HỆ THỐNG GIÁO DỤC ARCHIMEDES SCHOOL

ĐỀ TOÁN NÂNG CAO *(Đề chính thức)*

Năm học: 2025 – 2026 Thời gian: 120 phút

Dưới đây là các bài toán trong đề thi được ghi lại theo trí nhớ của học sinh, thứ tự câu hỏi có thể đã được thay đổi

I, Trắc nghiệm

Câu 1. Tính giá trị biểu thức

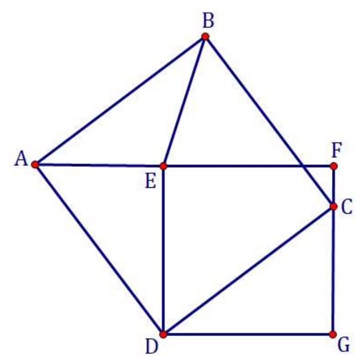
$$A = \frac{3}{1\times 2} - \frac{5}{2\times 3} + \frac{7}{3\times 4} - \frac{9}{4\times 5} + \frac{11}{5\times 6} - \frac{13}{6\times 7} + \frac{15}{7\times 8} - \frac{17}{8\times 9} + \frac{19}{9\times 10}$$

Câu 2. Lớp 6C1 có 16 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Lý và 11 học sinh giỏi Sinh. Biết có 9 học sinh giỏi Toán và Lý, 6 học sinh giỏi Lý và Sinh, 8 học sinh giỏi Sinh và Toán và chỉ có 11 học sinh giỏi cả 2 môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 1 môn?

Câu 3. Cho ABCD và DEFG là hình vuông.

Biết $S_{ABE} = 13cm^2$ và $S_{DEFG} = 32cm^2$.

Tính diện tích hình vuông ABCD.



Câu 4. Mật mã Archimedes là mật mã có 7 chữ số với số số tự nhiên giống nhau sẽ bằng giá trị của một số tự nhiên đó. Ví dụ: 1666666 là mật mã của Archimedes vì chữ số 1 xuất hiện 1 lần, chữ số 6 xuất hiện 6 lần; 3344443 cũng là mật mã vì chữ số 3 xuất hiện 3 lần và chữ số 4 xuất hiện 4 lần. Hỏi có bao nhiêu mật mã của Archimedes?

II, Tự luận

Câu 5. Có $A = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times 2025$ và $B = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (có 2025 chữ số 2). Hãy tìm chữ số tận cùng của A + B.

Câu 6. Có $\overline{ARCARC} \times 8 = \overline{FUNFUN}$. $\overline{ARC}$ là giá trị lớn nhất có thể. Biết A, R, C, F, U, N đều khác nhau. Hãy tìm A + R + C + F + U + N?

Câu 7. Có bao nhiêu số có 10 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3. Biết 2 số đứng cạnh nhau hơn kém nhau 1 đơn vị.

Câu 8. Tính giá trị biểu thức.

$$M=\frac{2+3+4+...+100}{1}+\frac{3+4+...+100}{1+2}+...+\frac{100}{1+2+3+...+99}.$$

Câu 9. Có 100 học sinh tham gia 1 cuộc thi Toán với 4 câu hỏi. Có 90 bạn làm đúng câu 1, 85 bạn làm đúng câu 2, 80 bạn làm đúng câu 3 và 75 bạn làm đúng câu 4. Có ít nhất bao nhiêu bạn làm đúng 4 câu?

Câu 10. Có tồn tại hay không 5 số tự nhiên mà tổng của lần lượt 3 số tự nhiên bất kì là các số tự nhiên liên tiếp?

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

I, Trắc nghiệm

Câu 1. Tính giá trị biểu thức

$$A=\frac{3}{1\times 2}-\frac{5}{2\times 3}+\frac{7}{3\times 4}-\frac{9}{4\times 5}+\frac{11}{5\times 6}-\frac{13}{6\times 7}+\frac{15}{7\times 8}-\frac{17}{8\times 9}+\frac{19}{9\times 10}$$

Hướng dẫn:

$$A=\frac{3}{1\times 2}-\frac{5}{2\times 3}+\frac{7}{3\times 4}-\frac{9}{4\times 5}+\frac{11}{5\times 6}-\frac{13}{6\times 7}+\frac{15}{7\times 8}-\frac{17}{8\times 9}+\frac{19}{9\times 10}$$

$$A=\frac{1+2}{1\times 2}-\frac{2+3}{2\times 3}+\frac{3+4}{3\times 4}-\frac{4+5}{4\times 5}+\frac{5+6}{5\times 6}-\frac{6+7}{6\times 7}+\frac{7+8}{7\times 8}-\frac{8+9}{8\times 9}+\frac{9+10}{9\times 10}$$

$$A=\left(1+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)-\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)$$

$$A=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$$

$$A=1+\frac{1}{10}$$

$$A=\frac{11}{10}.$$

Câu 2. Lớp 6C1 có 16 học sinh giỏi Toán, 15 học sinh giỏi Lý và 11 học sinh giỏi Sinh. Biết có 9 học sinh giỏi Toán và Lý, 6 học sinh giỏi Lý và Sinh, 8 học sinh giỏi Sinh và Toán và chỉ có 11 học sinh giỏi cả 2 môn. Hỏi có bao nhiêu học sinh chỉ giỏi 1 môn?

Hướng dẫn:

+) Tìm số học sinh giỏi cả 3 môn

Số học sinh giỏi cả 3 môn được đếm trong cả số học sinh giỏi Toán và Lý; số học sinh giỏi Lý và Sinh; số học sinh giỏi Toán và Sinh. Như vậy, số học sinh này được tính 3 lần.

Do đó, số học sinh giỏi cả 3 môn là:

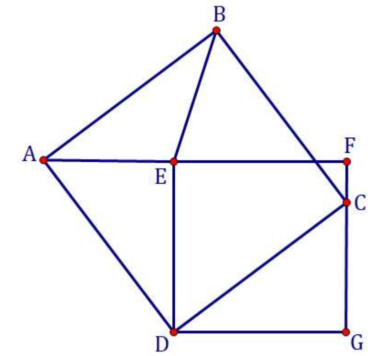
(9 + 6 + 8 – 11) : 3 = 4 (học sinh).

+) Tính số học sinh chỉ giỏi một môn

Số học sinh chỉ giỏi một môn là: 16 + 15 + 11 – 11 × 2 – 4 × 3 = 8 (học sinh)

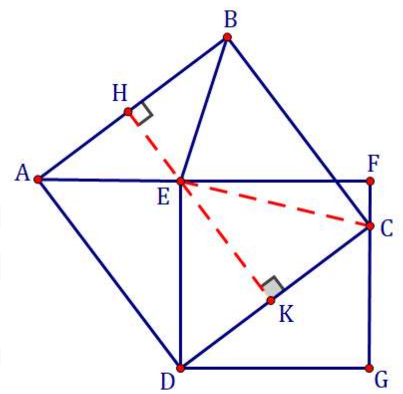
Đáp số: 8 học sinh.

Câu 3. Cho ABCD và DEFG là hình vuông. Biết $S_{ABE} = 13cm^2$ và $S_{DEFG} = 32cm^2$. Tính diện tích hình vuông ABCD.



Hướng dẫn:

Nối E với C. Kẻ HK qua E vuông góc với cả AB và CD.



Ta có:

$$S_{CED} = \frac{1}{2}S_{DEFG} = 32:2 = 16\ (cm^2)$$

$$S_{AEB} + S_{CED} = \frac{1}{2}\times AB \times EH + \frac{1}{2}\times CD \times EK$$
$$= \frac{1}{2}\times AB \times EH + \frac{1}{2}\times AB \times EK$$
$$= \frac{1}{2}\times AB \times (EH + EK) = \frac{1}{2}\times AB \times HK = \frac{1}{2}\times S_{ABCD}$$

Do đó: $S_{ABCD} = 2\times\left(S_{AEB} + S_{CED}\right) = 2\times(13+16) = 58\ (cm^2)$.

Đáp số: $58cm^2$.

Câu 4. Mật mã Archimedes là mật mã có 7 chữ số với số số tự nhiên giống nhau sẽ bằng giá trị của một số tự nhiên đó. Ví dụ: 1666666 là mật mã của Archimedes vì chữ số 1 xuất hiện 1 lần, chữ số 6 xuất hiện 6 lần; 3344443 cũng là mật mã vì chữ số 3 xuất hiện 3 lần và chữ số 4 xuất hiện 4 lần. Hỏi có bao nhiêu mật mã của Archimedes?

Hướng dẫn:

Vì mật mã của Archimedes gồm 7 số và số lượng số tự nhiên có trong mật mã sẽ bằng giá trị của số đó nên mật mã của Archimedes không chứa các chữ số 0, 8 và 9.

- Nếu mật mã của Archimedes chứa chữ số 7. Khi đó mật mã là 7777777. Ta tạo được 1 mật mã Archimedes.

- Nếu mật mã của Archimedes chứa chữ số 6. Khi đó các số trong mật mã bao gồm 6 chữ số 6 và một chữ số 1. Ta tạo được 7 mật mã Archimedes.

- Nếu mật mã của Archimedes chứa chữ số 5. Khi đó mật mã tạo được sẽ bao gồm 5 chữ số 5 và 2 chữ số 2. Số lượng mật mã tạo được bằng cách:

Xếp số 2 đầu tiên vào một trong bảy vị trí có 7 cách, xếp số 2 còn lại vào một trong sáu vị trí còn lại có 6 cách. Mỗi trường hợp lặp lại 2 lần.

Tổng số mật mã tạo được là: 6 × 7 : 2 = 21 (mật mã).

- Nếu mật mã của Archimedes chứa chữ số 4. Khi đó mật mã tạo được bao gồm 4 chữ số 4 và 3 chữ số 3 hoặc 4 chữ số 4, 1 chữ số 1 và 2 chữ số 2.

+) Mật mã tạo được bao gồm 4 chữ số 4 và 3 chữ số 3. Số lượng mật mã tạo được bằng cách:

Xếp số 3 đầu tiên vào một trong bảy vị trí có 7 cách, xếp số 3 thứ hai vào một trong sáu vị trí còn lại có 6 cách, xếp số 3 còn lại vào một trong 5 vị trí còn lại có 5 cách. Mỗi trường hợp lặp lại 6 lần.

Tổng số mật mã tạo được là: $5 \times 6 \times 7 : 6 = 35$ (mật mã)

+) Mật mã tạo được bao gồm 4 chữ số 4, 1 chữ số 1 và 2 chữ số 2. Số lượng mật mã tạo được bằng cách:

Xếp số 1 đầu tiên vào một trong bảy vị trí có 7 cách, xếp số 2 thứ nhất vào một trong 6 vị trí còn lại có 6 cách, xếp số 2 thứ hai vào một trong 5 vị trí còn lại có 5 cách. Mỗi trường hợp lặp lại 2 lần.

Tổng số mật mã tạo được là: $7 \times 6 \times 5 : 2 = 105$ (mật mã)

Vậy tổng số mật mã Archimedes tạo được là: $1 + 7 + 21 + 35 + 105 = 169$ (mật mã).

II, Tự luận

Câu 5. Có $A = 1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times 2025$ và $B = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2$ (có 2025 chữ số 2). Hãy tìm chữ số tận cùng của A + B.

Hướng dẫn:

+) Nhận xét: Các thừa số của A đều là số lẻ mà số 5 nhân với số lẻ nào cũng có chữ số tận cùng là 5 nên A có chữ số tận cùng là 5.

+) Ta có: Tích của 4 số 2 là: $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$, có chữ số tận cùng là 6.

$$\overline{\ldots6} \times \overline{\ldots6} = \overline{\ldots6}.$$

Lại có: $2025 : 4 = 506$ (dư 1). Do đó:

$B = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2$

$B = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times \ldots \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 2$ (có 506 nhóm $(2 \times 2 \times 2 \times 2)$)

$B = \overline{\ldots6} \times \ldots \times \overline{\ldots6} \times 2$

$B = \overline{\ldots2}$

Do đó, B có chữ số tận cùng là 2.

Vậy A + B có chữ số tận cùng là 7.

Câu 6. Có $\overline{ARCARC}\times 8=\overline{FUNFUN}$. $\overline{ARC}$ là giá trị lớn nhất có thể. Biết A, R, C, F, U, N đều khác nhau. Hãy tìm A + R + C + F + U + N?

Hướng dẫn:

Ta có:

$\overline{ARCARC}\times 8=\overline{FUNFUN}$

$\overline{ARC}\times 1001\times 8=\overline{FUN}\times 1001$

$\overline{ARC}\times 8=\overline{FUN}$

Vì $\overline{FUN}<1000$ nên $\overline{ARC}\times 8<1000$. Hay $\overline{ARC}\times 8<125\times 8$. Suy ra $\overline{ARC}<125$.

Do đó $\overline{ARC}$ lớn nhất có thể là 124.

+ Nếu $\overline{ARC}$ = 124 ta có:

124124 × 8 = 992992 (không thoả mãn A, R, C, F, U, N đều khác nhau) → Loại.

+ Nếu $\overline{ARC}$ = 123 ta có:

123123 × 8 = 984984 (thoả mãn A, R, C, F, U, N đều khác nhau).

Vậy A + R + C + F + U + N = 1 + 2 + 3 + 9 + 8 + 4 = 27.

Câu 7. Có bao nhiêu số có 10 chữ số được lập từ các chữ số 1, 2, 3. Biết 2 số đứng cạnh nhau hơn kém nhau 1 đơn vị.

Hướng dẫn:

+) Trường hợp 1: Chữ số đầu tiên là 2.

Như vậy các chữ số thứ hai, bốn, sáu, tám, mười phải là 1 hoặc 3 và các chữ số thứ ba, năm , bảy, chín phải là 2.

Như vậy có 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32 số thỏa mãn đề bài.

+) Trường hợp 2: Chữ số đầu tiên là 1 hoặc 3.

Khi đó các chữ số thứ ba, năm, bảy, chín phải là 1 hoặc 3 và các chữ số thứ hai, bốn, sáu, tám, mười phải là 2.

Như vậy có 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32 số thỏa mãn đề bài.

Vậy có tổng cộng 32 + 32 = 64 số thỏa mãn đề bài.

Câu 8. Tính giá trị của biểu thức.

$$M=\frac{2+3+4+...+100}{1}+\frac{3+4+...+100}{1+2}+...+\frac{100}{1+2+3+...+99}.$$

Hướng dẫn:

M= $\frac{2+3+4+...+100}{1}+\frac{3+4+...+100}{1+2}+...+\frac{100}{1+2+3+...+99}$.

Ta có: $\frac{2+3+4+...+100}{1}=\frac{1+2+3+...+100}{1}-\frac{1}{1}=\frac{1+2+3+...+100}{1}-1$

$\frac{3+4+...+100}{1+2}=\frac{1+2+3+...+100}{1+2}-\frac{1+2}{1+2}=\frac{1+2+3+...+100}{1+2}-1$

...

$\frac{100}{1+2+3+...+99}=\frac{1+2+3+...+100}{1+2+3+...+99}-\frac{1+2+3+...+99}{1+2+3+..+99}=\frac{1+2+3+...+100}{1+2+3+...+99}-1$

Suy ra, $M=\left(\frac{1+2+3+...+100}{1}-1\right)+\left(\frac{1+2+3+...+100}{1+2}-1\right)+...+\left(\frac{1+2+3+..+100}{1+2+3+...+99}-1\right)$

$M=\left(\frac{1+2+3+...+100}{1}+\frac{1+2+3+...+100}{1+2}+...+\frac{1+2+3+...+100}{1+2+3+...+99}\right)-99$.

$M=(1+2+3+...+100)\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+...+\frac{1}{1+2+3+...+99}\right)-99$

$M=\frac{100\times101}{2}\times\left(1+\frac{1}{\frac{2\times3}{2}}+\frac{1}{\frac{3\times4}{2}}+...\frac{1}{\frac{99\times100}{2}}\right)-99$

$M=\frac{100\times101}{2}\times\left(1+\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+...+\frac{2}{99\times100}\right)-99$

$M=100\times101\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+...+\frac{1}{99\times100}\right)-99$

$M=100\times101\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+...+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)-99$

$M=100\times101\times\left(1-\frac{1}{100}\right)-99$

$M=100\times101\times\frac{99}{100}-99$

$M=101\times99-99=9900$.

Câu 9. Có 100 học sinh tham gia 1 cuộc thi Toán với 4 câu hỏi. Có 90 bạn làm đúng câu 1, 85 bạn làm đúng câu 2, 80 bạn làm đúng câu 3 và 75 bạn làm đúng câu 4. Có ít nhất bao nhiêu bạn làm đúng 4 câu?

Hướng dẫn:

Ta có: Tổng số học sinh là 100 và số học sinh làm đúng mỗi câu như sau:

- 90 học sinh làm đúng câu 1, có thể có tối đa 10 học sinh không làm đúng câu 1.
- 85 học sinh làm đúng câu 2, có thể có tối đa 15 học sinh không làm đúng câu 2.
- 80 học sinh làm đúng câu 3, có thể có tối đa 20 học sinh không làm đúng câu 3.
- 75 học sinh làm đúng câu 4, có thể có tối đa 25 học sinh không làm đúng câu 4.

Vậy số học sinh tối đa không làm đúng ít nhất một câu là:

10 + 15 + 20 + 25 =70 (học sinh)

Như vậy, có ít nhất số học sinh làm đúng **tất cả 4 câu** là:

100 – 70 = 30 (học sinh)

Đáp số: 30 học sinh.

Câu 10. Có tồn tại hay không 5 số tự nhiên mà tổng của lần lượt 3 số tự nhiên bất kì là các số tự nhiên liên tiếp?

Hướng dẫn:

Giả sử tồn tại 5 số tự nhiên bất kì thoả mãn là a, b, c, d, e.

+) Từ 5 số đó ta tạo được 10 tổng 3 số bất kì.

Tổng của 10 tổng đó = 6 x (a + b + c + d + e)

+) 10 tổng tạo thành 10 số tự nhiên liên tiếp gồm 5 số chẵn, 5 số lẻ nên tổng của 10 tổng này là một số lẻ, không thể là 6 x (a + b + c + d + e) (mâu thuẫn).

Vậy không tồn tại 5 số tự nhiên mà tổng của lần lượt 3 số tự nhiên bất kì là các số tự nhiên liên tiếp.