HF nên $BC=2CH$ và $HF=2HG$

Khi đó $\dfrac{HA}{2HG}=\dfrac{BC}{2CF} \Rightarrow \dfrac{HA}{HG}=\dfrac{BC}{CF}$

Kết hợp với (9) dẫn đến $\Delta BCF \backsim \Delta AHG \Rightarrow \widehat{HBI}=\widehat{CBF}=\widehat{HAG}=\widehat{HAI}$ (với I là giao điểm của AG và BF)

Từ đó suy ra $ABHI$ nội tiếp, vì thế $\widehat{AIK}=\widehat{AIB}=\widehat{AHB}=90^\circ$ (điều phải chứng minh).

Bài 70 (Đề thi vào 10 – Chuyên Tin – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025):

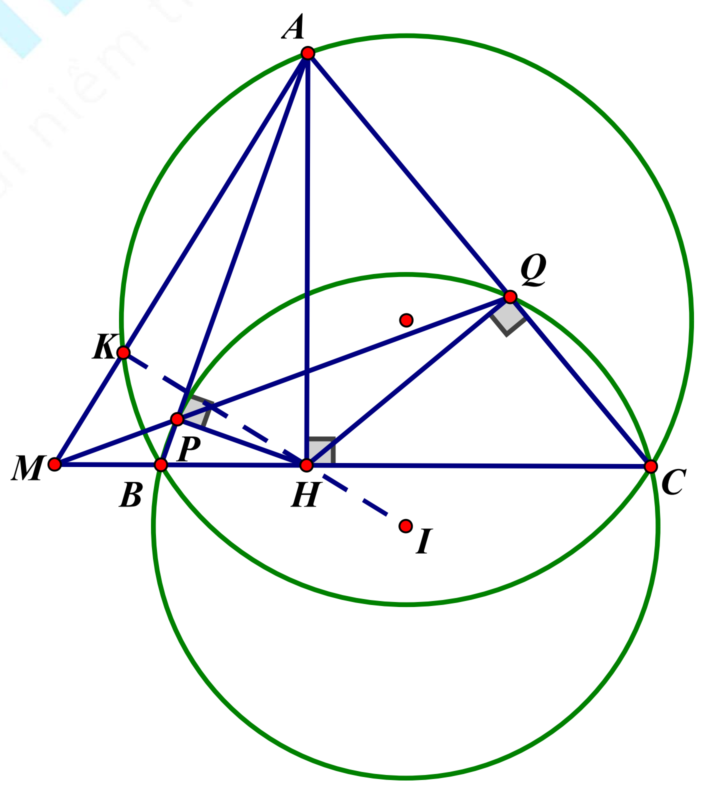
Cho tam giác ABC nhọn có $AB<AC$ nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC (H thuộc BC). Gọi P, Q lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ H đến AB, AC.

a) Chứng minh $\widehat{APQ}=\widehat{AHQ}$ và bốn điểm B, C, Q, P cùng nằm trên một đường tròn.

b) Đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh hai tam giác MQH và MHP đồng dạng và $MH^2=MB.MC$

c) Đường thẳng MA cắt (O) tại K khác A, I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCQP$. Chứng minh ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Lời giải:



a) Xét tứ giác $APHQ$ có

$\widehat{APH}+\widehat{AQH}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

Nên $APHQ$ là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{APQ}=\widehat{AHQ}$

Mặt khác $\widehat{AHQ}=90^\circ-\widehat{QHC}=\widehat{QCB}$ nên

$\widehat{APQ}=\widehat{QCB}$

Do đó $BCQP$ là tứ giác nội tiếp

Hay 4 điểm B, C, Q, P cùng thuộc một đường tròn

b) Vì $APHQ$ là tứ giác nội tiếp nên

$\widehat{HQP}=\widehat{HAP}=90^\circ-\widehat{PHA}=\widehat{PHM}$

Xét tam giác MQH và tam giác MHP có

$\widehat{PHM} = \widehat{HQP}$ (chứng minh trên)

$\widehat{QMH}$ chung

$\Rightarrow \Delta MQH \backsim \Delta MHP(g-g) \Rightarrow \dfrac{MQ}{MH} = \dfrac{MH}{MP} \Rightarrow MH^2 = MQ.MP$

Theo câu a, $BCQP$ là tứ giác nội tiếp nên $MB.MC = MQ.MP$

Vậy $MB.MC = MH^2$

c) Ta có $AKBC$ là tứ giác nội tiếp

Do đó: $MA.MK = MB.MC = MH^2 \Rightarrow \dfrac{MA}{MH} = \dfrac{MH}{MK}$

Xét tam giác MKH và tam giác MHA có

$\dfrac{MA}{MH} = \dfrac{MH}{MK}$ (chứng minh trên)

$\widehat{AMH}$ chung

$\Rightarrow \Delta MKH \backsim \Delta MHA(c-g-c) \Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{MHA} = 90^\circ \Rightarrow AK \perp HK$

Kẻ đường kính AA' của (O) thì $AK \perp KA'$

Từ đó K, H, A' thẳng hàng

Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của PB, QC, HA'

Ta có: $HP \,//\, A'B$ (cùng vuông góc với AB)

Do đó: $HPBA'$ là hình thang

Từ đó FD là đường trung bình của hình thang này

Suy ra $FD \,//\, HP$

Mặt khác $HP \perp AB$ nên $FD \perp BA$

Do đó FD là đường trung trực của đoạn thẳng BP

Hoàn toàn tương tự, FE là đường trung trực của đoạn thẳng QC

Do đó F là tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác $BPQC$, tức là $F \equiv I$

Suy ra H, I, A' thẳng hàng. Suy ra H, I, K thẳng hàng.

Bài 71 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Bình Định năm học 2024 – 2025):

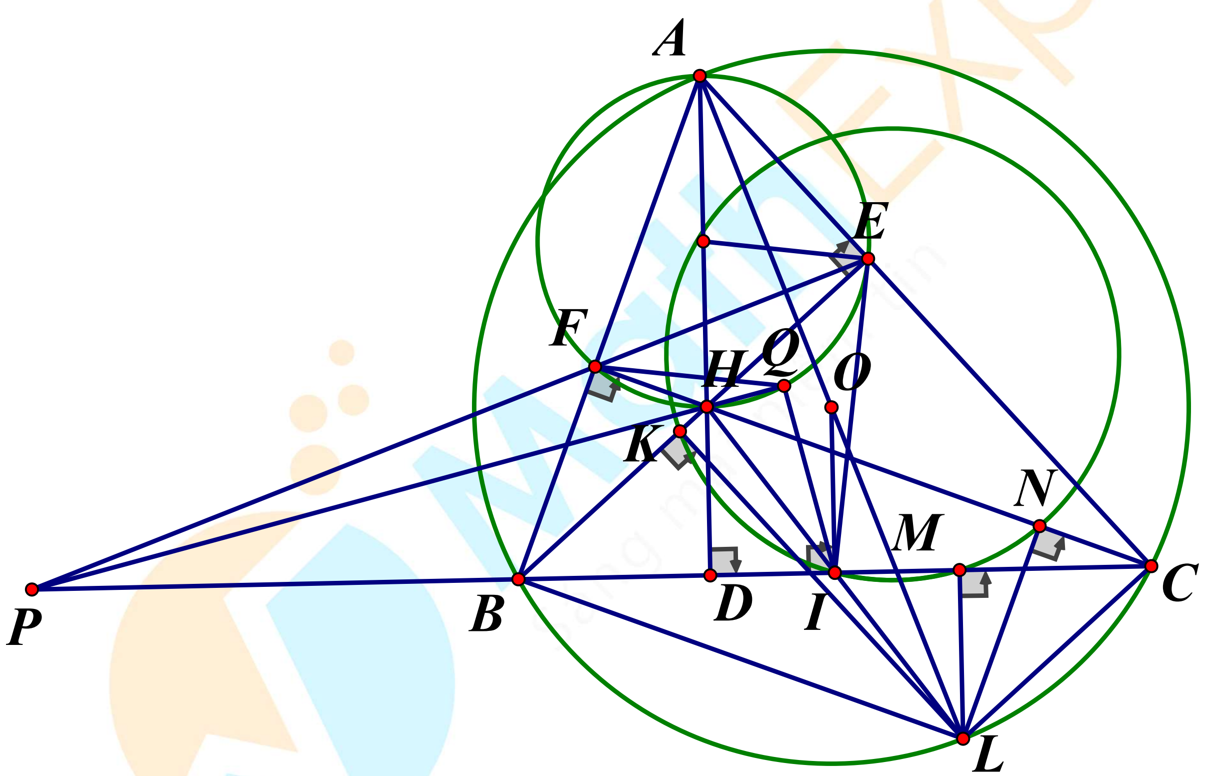
Cho đường tròn (O) và một dây cung BC cố định không là đường kính. Xét điểm A thay đổi trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn và $AB < AC$. Gọi D, E, F lần lượt là chân các đường cao của tam giác ABC kẻ từ A, B, C. Gọi H là trục tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh $\widehat{IEC} = \widehat{ICE}$ và IE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF.

b) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng EF và BC. Đường thẳng PH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HEF tại điểm thứ hai là Q khác H. Chứng minh $PD \cdot PI = PE \cdot PF$ và $\widehat{AFQ} = \widehat{PIQ}$.

c) Gọi L là điểm đối xứng với A qua O và M, X, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của L lên BC, CH, BH. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp tam giác MNK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải:



a) Vì $\triangle BEC$ vuông tại E có EI là trung tuyến nên $\triangle IEC$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEC} = \widehat{ICE}$

Chứng minh tương tự ta được $\triangle IEB$ cân tại $I \Rightarrow \widehat{IEB} = \widehat{IBE}$

Ta có $\widehat{DAC} = \widehat{EBI}$ (cùng phụ $\widehat{DCA}$)

Suy ra $\widehat{IEB} = \widehat{DAC}$ hay $\widehat{IEH} = \widehat{HAE}$ nên IE là tiếp tuyến của (HEF)

b) Ta có : $\widehat{EIC}=\widehat{EBI}+\widehat{BEI}=2\widehat{EBI}$

Dễ thấy $BFHD, AEHF$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{DFH}=\widehat{EBI}=\widehat{DAC}=\widehat{EFH}$

Do đó $\widehat{EIC}=2\widehat{EBI}=\widehat{DFH}+\widehat{EFH}=\widehat{DFE}$

$\Rightarrow$ $DFEI$ là tứ giác nội tiếp nên dễ chứng minh được $\triangle PFD \backsim \triangle PIE$

$\Rightarrow \dfrac{PF}{PI}=\dfrac{PD}{PE} \Rightarrow PF.PE=PD.PI$

Lại có: $PF.PE=PH.PQ$ nên $PH.PQ=PD.PI \Rightarrow \triangle PHD \backsim \triangle PIQ$

Do đó: $\widehat{HQI}=\widehat{HDI}=90^\circ \Rightarrow DHQI$ là tứ giác nội tiếp

Mà $\widehat{AQH}=90^\circ$ nên A,Q,I thẳng hàng

Từ đây ta có: $\widehat{PIQ}=\widehat{IAC}+\widehat{ICA}=\widehat{IAC}+\widehat{AFE}=\widehat{QFE}+\widehat{AFE}=\widehat{AFQ}$(điều phải chứng minh)

c) L đối xứng với A qua O nên $LB;\ LC$ lần lượt vuông góc với AB, AC

Ta cũng có $AB \perp CH, AC \perp BH$ nên $LB // CH$, $LC // BH$ nên $BHCL$ là hình bình hành

Ta có I là trung điểm BC nên I là trung điểm HL

Ta thấy K,H,N,L cùng nằm trên 1 đường tròn $(I,\ IH)$

Ta có: $\widehat{KIN}=2\widehat{KLN}=2\left(180^\circ-\widehat{KHN}\right)=2\widehat{BHF}=2\widehat{BAC}$ ($\widehat{BHF}=\widehat{BAC}$ vì cùng phụ $\widehat{ABH}$)

$\widehat{KMN}=180^\circ-\widehat{KMB}-\widehat{NMC}=\left(90^\circ-\widehat{KLB}\right)+\left(90^\circ-\widehat{NLC}\right)=\widehat{HBL}+\widehat{HCL}$

$=2\left(180^\circ-\widehat{BHC}\right)=2\left(180^\circ-\widehat{EHF}\right)=2\cdot\widehat{BAC}=\widehat{KIN}$

Do đó, K,I,M,N cùng nằm trên 1 đường tròn hay I nằm trên (KMN)

Mà I là điểm cố định khi A di chuyển trên (O).Do đó (KMN) luôn đi qua 1 điểm cố định là trung điểm BC.

Bài 72 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Ngãi năm học 2024 – 2025):

1) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Hai tia AB và DC cắt nhau tại E sao cho $\widehat{AED}=40^0$, hai tia BC và AD cắt nhau tại F sao cho $\widehat{AFB}=30^0$. Tính số đo các góc trong của tứ giác $ABCD$.

2) Cho đường tròn (O) và BC là dây cung cố định khác đường kính của (O), A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tia phân giác của góc $\widehat{BAC}$ cắt (O) tại D (khác A).

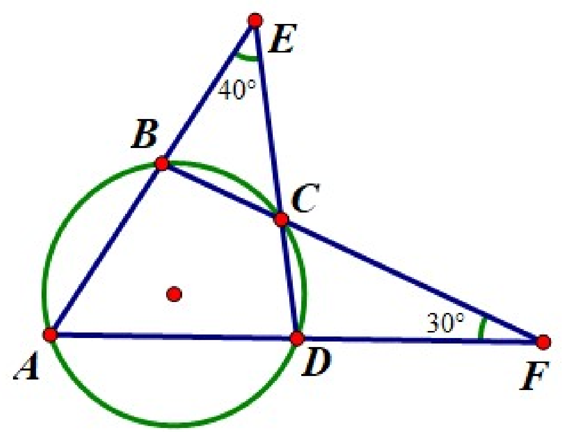
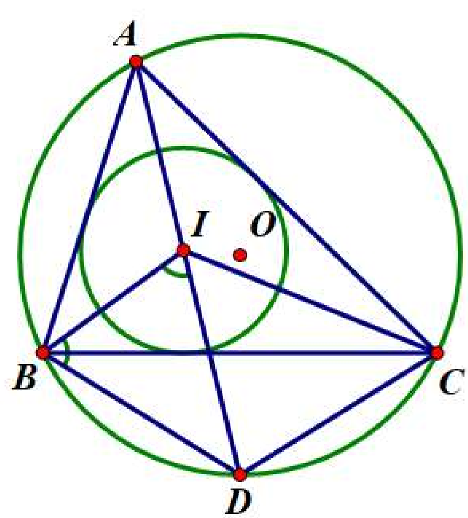
a) Chứng minh tam giác DBI cân. Từ đó suy ra D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.

b) Gọi E, P, Q lần lượt là các tiếp điểm của (I) với BC, CA, AB. Đường thẳng qua A và song song với BC cắt các tia EP, EQ lần lượt tại M, N. Gọi F là điểm đối xứng với E qua I.

Chứng minh $AM = AN$ và F là trực tâm tam giác EMN.

c) Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O) cắt nhau tại K. Gọi X, Y lần lượt là hình chiếu của K trên các đường thẳng AB và AC. Chứng minh rằng đường thẳng XY luôn qua điểm cố định khi A thay đổi.

Lời giải:

1) Ta có $\begin{cases} \widehat{A}+\widehat{B}+30^0=180^0 \\ \widehat{A}+\widehat{D}+40^0=180^0 \Rightarrow \widehat{A}=55^0 \\ \widehat{B}+\widehat{D}=180^0 \end{cases}$ $\Rightarrow \widehat{B}=95^\circ, \widehat{C}=125^\circ, \widehat{D}=85^\circ$	
2) a) Ta có $\widehat{BID}=\widehat{IAB}+\widehat{IBA}$ (tính chất góc ngoài của tam giác) $=\widehat{IAC}+\widehat{IBC}$ (tính chất phân giác) $=\widehat{DBC}+\widehat{IBC}=\widehat{IBD}$ Vậy tam giác DBI cân tại D. Vì AD là tia phân giác trong góc A nên D là điểm chính giữa của cung nhỏ BC hay $DB=DC$ Vậy $DB=DI=DC$ hay D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC.	

b) Ta có $\widehat{ANQ} = \widehat{QEB}$ (so le trong)

$\widehat{QEB} = \widehat{EQB}$ (tính chất tiếp tuyến)

$\widehat{EQB} = \widehat{NQA}$ (đối đỉnh)

Vì thế $\widehat{ANQ} = \widehat{NQA}$

Nên tam giác ANQ cân tại A hay $AN = AQ$.

Chứng minh tương tự ta có $AM = AP$.

Mà $AQ = AP$ (tính chất tiếp tuyến).

Do đó $AM = AN$ (điều phải chứng minh).

* Tam giác QMN có $AM = AN = AQ$

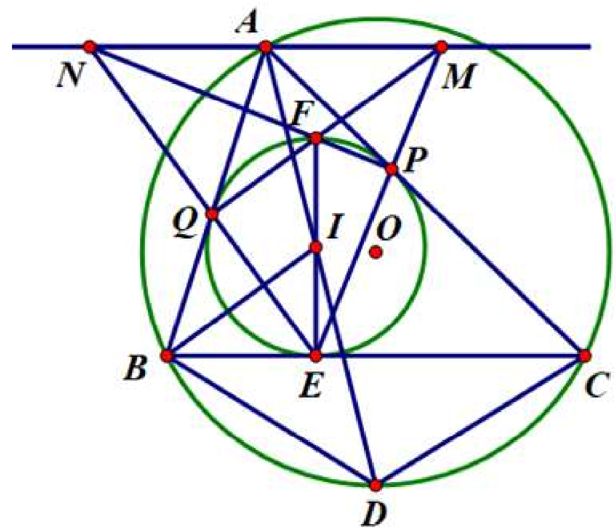
Nên vuông tại Q. Suy ra $MQ \perp NE$

Mà $\widehat{FQE} = 90^\circ \Rightarrow FQ \perp NE$.

Từ đó ta có M, F, Q thẳng hàng. (1)

Lại có $\begin{cases} EF \perp BC \\ BC // MN \end{cases}$ nên $EF \perp MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra F là trực tâm tam giác EMN.



c) Gọi T là trung điểm của BC.

Rõ ràng các tứ giác $BXKT$, $CYKT$ nội tiếp.

Khi đó $\widehat{XBK} = \widehat{XTK}$ và $\widehat{ACB} = \widehat{TKY}$.

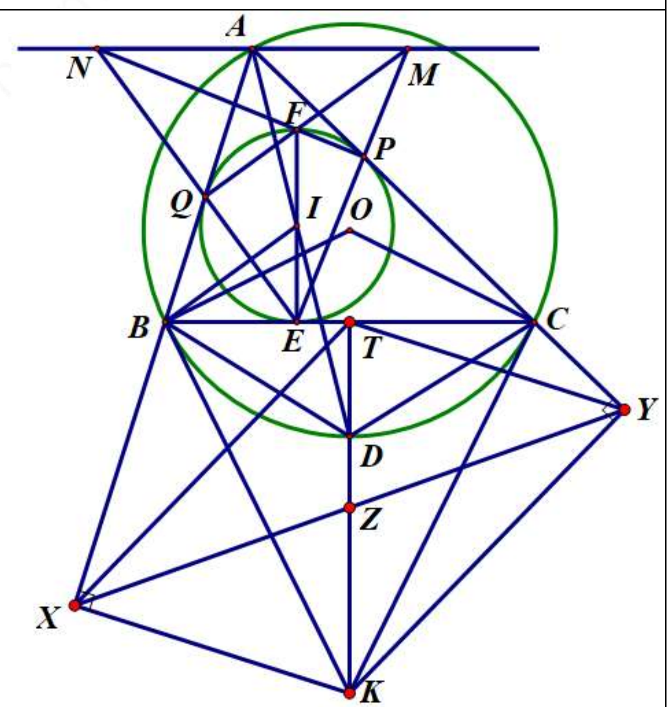
Ta có $\widehat{XBK} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{CBK}$

$= 180^\circ - \widehat{ABC} - \widehat{CAB} = \widehat{ACB}$

Từ đó suy ra $\widehat{XTK} = \widehat{TKY}$ suy ra $XT // KY$.

Chứng minh tương tự $TY // XK$.

Vậy $XTYK$ là hình bình hành nên XY qua trung điểm Z của đoạn TK. Mà TK cố định Z cố định.



Bài 73 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025):

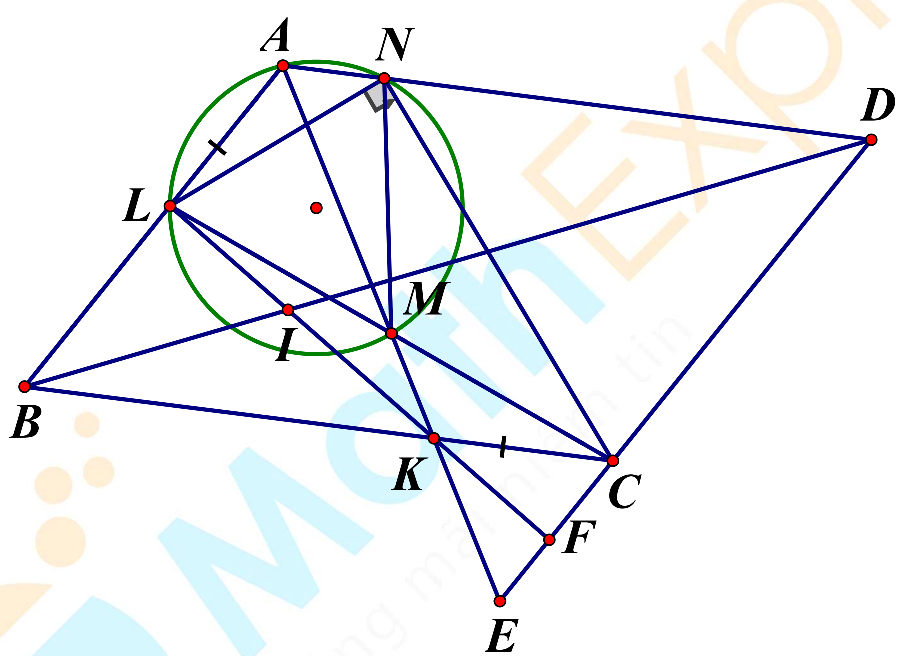
Cho hình bình hành $ABCD$ có góc BAD là góc tù, $AB < AD$ và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho $CK < AB$. Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho $AL = CK$. Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A).

a) Chứng minh $AB.NL = AK.NM$

b) Chứng minh $\widehat{CNL} = 90^\circ$

c) Gọi I là giao điểm của BD và KL, chứng minh $\dfrac{BA}{BL} + \dfrac{BC}{BK} = \dfrac{BD}{BI}$

Lời giải:



a) Ta có: (do $ALMN$ nội tiếp) nên $\widehat{MAL} = \widehat{LNM}$ và $\widehat{NLM} = \widehat{NAM} = \widehat{AKB}$

Suy ra $\Delta NLM \backsim \Delta AKB(g-g)$

Hay $\dfrac{NL}{AK} = \dfrac{MN}{AB} \Rightarrow AB.NL = AK.MN$ (điều phải chứng minh)

b) Ta có: $\widehat{NLM} = \widehat{MAN} = \widehat{LAM} = \widehat{LNM}$

Suy ra tam giác LMN cân tại M $\Rightarrow ML = MN$ (1)

Gọi E là giao điểm của AK, CD

Ta có: $\widehat{CEK} = \widehat{BAK} = \widehat{KAD} = \widehat{EKC}$ hay tam giác CKE cân tại C

Theo định lý Thales: $\frac{ML}{MC}=\frac{AL}{CE}=\frac{AL}{CK}=1\Rightarrow ML=MC(2)$

Từ (1) và (2) suy ra tam giác CLN vuông tại N hay $\widehat{CNL}=90^\circ$

c) Ta có: $\frac{ID}{IB}=\frac{DF}{BL}=\frac{CD}{BL}+\frac{CF}{BL}$ (F là giao điểm của LK và CD)

mà $\frac{CF}{BL}=\frac{CK}{BK}\Rightarrow\frac{ID}{IB}+1=\frac{CD}{BL}+1+\frac{CF}{BL}\Rightarrow\frac{BD}{BI}=\frac{AB}{BL}+1+\frac{CK}{BK}=\frac{AB}{BL}+\frac{BC}{BK}$

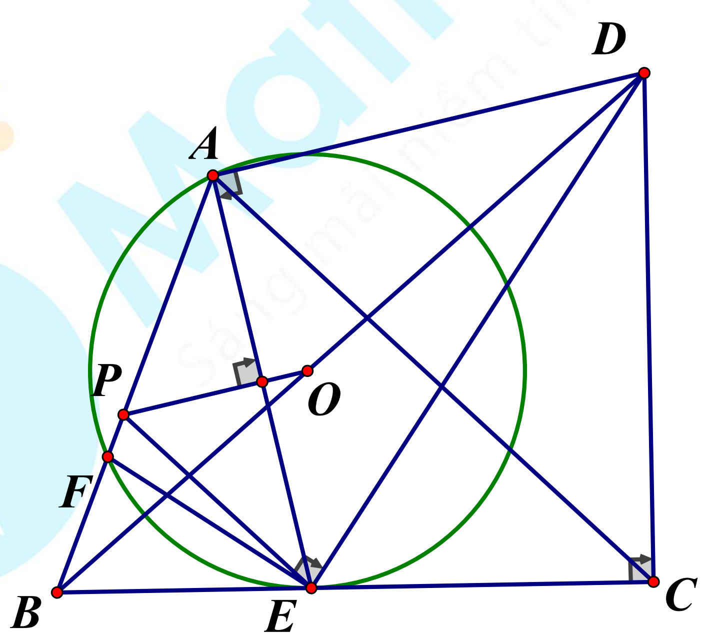
Bài 74 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – tỉnh Quảng Nam năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng 90°. Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng 90°.

a) Chứng minh tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn và $BE^2=BA.BF$

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF, đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P. Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD.

Lời giải:



a) Ta có: $\widehat{EAD}=\widehat{ECD}=90^\circ$ suy ra tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn

Ta có: $\widehat{BEF}+\widehat{DEC}=180^\circ-\widehat{FED}=90^\circ$

Nên $\widehat{BEK}=90^\circ-\widehat{DEC}=\widehat{ECD}=\widehat{EAC}=\widehat{BAE}$

Mà $\widehat{ABE}$ chung

Suy ra $\Delta BFE \backsim \Delta BEA(g-g) \Rightarrow \dfrac{BF}{BE} = \dfrac{BE}{BA} \Rightarrow BE^2 = BF.BA$

b) Ta có: $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{PAE}$ nên tam giác APE cân tại P hay $PA = PE$. Mà $OA = OE$

Suy ra OP là trung trực của $AE \Rightarrow OP \perp AE$

Theo câu a thì $BE^2 = BF.BA$

Hay BE là tiếp tuyến của (O).

Nên $OE \perp BC$ mà $DC \perp BC$ hay $OE // DC$

Ta có: $\Delta OPE \backsim \Delta DAC$ do hai tam giác có các cặp cạnh lần lượt song song

Do đó, AP, OD, EC đồng quy tại B. Vậy O, D, B thẳng hàng.

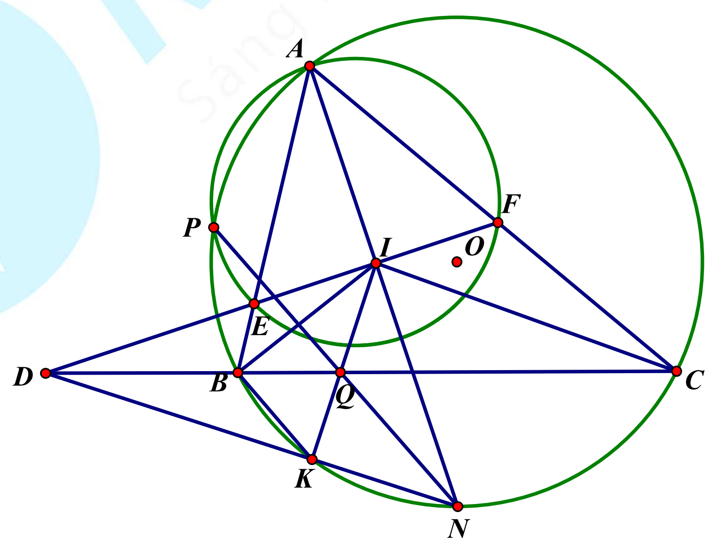
Bài 75 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT LÊ QUÝ ĐÔN TP Đà Nẵng năm học 2024 – 2025):

Cho tam giác ABC nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O), các đường phân giác của tam giác cắt nhau tại I. Đường thẳng vuông góc với AI tại I lần lượt cắt các đường thẳng BC, AB, AC tại các điểm D, E, F. Đường tròn (O) cắt tia AI tại điểm N (khác A) và cắt đoạn thẳng DN tại điểm K (khác N).

a) Chứng minh rằng tứ giác $BEIK$ nội tiếp

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm P (khác A). Chứng minh rằng các đường thẳng PN, BC, IK đồng quy.

Lời giải :



a) Ta có: $\widehat{DIB}=\widehat{AIB}-\widehat{AIE}=180^\circ-\widehat{IAB}-\widehat{IBA}-90^\circ=\dfrac{180^\circ-\widehat{BAC}-\widehat{ABC}}{2}=\dfrac{\widehat{ACB}}{2}=\widehat{DCI}$

Ta có: $\Delta DBI\backsim\Delta DIC(g-g)$

Kết hợp với tứ giác $BCNK$ nội tiếp

suy ra $DI^2=DB.DC=DK.DN$

Từ đó ta thu được $\Delta DIK\backsim\Delta DNI(c.g.c)\Rightarrow\widehat{DIK}=\widehat{DNI}$

Mà tứ giác $ABKN$ nội tiếp, ta có $\widehat{EBK}+\widehat{EIK}=\widehat{ABK}+\widehat{ANK}=180^\circ$

Suy ra tứ giác $BEIK$ nội tiếp

b) Vì AI đồng thời là đường cao và đường phân giác của tam giác AEF nên tam giác AEF cân tại A

Suy ra $AE=AF$ và $\widehat{AEF}=\widehat{AFE}=\dfrac{180^\circ-\widehat{BAC}}{2}$

Ta có: $\widehat{BKE}=\widehat{BIE}=\widehat{AEF}-\widehat{EBI}=\dfrac{180^\circ-\widehat{BAC}}{2}-\dfrac{\widehat{ABC}}{2}=\dfrac{\widehat{ACB}}{2}=\dfrac{\widehat{AKB}}{2}$

Suy ra KE là tia phân giác của $\widehat{AKB}$

Chứng minh tương tự ta thu được tứ giác $CEIK$ nội tiếp

và KF là tia phân giác của $\widehat{AKC}$

Ta có: $\dfrac{KB}{KC}=\dfrac{KB}{KA}.\dfrac{KA}{KC}=\dfrac{EB}{EA}.\dfrac{FA}{FC}=\dfrac{EB}{FC}$

Vì $\widehat{ABP}=\widehat{ACP},\widehat{AEP}=\widehat{AFP}$ nên $\Delta PBE\backsim\Delta PCF(g-g)$

Suy ra $\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{BE}{CF}=\dfrac{KB}{KC}$

Do $\widehat{NPB}=\widehat{NAB}=\widehat{NAC}=\widehat{NPC}$ nên PN là tia phân giác của $\widehat{BPC}$

Gọi PN cắt BC tại Q. Ta có: $\dfrac{QB}{QC}=\dfrac{PB}{PC}=\dfrac{KB}{KC}$

Suy ra KQ là tia phân giác của $\widehat{BKC}$

Do đó, tia KI và tia KQ trùng nhau hay ba điểm K, Q, I thẳng hàng

Vậy PN, BC, IK đồng quy tại Q.

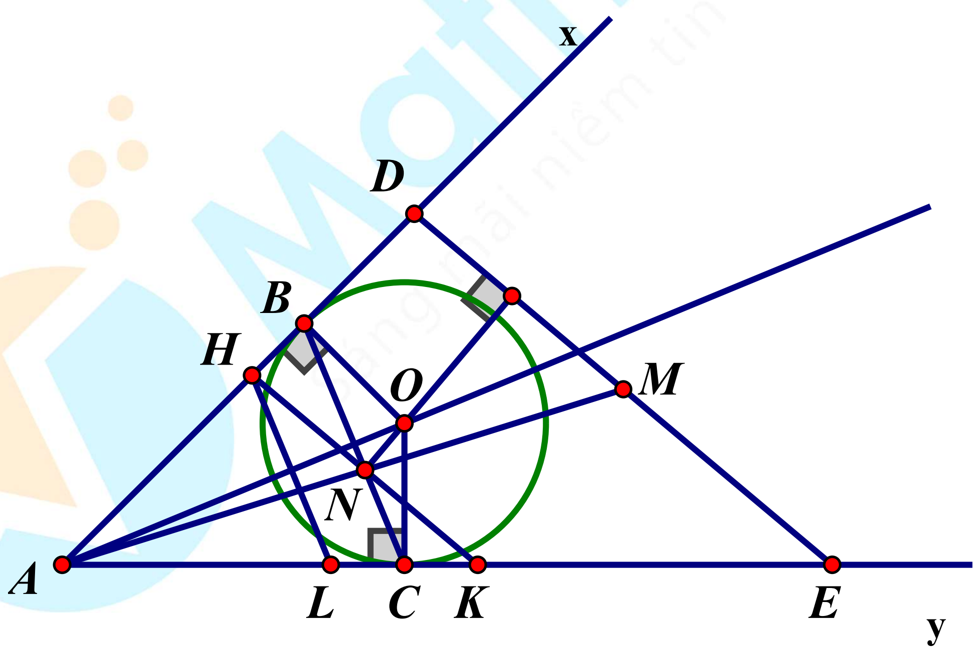
Nhận xét:

Ở ý 4b) có thể xử lí bằng cách sử dụng tính chất KD là phân giác ngoài của góc BKC và sử dụng thêm định lý Menelaus cho tam giác ABC với D, E, F thẳng hàng để thu được $\frac{KB}{KC}=\frac{BE}{CF}$.

Bài 76 (Đề thi vào 10 – Chuyên Toán – THPT LÊ QUÝ ĐÔN TP Đà Nẵng năm học 2024 – 2025):

Trên tia phân giác của góc nhọn xAy lấy điểm O (khác A) và vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các tia Ax, Ay lần lượt tại B, C. Trên các tia Ax, Ay lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $AB < AD < AE$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE. Các đoạn thẳng AM, BC cắt nhau tại N. Chứng minh rằng ON vuông góc với DE.

Lời giải :



Qua N kẻ đường thẳng song song với DE cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại H, K.

Áp dụng bổ đề hình thang với chú ý $HK \,//\, DE$ và M là trung điểm của BC

Ta có: N là trung điểm của HK

Qua H kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng AC tại L

Theo định lý Thales, ta có: $\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{CL}{AC}$

Vì $AB=AC$ nên $BH=CL$

Xét tam giác HKL có N là trung điểm của HK và $CN\,//\,HL$ nên C là trung điểm của KL.

Suy ra $CK=CL=BH$

Từ đó, ta chứng minh được $\Delta OBH=\Delta OCK(c.g.c)$

Suy ra $OH=OK$.

Vì ON là đường trung tuyến của tam giác OHK cân tại O nên $ON\perp HK$

Lại có $HK\,//\,DE$ nên ta suy ra được $ON\perp DE$.

Bài 77 (Đề thi vào 10 – Toán Chung – KHTN Hà Nội năm học 2024 – 2025):

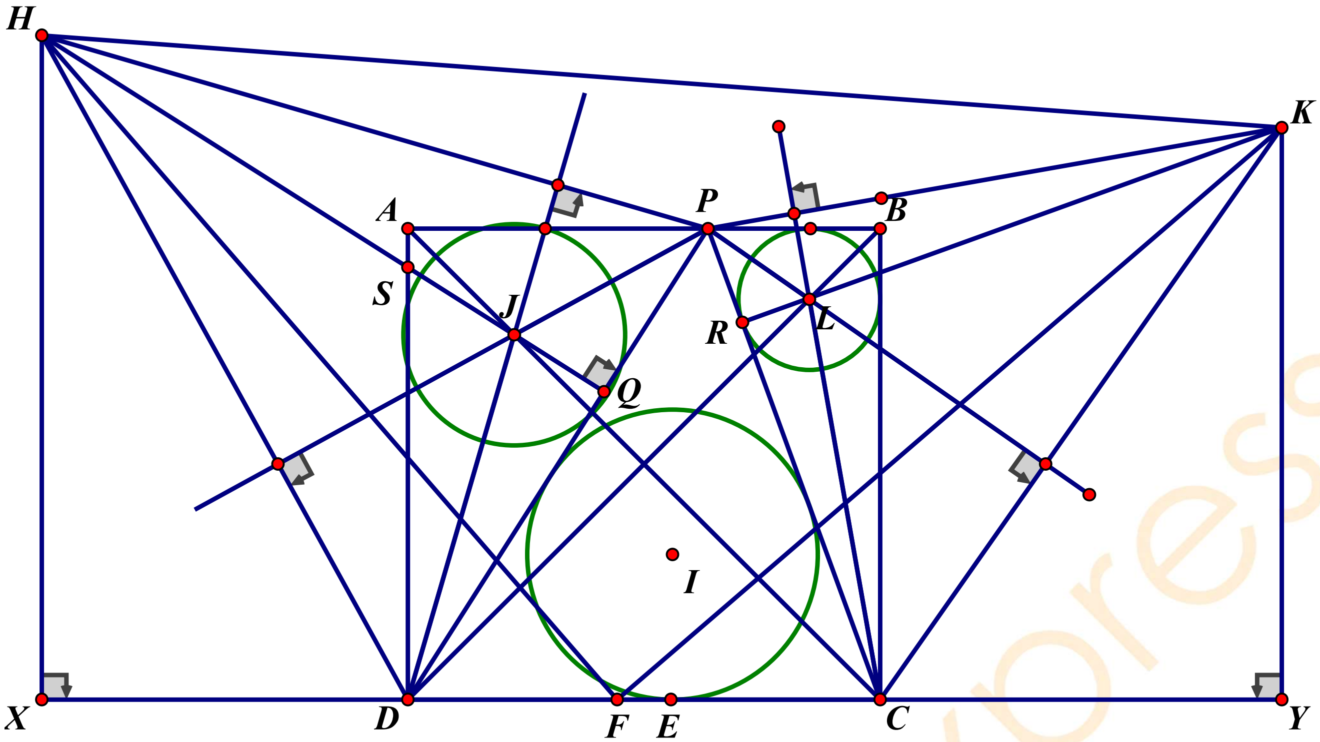
Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm P thuộc cạnh AB (P khác A và B). Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PAD.

a) Chứng minh rằng tứ giác $PJDB$ nội tiếp

b) Gọi H là trực tâm của tam giác PJD, S là giao điểm của JH và AD. Chứng minh rằng $SH=SD$.

c) Gọi L là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác PBC, K là trực tâm của tam giác LPC. Đường tròn nội tiếp của tam giác PCD tiếp xúc CD tại E. Lấy F thuộc đoạn thẳng CD sao cho $CF=DE$. Chứng minh rằng tam giác FHK vuông cân.

Lời giải :



a) Hai tam giác AJD và AJB bằng nhau (c – g – c)

nên $\widehat{ADJ} = \widehat{ABJ} = \widehat{PDJ}$

Từ đó suy ra tứ giác $BDJP$ nội tiếp.

b) Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng PJ và HD

Vì $\widehat{DBP} = 45^\circ$ nên $\widehat{MJD} = 45^\circ$

Suy ra $\widehat{MDJ} = 45^\circ$

Từ đây ta có $\widehat{DHP} = 45^\circ$

Mặt khác, ta lại có $\widehat{JHP} = \widehat{JDP} = \widehat{JDS}$

nên $\widehat{DHP} - \widehat{SHP} = \widehat{MDJ} - \widehat{JDS}$

Từ đó $\widehat{SHD} = \widehat{SDH}$

Suy ra $SH = SD$.

c) Gọi Z là giao điểm của đường thẳng KL và đường thẳng PC

X là giao điểm của đường thẳng HJ và PD

Gọi G, T tương ứng là hình chiếu vuông góc của các điểm H, K trên đường thẳng CD.

Ta có: $\widehat{DHG} = \widehat{SDH} = \widehat{SHD}$

Do đó: $DG = DX = \dfrac{DA + DP - AP}{2}$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng có $CT = CZ = \dfrac{CP + CB - BP}{2}$ và $CF = DE = \dfrac{DC + DP - CP}{2}$

Đến đây, với chú ý tam giác HPD có $\widehat{PHD} = 45^\circ$ và J là trực tâm tam giác, ta dễ dàng chứng minh được $HJ = DP$ (đây là một kết quả quen thuộc)

Lại có: $JX = \dfrac{AP + AD - DP}{2}$ nên $HX = \dfrac{AD + AP + DP}{2} = CF + CT = TF$

Chứng minh tương tự ta có $KT = FG$.

Từ đó, $\Delta GHF \backsim \Delta TFK (c - g - c)$

Từ đây ta dễ dàng suy ta tam giác FHK vuông cân.

Bài 78 (Đề thi vào 10 – Toán Chung – Chuyên Sư phạm Hà Nội năm học 2024 – 2025):

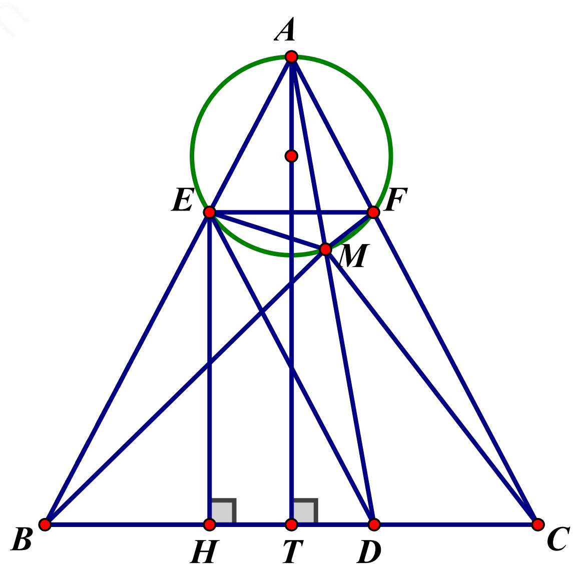
Cho tam giác ABC cân tại A. Lấy D thuộc BC sao cho $DB = 2DC$. Đường thẳng qua D song song với AC cắt AB tại E, đường thẳng qua E song song với BC cắt AC tại F. Đường tròn ngoại tiếp tam giác AFE cắt AD tại M khác A.

a) Chứng minh $BDME$, $CDMF$ là tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $MB = 2MA$

c) Chứng minh $\widehat{BMD} = 2\widehat{CMD}$

Lời giải :



a) Tam giác ABC cân tại A nên $AB = AC$

Vì $EF \,//\, CB$, $AB = AC$ nên $AE = AF \Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{AFE}$

Mà $\begin{cases} \widehat{AEF} = \widehat{ABC} \\ \widehat{AFE} = \widehat{AME} \end{cases} \Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AME}$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BDME$ nội tiếp

Chứng minh tương tự $\widehat{ACB} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{AMF}$ nên $CDMF$ là tứ giác nội tiếp

2) $\widehat{EMB} = \widehat{EDB} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE} = \widehat{AEF} = \widehat{AMF}$

$\Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{EMB} + \widehat{EMA} = \widehat{AMF} + \widehat{EMA} = \widehat{EMF}$

Ta được $\Delta AMB \backsim \Delta FME (g - g)$ vì $\widehat{AMB} = \widehat{FME}, \widehat{EAM} = \widehat{EFM} = \dfrac{1}{2} sd\,\overset{\frown}{EM} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{MF}{ME}$ (a)

Ta lại có: $\Delta AMF \backsim \Delta ACD(g-g)$ vì chung $\widehat{CAD}$ và $\widehat{ACD}=\widehat{AMF} \Rightarrow \dfrac{MF}{CD}=\dfrac{AM}{AC}$ (2)

$\Delta AME \backsim \Delta ABD(g-g)$ vì chung $\widehat{BAD}$ và $\widehat{ABC}=\widehat{AME} \Rightarrow \dfrac{ME}{BD}=\dfrac{AM}{AB}$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra $\dfrac{MF}{CD}=\dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{ME}{BD} \Rightarrow \dfrac{MF}{ME}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{1}{2}$

Thay vào (a) ta được $\dfrac{MA}{MB}=\dfrac{1}{2}$

3) Vẽ đường cao AT ta được $\dfrac{AF}{AC}=\dfrac{1}{3}=\dfrac{TD}{TC} \Rightarrow FD \perp BC, \Delta EBD$ cân. Lấy H là trung điểm BD

Ta có: $\Delta EHD=\Delta FDC(c.c.c) \Rightarrow \widehat{HED}=\widehat{DFC}$

$$\begin{cases} \widehat{DFC}=\dfrac{1}{2}\widehat{BED} \\ \widehat{DFC}=\widehat{DMC} \\ \widehat{BED}=\widehat{BMD} \end{cases} \Rightarrow \widehat{DMC}=\dfrac{1}{2}\widehat{BMD} \Rightarrow \widehat{BMD}=2\widehat{CMD} \text{ (điều phải chứng minh)}$$

Bài 79 (Đề thi vào 10 – Toán Chung – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025):

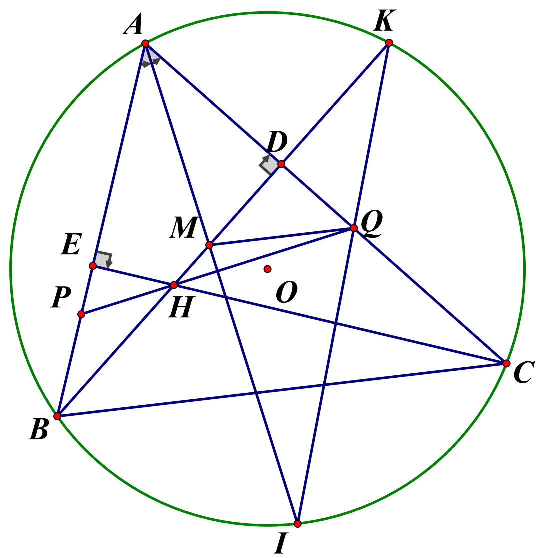
Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC $(AB < AC)$. Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H $(D \in AC, E \in AB)$. Tia phân giác của góc BAC cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) lần lượt tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q.

a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp.

b) Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng QH và AB. Chứng minh đường thẳng MQ song song với đường thẳng BC và AI là đường trung trực của PQ.

c) Đặt $BC=x$, $DE=y$. Tính độ dài đoạn thẳng MQ theo x, y.

Lời giải :



a) Do BD và CE là đường cao của tam giác ABC nên $CE \perp AB, BD \perp AC \Rightarrow \widehat{CEQ} = \widehat{BDA} = 90^\circ$

Xét tứ giác $AEHD$ có: $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện suy ra tứ giác $AEHD$ nội tiếp.

b) Ta có: $\widehat{AMK} = \dfrac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{AK} + sd\,\overset{\frown}{BI})$ và $\widehat{AQK} = \dfrac{1}{2}(sd\,\overset{\frown}{AK} + sd\,\overset{\frown}{CI})$

Mà $sd\,\overset{\frown}{BI} = sd\,\overset{\frown}{CI}$ (do AI là phân giác của góc BAC) $\Rightarrow \widehat{AMK} = \widehat{AQK}$

Mà hai góc này ở vị trí kề nhau, cùng nhìn AK dưới hai góc bằng nhau

Nên A, M, Q, K cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow \widehat{KMQ} = \widehat{KAQ}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KQ)

Mà $\widehat{KAQ} = \widehat{KAC} = \widehat{KBC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC) $\Rightarrow \widehat{KMQ} = \widehat{KBC} (= \widehat{KAC})$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MQ \,//\, BC$

Tam giác ABC có H là trực tâm nên $AH \perp BC$

Do $MQ \,//\, BC$ nên $MQ \perp AH$

Xét tam giác AHQ có HD, MQ là đường cao cắt nhau tại M

$\Rightarrow$ M là trực tâm của tam giác $AHQ \Rightarrow AM \perp HQ$

Tam giác APQ có AM vừa là đường cao vừa là phân giác nên đồng thời là trung trực.

Chứng tỏ AI là trung trực của PQ.

c) Xét tam giác ADE và tam giác ABC có

$\widehat{BAC}$ chung

$\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$ (góc ngoài đỉnh đối diện tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta ADE \backsim \Delta ABC(g.g) \Rightarrow \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{y}{x}$

Ta có: $\dfrac{DM}{MB} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{DM}{BD} = \dfrac{y}{x+y}$

Do $MQ \,//\, BC \Rightarrow \dfrac{MQ}{BC} = \dfrac{DM}{DB} \Rightarrow \dfrac{MQ}{x} = \dfrac{y}{x+y} \Rightarrow MQ = \dfrac{xy}{x+y}$

Bài 80 (Đề thi vào 10 – Toán Chung – THPT Chuyên Lam Sơn Thanh Hóa năm học 2024 – 2025):

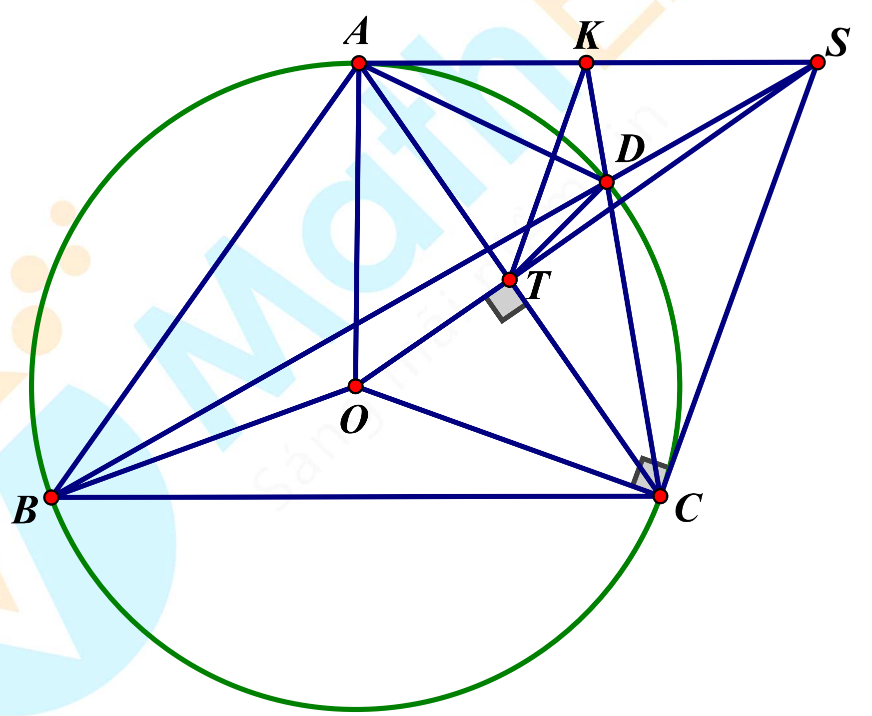
Cho tam giác ABC cân tại A, $\widehat{BAC} < 90^\circ$ nội tiếp đường tròn (O). Tiếp tuyến tại A và C cắt nhau tại S. SB cắt (O) tại D. CD cắt SA tại K.

a) Chứng minh rằng $AS//BC$ và $KA^2 = KD \cdot KC$.

b) Chứng minh rằng hai tam giác KSD và KCS đồng dạng và K là trung điểm AS.

c) Chứng minh rằng $AC^2 = 2CD \cdot CK$ và $BD = 2CD$.

Lời giải :



a) Ta có $\widehat{SAC} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ nên $AS//BC$.

Ta có $\widehat{KAD} = \widehat{KCA}$ nên hai tam giác KAD và KCA đồng dạng, suy ra $\dfrac{KA}{KC} = \dfrac{KD}{KA}$, dẫn đến

$KA^2 = KD \cdot KC$.

b) Ta có $\widehat{KSB} = \widehat{SBC} = \widehat{KCS}$ nên suy ra hai tam giác KSD và KCS đồng dạng, kéo theo $\frac{KS}{KC} = \frac{KD}{KS}$, thu được $KS^2 = KC \cdot KD$. Kết hợp câu a, ta được $KS^2 = KC \cdot KD = KA^2$, hay $KS = KA$

.

c) Gọi T là trung điểm của AC. Ta có TK là đường trung bình của tam giác ACS nên $TK // CS$, kết hợp với hai tam giác KAD và KCA đồng dạng, ta có: $\widehat{KDA} = \widehat{KAC} = \widehat{SCA} = \widehat{KTA}$.

Suy ra tứ giác $AKDT$ nội tiếp, dẫn đến $CD \cdot CK = CT \cdot CA = \frac{1}{2}CA^2$, hay $AC^2 = 2CD \cdot CK$

Sử dụng định lý Thales, ta có $\frac{BD}{CD} = \frac{SD}{KD}$. Hơn nữa, hai tam giác KSD và KCS đồng dạng nên $\frac{SD}{KD} = \frac{SC}{KS}$. Chú ý rằng $SA = SC$, ta có: $\frac{BD}{CD} = \frac{SD}{KD} = \frac{SC}{KS} = \frac{SA}{KS} = 2$

Vậy $BD = 2CD$.

----------------------------HẾT------------------------