MỤC LỤC

HỆ THỐNG ĐỀ THI

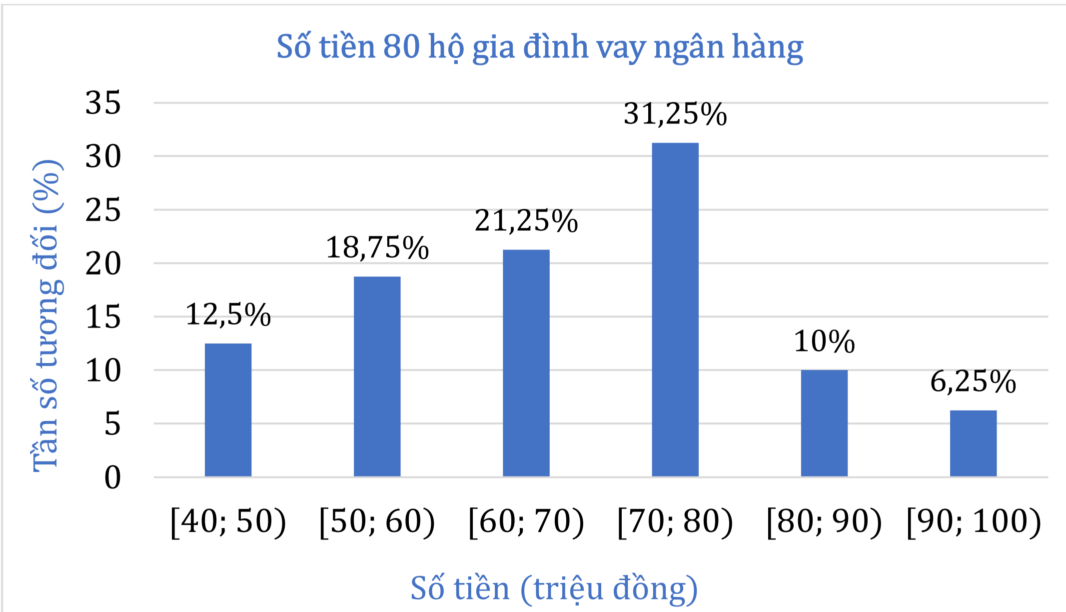
ĐỀ MINH HỌA SỐ 1

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Một ngân hàng thống kê số tiền (đơn vị : triệu đồng) mà 80 hộ gia đình vay để phát triển sản xuất. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm như sau:



Lập bảng tần số ghép nhóm và vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

2) Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là $2\,\text{cm}, 4\,\text{cm}, 6\,\text{cm}, 8\,\text{cm}, 10\,\text{cm}$. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên. Tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành 3 cạnh của một tam giác.

Bài II (1,5 điểm). Cho hai biểu thức $A = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + \dfrac{4}{1-x}$ với $x > 0, x \neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$;

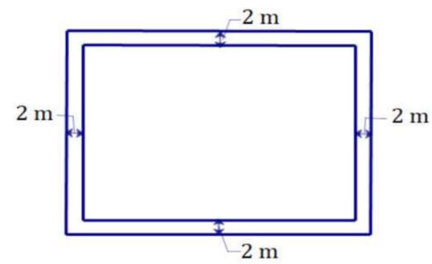
2) Rút gọn biểu thức B;

3) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm các giá trị nguyên của x sao cho $P < \dfrac{5}{2}$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Trong tháng 9, hai tổ sản xuất được 1 100 chi tiết máy. Sang tháng 10, tổ Một sản xuất vượt mức 15% và tổ Hai sản xuất vượt mức 20% so với tháng 9, do đó tháng 10 hai tổ sản xuất được 1 295 chi tiết máy. Hỏi trong tháng 9 mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

2) Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m.

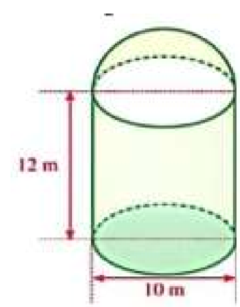


Trong phần đất của vườn, người ta làm một lối đi xung quanh vườn rộng 2m. Phần đất còn lại để trồng trọt có diện tích là 4256m² . Tính chiều dài, chiều rộng của khu vườn.

3) Cho phương trình bậc hai $x^2-5x+3=0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính $T=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một kho chứa ngũ cốc có dạng một hình trụ và một mái vòm có dạng nửa hình cầu. Phần hình trụ có đường kính đáy là 10 m và chiều cao là 12 m. Phần mái vòm là nửa hình cầu đường kính 10 m (xem hình vẽ minh họa bên).



a) Hỏi dung tích của kho đó là bao nhiêu mét khối (*bỏ qua bề dày của tường nhà kho và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).
b) Để đảm bảo ngũ cốc trong kho không bị mốc người ta sơn mặt bên trong kho (bao gồm cả mặt đáy của kho).
Biết tiền công là 30000 đồng/m². Hỏi số tiền công cần phải trả là bao nhiêu? (*diện tích cần sơn làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị mét vuông*).

2) Cho tam giác ABC ($AB > AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao CE của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại M $(M \neq C)$. Gọi I là trung điểm của MB. Kẻ đường thẳng vuông góc với OE tại E cắt AC tại P, cắt MB tại Q.

a) Chứng minh bốn điểm O, I, Q, E cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh $MB.EC = AC.EB$;

c) Chứng minh $OP = OQ$.

Bài V (0,5 điểm). Đón đầu xu thế bảo vệ môi trường, một cửa hàng bán xe máy đã tập trung kinh doanh xe máy điện với chi phí nhập vào mỗi chiếc là 15 triệu đồng và bán ra với giá 19 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng khách mua trong một tháng là 50 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn lượng tiêu thụ, cửa hàng dự định giảm giá bán và ước tính rằng: mỗi khi giá bán giảm 100 nghìn đồng/1 chiếc thì lượng xe bán ra trong tháng tăng thêm 5 chiếc. Vậy cửa hàng nên định giá mới bao nhiêu để sau khi thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 2

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Thống kê số quyển sách quyên góp ủng hộ thư viện nhà trường của 100 học sinh khối 9 như sau:

50	38	35	38	50	38	27	38	47	27	27	35	38	32	38	32	35	32	35	32
38	38	35	32	35	38	38	50	32	47	27	38	35	27	47	35	38	38	32	35
35	35	27	32	38	35	32	32	38	32	38	35	27	38	27	38	27	32	38	38
38	32	38	32	35	27	35	38	32	27	50	32	27	35	47	32	38	27	32	32
38	27	35	38	35	47	35	38	35	38	35	35	35	35	35	27	50	38	32	38

Trong 100 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau? Lập bảng tần số của mẫu số liệu trên.

2) Trong một chiếc hộp kín có 4 chiếc thẻ cùng loại ghi lần lượt các số 2, 4, 6, 8. Bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một chiếc thẻ ra khỏi hộp (không trả lại hộp), sau đó bạn Cường lấy ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong ba chiếc thẻ còn lại. Quan sát số trên hai chiếc thẻ mà hai bạn lấy được. Tính xác suất của biến cố A: “Bạn Hùng lấy được chiếc thẻ ghi số 8”.

Bài II (1,5 điểm). Cho biểu thức $E=\left(\dfrac{x+\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$.

1) Rút gọn biểu thức E;

2) Chứng minh rằng $E<\dfrac{1}{3}$;

3) Tìm x để $E=\dfrac{3}{4\sqrt{x}+1}$.

Bài III (2,5 điểm).

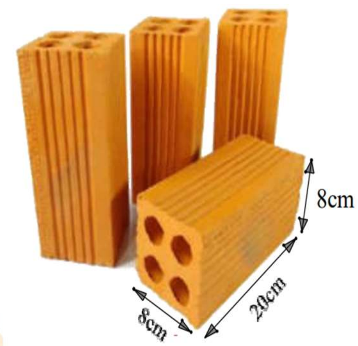
1) Trong một đợt khuyến mãi, siêu thị giảm giá cho mặt hàng A là 20% và mặt hàng B là 15% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B phải trả số tiền là $362\ 000$ đồng. Nhưng nếu mua trong khung giờ vàng thì món hàng A được giảm giá 30% còn món hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết. Một người mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên chỉ trả số tiền là $552\ 000$ đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng A và B.

2) Một người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B. Sau đó 16 phút có một ô tô đi từ tỉnh B về tỉnh A với tốc độ lớn hơn tốc độ của xe máy là 15 km/h. Xe máy gặp ô tô ở một địa điểm cách tỉnh B 24 km. Tính tốc độ của ô tô, biết rằng quãng đường AB dài 54 km.

3) Cho phương trình bậc hai $4x^2-2x-1=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $P=\left(x_1-x_2\right)^2-x_1x_2$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Gạch ống là một sản phẩm được tạo hình thành từ đất sét và nước, được kết hợp lại với nhau theo một công thức chung hợp lý mới có thể tạo ra hỗn hợp dẻo quánh, sau đó chúng được đổ vào khuôn, rồi đem phơi hoặc sấy khô và cuối cùng là đưa vào lò nung. Một viên gạch hình hộp chữ nhật có kích thước dài 20 cm, rộng 8 cm, cao 8 cm. Bên trong có bốn lỗ hình trụ bằng nhau có đường kính 2,5 cm.



a) Tính thể tích đất sét để làm một viên gạch (lấy $\pi=3{,}14$).

b) Theo tính toán ban đầu, bác Thanh muốn xây một ngôi nhà phải mua 10 000 viên gạch, giá một viên là 1 100 đồng. Nhưng khi thi công, bác Thanh phải mua dư 2% số gạch cần dùng dự phòng cho hư hao. Tính số tiền bác Thanh mua gạch để xây ngôi nhà.

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (Ax, By và nửa đường tròn nằm cùng phía so với AB). Trên nửa đường tròn, lấy điểm C ($C \neq A, C \neq B$). Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C cắt Ax, By lần lượt tại các điểm D, E. Kẻ đường cao CH của tam giác ABC.

a) Chứng minh tứ giác $OBEC$ là tứ giác nội tiếp;

b) Gọi K là giao điểm của CH và BD. Chứng minh $\widehat{AHD}=\widehat{BHE}$;

c) Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh $AM \,//\, HE$.

Bài V (0,5 điểm). Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tour 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour là bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt là lớn nhất.

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 3

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 04/2024 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên. Tìm tần số và tần số tương đối của số cuộc gọi nhiều nhất trong một ngày. (*kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị*)

2) Những tháng đầu năm sau dịp Tết Nguyên Đán, nhiều địa phương trong nước thường tổ chức các lễ hội. Do thắng trong một trò chơi ở lễ hội làng mình, bạn Đạt được tham gia quay một lần trong trò chơi "Vòng quay may mắn". Biết vòng quay được chia thành 15 hình quạt tròn như nhau và mỗi hình quạt tròn có ghi các điểm số từ 10 điểm đến 50 điểm (*như hình bên*). Tính xác suất của biến cố A: "Bạn Đạt quay được vào ô ít nhất 30 điểm". (*Biết mỗi lần quay thì mũi tên chỉ rơi vào đúng một trong các hình quạt nhỏ trong số 15 hình quạt trên*)

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x>0; x\neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x=9$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Cho $P=\dfrac{B}{A}$. Tìm x để $|P|+P=0$.

Bài III (2,5 điểm).

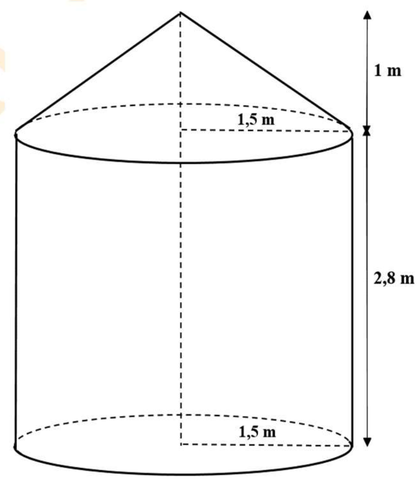
1) Khi mới nhận lớp 9A, cô giáo chủ nhiệm dự định chia lớp thành 4 tổ có số học sinh như nhau. Nhưng sau khi khai giảng xong có 4 bạn học sinh chuyển đi. Do đó, cô giáo chủ nhiệm thay đổi phương án và chia đều số học sinh còn lại thành 3 tổ. Hỏi lớp 9A hiện có bao nhiêu học sinh? Biết rằng so với phương án dự định ban đầu, số học sinh mỗi tổ hiện tại nhiều hơn 2 học sinh.

2) Trong tháng đầu, hai đội thợ mỏ khai thác được 440 tấn than. Sang tháng thứ hai, đội I làm vượt mức 20%, đội 2 làm vượt mức 15% so với tháng đầu. Vì vậy, tháng thứ hai cả 2 đội đã khai thác được 516 tấn than. Tính khối lượng than mà mỗi đội đã khai thác được trong tháng đầu.

3) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x-9=0$ (ẩn x, tham số m). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1<x_2$ và $|x_1|-|x_2|=-6$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một bồn nước được đặt trên mặt đất với cấu tạo gồm phần đỉnh có dạng hình nón và phần thân có dạng hình trụ như hình vẽ. Biết chiều cao của hình nón là 1 m, chiều cao của hình trụ là 2,8 m, bán kính đáy của hình trụ là 1,5 m.



a) Tính thể tích của bồn chứa nước trên (*làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét khối*).

b) Người ta muốn sơn toàn bộ mặt ngoài của bồn chứa nước trên (*không sơn phần đáy bồn đặt trên mặt đất*). Tính diện tích cần sơn (*làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét vuông*).

2) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ hai tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn $(O;R)$ sao cho Ax, By và nửa đường tròn $(O;R)$ nằm cùng phía so với AB. Từ điểm M thuộc nửa đường tròn trên vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By lần lượt tại P và Q.

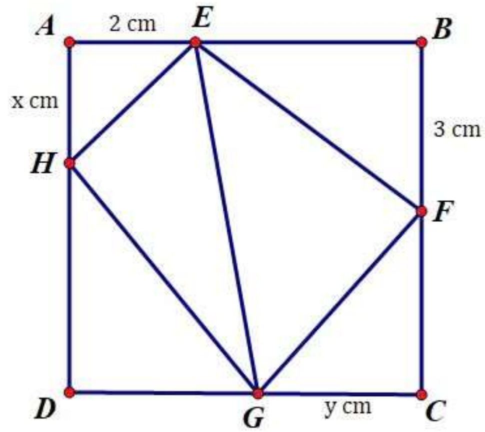
a) Chứng minh bốn điểm A, P, M, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) AM cắt OP tại điểm I, BM cắt OQ tại điểm K. Chứng minh $MIOK$ là hình chữ nhật và tính tích $AP.BQ$ theo R.

c) Gọi N là giao điểm của BP và IK. Chứng minh A, N, Q thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm).

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 6 cm. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x+y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 4

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Trực ban ghi lại số ngày đi làm muộn của các công nhân một phân xưởng trong tháng 10 và tháng 11 ở bảng tần số sau:

Số ngày đi muộn	0	1	2	3	4
Số công nhân trong tháng 10	20	10	6	2	2
Số công nhân trong tháng 11	28	8	4	0	0

Hãy tính tần số tương đối của số ngày đi làm muộn của các công nhân trong tháng 10 và tháng 11.

2) Một túi đựng bốn viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số $1;2;3;4$, hai viên bi khác nhau thì đánh số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai viên bi từ túi, viên bi lấy ra lần đầu không trả lại vào túi. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất để lấy được hai viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x>0;\, x\neq 1;\, x\neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=0,25$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Xét biểu thức $P=\dfrac{B}{A}$. Tìm số nguyên x nhỏ nhất để $\sqrt{P}<\sqrt{2}$.

Bài III (2,5 điểm).

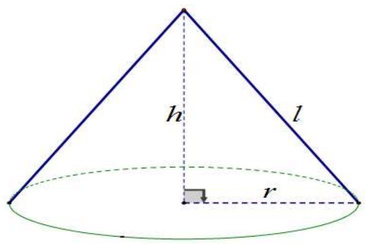
1) Hai đội công nhân cùng làm một công việc trong 24 ngày thì xong. Nếu đội A làm trong 10 ngày và đội B làm trong 12 ngày thì được $\dfrac{9}{20}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong công việc đó trong bao lâu?

2) Một cơ sở sản xuất lập kế hoạch làm 180 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất mỗi ngày tăng thêm 3 sản phẩm, vì thế không những hoàn thành kế hoạch sớm một ngày, mà còn vượt mức 18 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cơ sở phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

3) Cho phương trình bậc hai (ẩn x): $x^2-2(m-1)x-m-3=0$ (1) với m là tham số. Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m và biểu thức $T=x_1(1+x_2)+x_2(1+x_1)$ không phụ thuộc m.

Bài IV (4,0 điểm).

1)



Khung của nón lá có dạng hình nón được làm bởi các thanh gỗ nối từ đỉnh tới đáy như các đường sinh l, 16 vành nón được làm từ những thanh tre mảnh nhỏ, dẻo dai uốn thành những vòng tròn có đường kính to, nhỏ khác nhau, cái nhỏ nhất to bằng đồng xu.

– Đường kính ($d=2r$) của chiếc nón lá khoảng 40 (cm);

– Chiều cao (h) của chiếc nón lá khoảng 19 (cm).

a) Tính độ dài của thanh tre uốn thành vòng tròn lớn nhất của vành chiếc nón lá (*không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ hai*).

b) Tính diện tích phần lá phủ xung quanh của chiếc nón lá (*không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ hai, lấy* $\pi \approx 3{,}14$).

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Kẻ các tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (các tiếp tuyến này cùng phía với nửa đường tròn). Trên nửa đường tròn, lấy điểm C ($C \ne A, C \ne B$). Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C cắt Ax, By lần lượt tại các điểm D, E. Gọi F là giao điểm của đường thẳng BC và tia Ax.

a) Chứng minh tứ giác $OBEC$ là tứ giác nội tiếp;

b) Chứng minh $AD.BE=R^2$ và D là trung điểm của AF;

c) Đoạn thẳng AC cắt OD, OF tương ứng tại H, G; K là giao điểm của AE và OD. Chứng minh GK vuông góc với AB.

Bài V (0,5 điểm). Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E=cv^3t$, trong đó c là hằng số cho trước, E được tính bằng Jun. Hỏi vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 5

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Người ta nghiên cứu về độ bền của hai loại ti vi màn hình phẳng 43 inch của hai hãng sản xuất A và B; thời gian sử dụng của một số chiếc ti vi từ khi mua về đến khi gặp sự cố hỏng hóc đầu tiên được ghi lại ở bảng tần số sau:

Thời gian sử dụng (năm)	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$
Số ti vi của hãng A	6	39	54	30	21
Số ti vi của hãng B	15	75	90	40	30

Hãy tính tần số tương đối của ti vi mỗi hãng theo thời gian sử dụng.

2) Một hộp có 25 quả bóng cùng kích thước được đánh số thứ tự từ 1 đến 25. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp". Tính xác suất của biến cố A: "Lấy được quả bóng được đánh số chia hết cho 3".

Bài II (1,5 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x>0$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$;

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$;

3) Đặt $P=A.B$. Tìm số nguyên x lớn nhất để $\sqrt{2P}<1$.

Bài III (2,5 điểm).

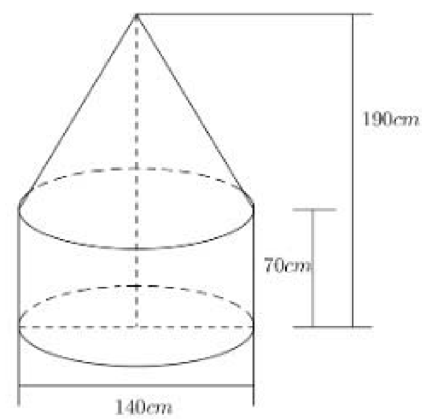
1) Xe máy thứ nhất đi quãng đường từ Hà Nội về Nam Định hết 3 giờ 20 phút. Xe máy thứ hai đi hết 3 giờ 40 phút. Mỗi giờ xe máy thứ nhất đi nhanh hơn xe máy thứ hai là 3 km. Tính tốc độ của mỗi xe máy và quãng đường từ Hà Nội về Nam Định.

2) Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 60 km. Một ca nô đi xuôi dòng từ bến A đến bến B, nghỉ 36 phút rồi đi ngược dòng quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 7 giờ. Tìm tốc độ của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng tốc độ nước chảy là 5 km/h.

3) Cho phương trình bậc hai (ẩn x): $x^2-(4m-1)x+3m^2-2m=0$ với m là tham số. Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m. Tìm m để có $x_1^2+x_2^2=7$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón có cùng đường kính đáy $d=140$ cm, chiều cao hình trụ $h_1=70$ cm, chiều cao của dụng cụ $h=190$ cm (xem hình vẽ bên).



a) Tính thể tích của dụng cụ trên;

b) Tính diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính mặt đáy của dụng cụ).

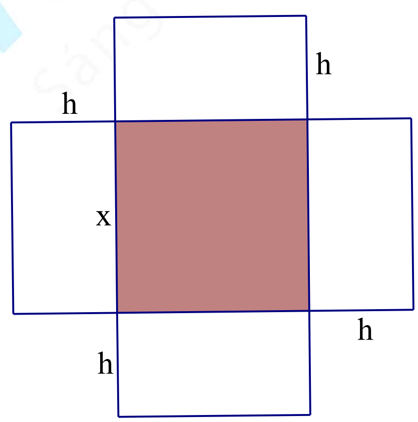
2) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm). Đường thẳng đi qua B vuông góc với OA tại H và cắt đường tròn (O) tại C. Vẽ đường kính BD. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N (M nằm giữa A và N).

a) Chứng minh $CD // OA$;

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) và tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp;

c) Gọi I là trung điểm của HN. Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với BI cắt BM tại E. Chứng minh M là trung điểm của BE.

Bài V (0,5 điểm). Một hộp không nắp được làm từ một mảnh bìa cát-tông theo hình vẽ dưới đây. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao h (cm) và thể tích là 500 (cm³). Tính độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa cát-tông nhất.



-------------------------------------HẾT-------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 6

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Điểm kiểm tra chất lượng môn toán của các học sinh trong một lớp 9 tại một trường THCS được ghi lại ở bảng sau đây:

6	9	8	9	7,5	8,5	6,25	9,25	8	8
7,5	9	9,5	9,25	6,75	8	9	9	8,75	9,5
8,25	7	9,25	6,5	9	6,75	8,5	8	9,25	7,75

Sau khi tổng kết điểm, các học sinh trong lớp được thầy cô xếp loại A, B, C, D theo điểm kiểm tra mà mỗi bạn đạt được như sau:

Điểm kiểm tra (X)	$6 \le X < 7$	$7 \le X < 8$	$8 \le X < 9$	$9 \le X < 10$
Xếp loại	D	C	B	A

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên. Cho biết có bao nhiêu học sinh tham gia làm bài kiểm tra và tính tần số tương đối ghép nhóm của nhóm được xếp loại A?

2) Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần và ghi lại kết quả của mỗi lần gieo. Tính xác suất của biến cố C: "Tích các số chấm thu được trong hai lần gieo xúc xắc là một số chính phương".

Bài II (1,5 điểm). Cho biểu thức $P = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \dfrac{3x+9}{x-9}$ $(x \ge 0;\ x \ne 9)$

1) Rút gọn biểu thức P;

2) Tìm giá trị của x để $P = \dfrac{1}{3}$;

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài III (2,5 điểm).

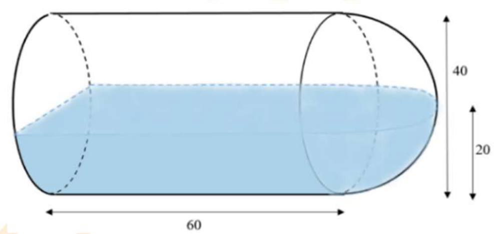
1) Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có tốc độ của dòng nước là 2 km/h. Tính tốc độ của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian tàu đi xuôi dòng ít hơn thời gian tàu đi ngược dòng 1 giờ.

2) Anh Bình đã đến siêu thị để mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện với tổng số tiền theo giá niêm yết là 850 ngàn đồng. Tuy nhiên, thực tế khi trả tiền, nhờ siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của bàn ủi và quạt điện đã được giảm bớt lần lượt là 10% và 20% so với giá niêm yết. Do đó, số tiền anh Bình phải trả ít hơn 125 ngàn đồng nếu mua so với giá niêm yết. Tính giá niêm yết của từng loại sản phẩm mà anh Bình đã mua.

3) Cho phương trình $x^2-(m+2)x+m-3=0$ (ẩn x, tham số m). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2>5$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một bình nước có dạng hình trụ kết hợp với nửa hình cầu có các kích thước (Đơn vị: cm) như hình bên. Khi bình nước nằm ngang, mực nước trong bình cao 20cm.



a) Hỏi thể tích nước trong bình là bao nhiêu lít?
(*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

b) Nếu đặt bình nước thẳng đứng sao cho phần nửa hình cầu ở trên thì chiều cao mực nước trong bình là bao nhiêu centimét? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

2) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi giao điểm của MO và AB là điểm H.

a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ là tứ giác nội tiếp;

b) Đường thẳng vuông góc với OA tại O cắt AB và MB lần lượt tại I, S.

Chứng minh tam giác SOM cân và $SI+SO=MB$;

c) Gọi G là điểm đối xứng với điểm O qua điểm S, MO cắt AG ở E. Chứng minh rằng $EH.EO<EG^2$.

Bài V (0,5 điểm). Một miếng bìa hình tam giác đều ABC, cạnh bằng 16. Học sinh cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M, N thuộc cạnh BC, P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB). Hỏi diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 7

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Nhà máy kiểm tra 100 sản phẩm của một dây chuyền đóng gói kẹo đang trong thời gian chạy thử nghiệm. Tiêu chuẩn là mỗi gói nặng 500 gam. Những gói kẹo có khối lượng chênh lệch không quá 10 gam so với tiêu chuẩn được xem là đạt yêu cầu. Kết quả kiểm tra được thống kê trong bảng sau:

Khối lượng (g)	480	490	495	500	505	520	Tổng
Tần số	2	2	30	46	15	5	N = 100

Cho biết trong 100 gói kẹo được kiểm tra, có bao nhiêu gói đã đạt yêu cầu? Hãy vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn dữ liệu cho trong bảng.

2) Bạn An gieo một đồng xu cân đối, đồng chất và bạn Bình gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất của biến cố E: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 3".

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-6}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x>0; x\neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$;

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$;

3) Tìm x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị là số nguyên tố.

Bài III (2,5 điểm).

1) Một phòng họp ban đầu có 104 ghế được xếp thành các dãy và số ghế trong mỗi dãy đều bằng nhau. Có một lần phòng họp phải cất bớt 2 dãy ghế và mỗi dãy còn lại xếp thêm 1 ghế (số ghế trong các dãy vẫn bằng nhau) để vừa đủ chỗ ngồi cho 120 đại biểu. Hỏi ban đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

2) Một chuyên gia dinh dưỡng đề xuất cho khách hàng một chế độ ăn đặc biệt bao gồm hai loại thực phẩm A và B. Chế độ ăn phải có đúng 350 đơn vị canxi và 180 đơn vị sắt. Số lượng đơn vị của canxi và sắt trong 100 gam thực phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

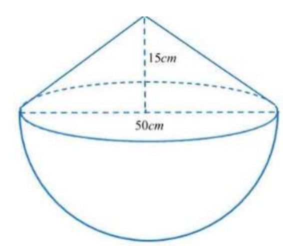
	Thực phẩm A	Thực phẩm B
Canxi	30	10
Sắt	10	10

Hỏi khách hàng trên cần ăn bao nhiêu gam thực phẩm A và B theo chế độ đó ?

3) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ (ẩn x, tham số m). Tìm giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm đối nhau.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Nhà bạn Ánh có một thúng gạo vun đầy. Thúng có dạng nửa hình cầu với đường kính $50\,\text{cm}$, phần gạo vun lên có dạng hình nón cao $15\,\text{cm}$.



a) Tính thể tích phần gạo trong thúng. (*coi bề dày của vỏ thúng không đáng kể*).

b) Nhà bạn Ánh dùng lon sữa bò cũ có dạng hình trụ (bán kính đáy $5\,\text{cm}$, chiều cao $15\,\text{cm}$) để đong gạo mỗi ngày. Biết mỗi ngày nhà bạn Ánh ăn 5 lon gạo và mỗi lần đong thì lượng gạo chiếm 90% thể tích của lon. Hỏi với lượng gạo ở thúng trên thì nhà bạn Ánh có thể ăn nhiều nhất là bao nhiêu ngày?

2) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

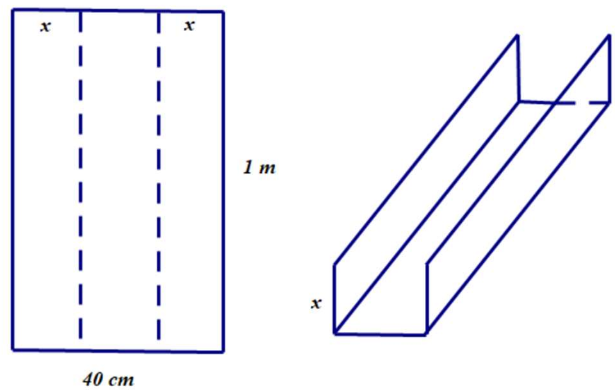
a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

b) Kẻ dây cung CD song song với OA. Chứng minh ba điểm B, O, D thẳng hàng và $BC^2=2AH.CD$

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P nằm giữa A và O).

Chứng minh rằng $\dfrac{1}{PH}-\dfrac{2}{PQ}=\dfrac{1}{PA}$.

Bài V (0,5 điểm). Để xử lí một chiếc máng thoát nước, người thợ từ 1 tấm tôn hình chữ nhật kích thước 1m x 40cm, đánh dấu 2 đường chia và gò lại thành 1 chiếc máng có dạng hình hộp chữ nhật (*thiếu mặt đáy trên và 2 mặt bên*) như hình vẽ.



Em hãy giúp người thợ tìm giá trị của x (đơn vị cm) để thể tích khối hộp chữ nhật là lớn nhất.

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 8

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Bạn Thảo phỏng vấn một số bạn học sinh cùng trường về màu mực mỗi bạn yêu thích nhất. Kết quả được cho ở bảng sau:

Màu mực	Xanh đen	Đen	Tím đậm	Tím hồng
Tần số	18	6	16	10

Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng cột để biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn Thảo.

2) Bạn Tuấn và bạn Hùng cùng chơi cờ và tung một đồng xu (hai mặt đồng xu cân đối và đồng chất) để biết ai được đi đầu tiên. Nếu tung được mặt sấp (S) thì bạn Tuấn được đi trước, nếu tung được mặt ngửa (N) thì bạn Hùng được đi trước. Hai bạn chơi 2 ván cờ. Tính xác suất để bạn Tuấn được đi trước cả hai lần.

Bài II (1,5 điểm). Với $x > 0$, cho hai biểu thức $A = \dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 64$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Tìm x để $\dfrac{A}{B} > \dfrac{3}{2}$.

Bài III (2,5 điểm).

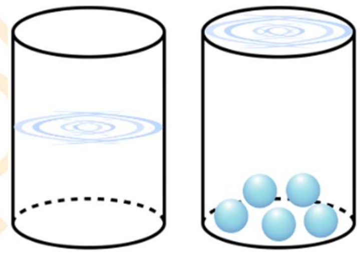
1) Sáng ngày 7/5/2024, tại thành phố Điện Biên Phủ đã tổ chức diễu hành kỉ niệm 70 năm chiến thắng Điện Biên Phủ (7/5/1954 - 7/5/2024). Tham gia đoàn diễu hành khối Nữ Cảnh Sát Đặc Nhiệm có 70 người (không tính người dẫn đầu và tổ cầm cờ) được xếp thành các hàng ngang, hàng dọc đều nhau. Nếu bớt đi 1 hàng và mỗi hàng thêm 1 người thì thừa ra 4 người. Hỏi lúc đầu đoàn diễu hành khối Nữ Cảnh Sát Đặc Nhiệm có bao nhiêu hàng và mỗi hàng có bao nhiêu người?

2) Để chuẩn bị trao thưởng cho học sinh giỏi cuối năm học, một trường THCS cần mua 2000 quyển vở và 400 cây bút để làm phần thưởng. Nhà trường dự tính để mua với giá niêm yết sẽ cần 18 triệu 400 nghìn đồng. Do mua với số lượng lớn nên đại lí bán quyết định giảm giá 5% cho mỗi quyển vở và 6% cho mỗi cây bút, vì thế nhà trường chỉ phải trả 17 triệu 456 nghìn đồng. Tính giá niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút.

3) Cho phương trình $x^2+3x+m+1=0$ (ẩn x, tham số m). Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x_1-x_2\right)^2+7m+5x_1x_2$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một ly nước dạng hình trụ có chiều cao là 15cm, đường kính đáy là 5cm, lượng nước tinh khiết trong ly cao 10cm. Ly nước được đặt cố định trên mặt bàn bằng phẳng như hình vẽ bên.



a) Tính thể tích lượng nước tinh khiết được chứa trong ly.

b) Người ta thả vào ly nước 5 viên bi hình cầu giống hệt nhau, có cùng thể tích, đồng chất và ngập hoàn toàn trong nước, làm nước trong ly dâng lên đúng bằng miệng ly, không tràn ra ngoài. Hỏi thể tích của mỗi viên bi là bao nhiêu centimét khối? (*Giả sử độ dày của ly là không đáng kể*).

2) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên tiếp tuyến Ax của (O) tại A, lấy điểm C sao cho $AC>R$, nối CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Kẻ AH vuông góc với OC cắt đoạn thẳng BC tại điểm M.

a) Chứng minh bốn điểm A, C, H, D cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh $OH.OC=R^2$ và $\widehat{OCB}=\widehat{OBH}$;

c) Chứng minh $MD.HB=MB.HD$.

Bài V (0,5 điểm). Hưởng ứng chương trình "*Tình nguyện mùa đông 2024*", một đoàn tình nguyện cần thuê xe để chở 28 người và 9 tấn hàng để giúp đồng bào hai tỉnh Yên Bái và Lào Cai bị ảnh hưởng bởi thiên tai. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 4 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 2 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi đoàn tình nguyện phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 9

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

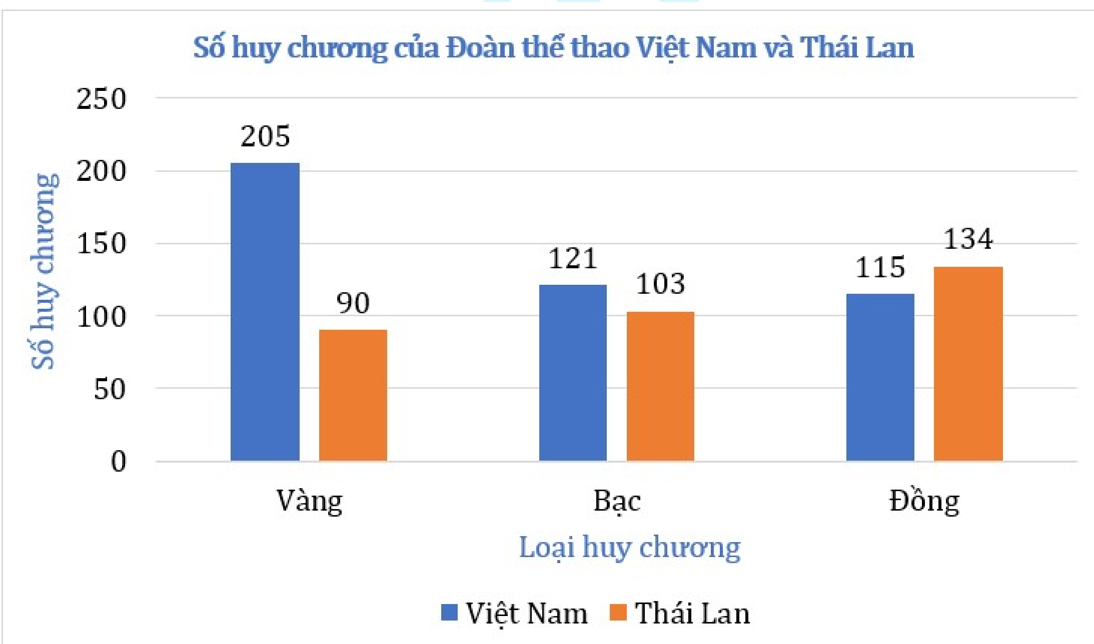
1) Thống kê cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I	V	II	III	VI	V	IV	II	III	V	VI	VII	VIII	I	I	II	VI	VII	IV

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3; cấp II và cấp III có độ lớn từ 3 đến dưới 4; cấp IV và cấp V có độ lớn từ 4 đến dưới 5; cấp VI và cấp VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 7.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

2) Biểu đồ cột kép dưới đây biểu diễn số huy chương của Đoàn thể thao Việt Nam và Đoàn thể thao Thái Lan tại SEA Game 31:



Người ta lập danh sách tất cả các vận động viên đạt huy chương (Vàng, Bạc, Đồng) của hai đoàn thể thao, nếu 1 vận động viên đạt nhiều huy chương thì số lần ghi tên vận động viên đó bằng số huy chương mà người đó đạt được. Bảng thống kê có dạng như sau :

Số thứ tự	Họ và tên	Huy chương	Môn đạt huy chương	Nước
...	...	...	...	...

Chọn ngẫu nhiên một số trong danh sách số thứ tự của bảng trên.

Tính xác suất của biến cố “Số được chọn là số thứ tự của vận động viên đạt huy chương Bạc ”.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\frac{x+5}{3-\sqrt{x}}$ và $B=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}+\frac{x-4\sqrt{x}-9}{9-x}$ với $x\ge 0; x\ne 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn đẳng thức $x^2-16=0$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Đặt $M=\frac{B}{A}$. Chứng minh rằng $|M|<\frac{1}{2}$.

Bài III (2,5 điểm).

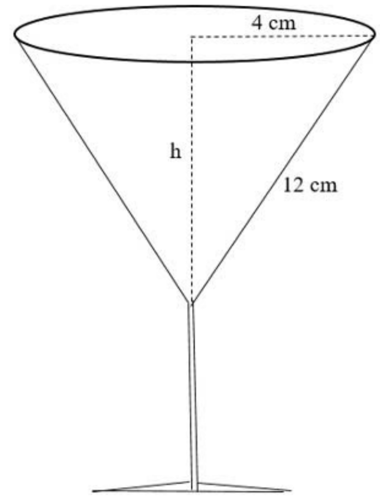
1) Có hai loại quặng : Loại thứ nhất chứa 75% sắt; loại thứ hai chứa 50% sắt. Tính khối lượng từng loại quặng cần đun trộn để ra được 25 tấn quặng chứa 66% sắt. (Biết khối lượng hao hụt và khối lượng tạp chất không đáng kể).

2) Nhà bạn Hoa có một mảnh vườn trồng cà chua, vườn được chia thành nhiều luống và số cây ở mỗi luống là như nhau. Hoa tính rằng : Nếu tăng thêm 8 luống nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì tổng số cây cà chua trong vườn giảm đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì tổng số cây trong vườn tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Hoa trồng bao nhiêu cây cà chua?

3) Cho phương trình $x^2-x+3m-11=0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt sao cho $2023x_1+2024x_2=2025$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Bạn Nam dự định tổ chức buổi tiệc sinh nhật và chọn loại ly có phần chứa nước dạng hình nón với bán kính đáy $R = 4$ cm và độ dài đường sinh $l = 10$ cm để khách uống nước trái cây.



a) Tính thể tích phần chứa nước của ly.

(*lấy* $\pi \approx 3{,}14$, *ghi kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)

b) Bạn Nam cần chuẩn bị một số hộp nước trái cây có lượng nước trong mỗi hộp là 1,2 lít. Biết rằng buổi tiệc sinh nhật có 14 người (*đã bao gồm cả Nam*). Nếu mỗi người trung bình uống 3 ly nước trái cây và lượng nước rót bằng 90% thể tích ly thì bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu hộp nước trái cây?

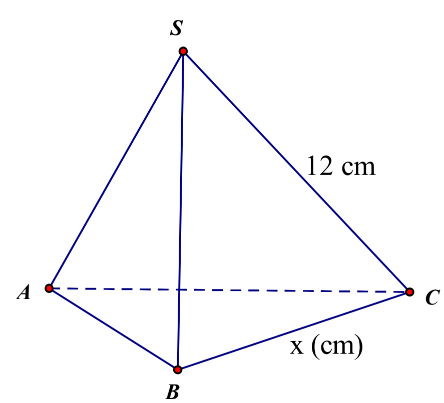
2) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn B, C là các tiếp điểm), kẻ dây cung BD song song với AC. Đường thẳng AD cắt $(O;R)$ tại điểm $E\,(E \neq D)$. Gọi I là trung điểm của DE.

a) Chứng minh năm điểm A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OA, AD lần lượt tại H và K. Gọi F là giao điểm của BE và AC. Chứng minh $AK.AI = AH.AO$ và tam giác AFE đồng dạng với tam giác BFA.

c) Chứng minh ba đường thẳng AB, CD, FK đồng quy.

Bài V. (0,5 điểm) Một mô hình đồ chơi bằng gỗ có dạng hình chóp tam giác đều. Biết các cạnh bên của hình chóp là các thanh gỗ có chiều dài bằng 12 cm. Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là x cm ($0 < x < 24$). Để diện tích xung quanh của đồ chơi trên đạt giá trị lớn nhất thì x bằng bao nhiêu? (*coi các đường mép gấp là không đáng kể*).



--HẾT--

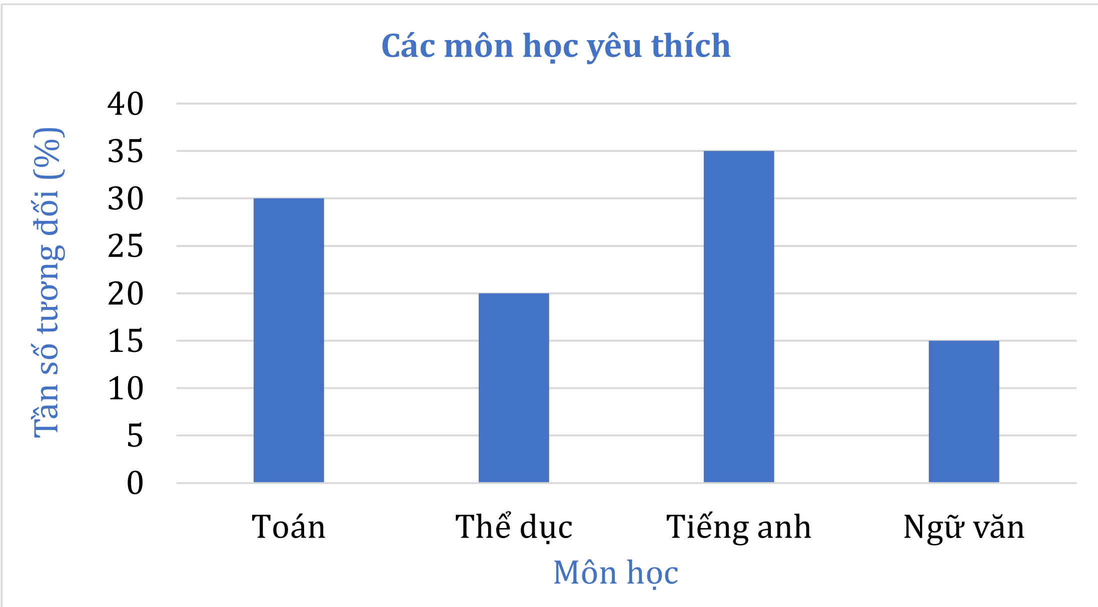
ĐỀ MINH HỌA SỐ 10

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Kết quả điều tra sự yêu thích môn học của 500 em học sinh lớp 9 được cho trong biểu đồ tần số tương đối dưới đây:



Hãy lập bảng tần số yêu thích các môn học và cho biết môn học nào được nhiều học sinh yêu thích nhất (*biết mỗi bạn chỉ chọn một môn học yêu thích*).

2) Bạn Hoàng có hai màu áo sơ mi khác nhau: trắng, xanh dương và ba màu quần khác nhau: đen, nâu, be. Bạn Hoàng chọn ngẫu nhiên một bộ quần áo để mặc. Tính xác suất để bộ quần áo bạn Hoàng mặc là áo màu trắng và quần màu đen.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{1}{x-\sqrt{x}}\right):\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{2}{x-1}\right)$ với $x>0;\, x\neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A biết $x=16$;

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x>0$; $x\neq 1$;

3) Tìm giá trị nguyên của x để $P=A:B$ đạt giá trị lớn nhất.

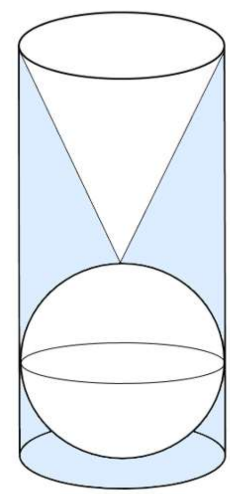
Bài III (2,5 điểm).

1) Trên một cánh đồng cấy 60ha giống lúa mới và 40ha giống lúa cũ. Biết sau khi gặt thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi giống lúa trên 1ha là bao nhiêu? Biết rằng 3ha giống lúa mới thu hoạch được ít hơn 4ha giống lúa cũ là 1 tấn.

2) Một xưởng may dự định may 1500 chiếc áo trong một thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, thực tế mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 10 chiếc áo so với dự định. Do đó, ba ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 1320 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng đó phải may xong bao nhiêu chiếc áo?

3) Cho phương trình bậc hai $2x^2-(m+3)x+m=0$ (x là ẩn, m là tham số). Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|x_1-x_2|$.

Bài IV (4,0 điểm).



1) Một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 6cm, bán kính đáy bằng 1cm. Người ta thả từ từ lần lượt vào cốc nước một viên bi hình cầu và một vật có dạng hình nón đều bằng thủy tinh (vừa khít như hình vẽ) thì thấy nước trong chiếc cốc tràn ra ngoài. Biết rằng đường kính của viên bi, đường kính của đáy hình nón và đường kính của đáy cốc nước xem như bằng nhau, bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh.

a) Tính thể tích của chiếc cốc thủy tinh hình trụ.

b) Tính thể tích của lượng nước còn lại trong chiếc cốc

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Lấy điểm K di động trên cung nhỏ AB. Kẻ đường kính AP. Gọi N là giao điểm của CK và AP. Tia AK cắt BC tại S.

a) Chứng minh tứ giác $BONK$ nội tiếp và $SK.SA=SB.SC$

b) Kẻ $AH\perp CK$ tại H, $KE\perp AO$ tại E.

Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KOE

c) Gọi F là giao điểm của PK và BC. Tìm vị trí của điểm K trên cung nhỏ AB để diện tích tam giác KNF lớn nhất.

Bài V (0,5 điểm). Một xưởng sản xuất cần thiết kế một bể đựng nước hình trụ bằng nhựa có thể tích là 128π (m^3). Tìm bán kính đáy của bể sao cho bể hình trụ được làm ra tốn ít vật liệu nhất.

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

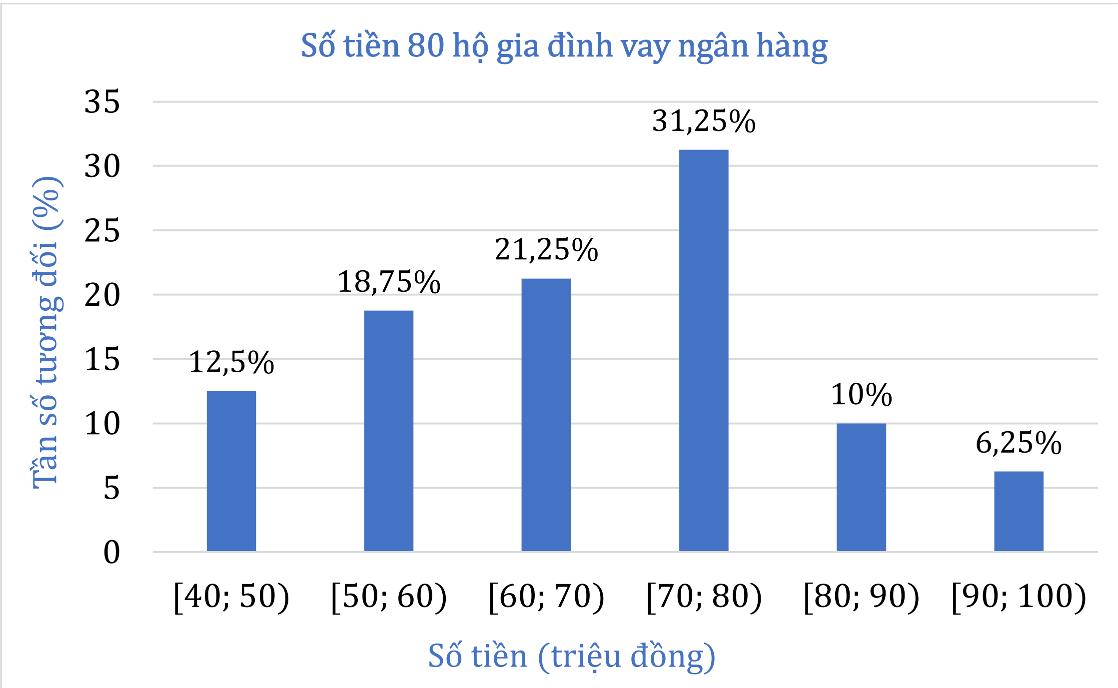
ĐỀ MINH HỌA SỐ 1

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Một ngân hàng thống kê số tiền (đơn vị : triệu đồng) mà 80 hộ gia đình vay để phát triển sản xuất. Số liệu được ghi lại trong biểu đồ tần số tương đối ghép nhóm như sau:



Lập bảng tần số ghép nhóm và vẽ biểu đồ tần số ghép nhóm ở dạng biểu đồ cột của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

2) Có 5 đoạn thẳng có độ dài lần lượt là $2\,\text{cm}, 4\,\text{cm}, 6\,\text{cm}, 8\,\text{cm}, 10\,\text{cm}$. Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên. Tính xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành 3 cạnh của một tam giác.

Lời giải

1) Theo biểu đồ trên, có 6 nhóm số liệu là:

$$[40\,;\,50), [50\,;\,60), [60\,;\,70), [70\,;\,80), [80\,;\,90), [90\,;\,100).$$

Tần số tương đối ghép nhóm của 6 nhóm số liệu trên lần lượt là :

$$f_1 = 12,5\%;\quad f_2 = 18,75\%;\quad f_3 = 21,25\%;\quad f_4 = 31,25\%;\quad f_5 = 10\%;\quad f_6 = 6,25\%$$

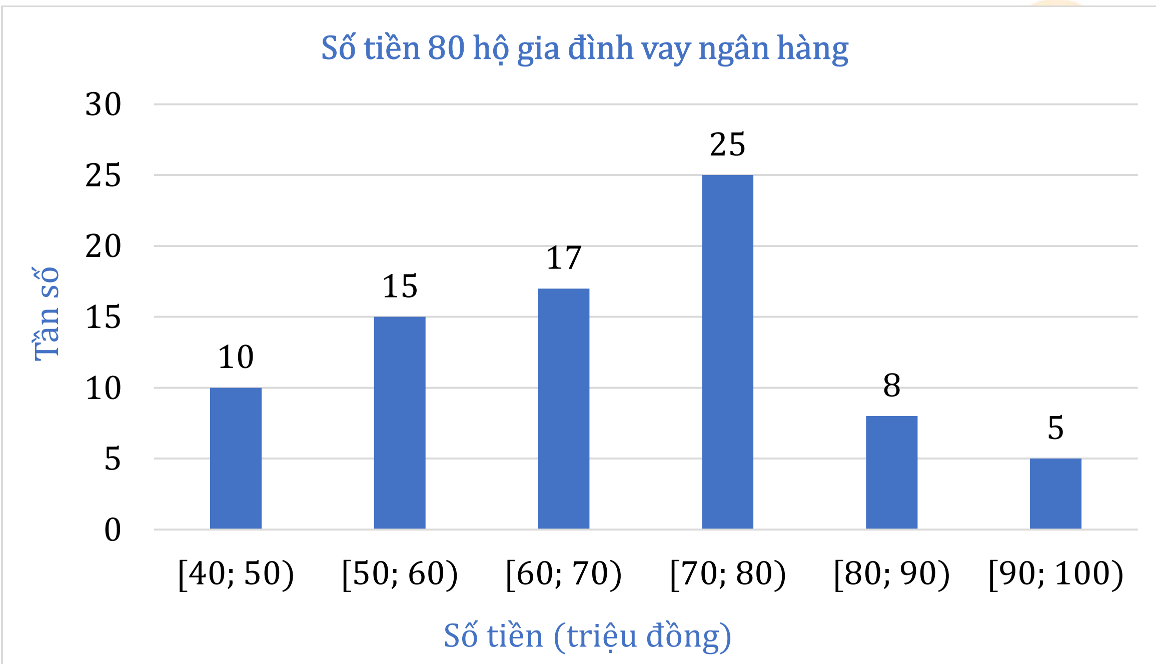
Do đó tần số ghép nhóm của 6 nhóm số liệu trên lần lượt là :

$n_1 = 80.12,5\% = 10$; $n_2 = 80.18,75\% = 15$; $n_3 = 80.21,25\% = 17$;
$n_4 = 80.31,25\% = 25$; $n_5 = 80.10\% = 8$; $n_6 = 80.6,25\% = 5$.

Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau :

Số tiền (triệu đồng)	[40 ; 50)	[50 ; 60)	[60 ; 70)	[70 ; 80)	[80 ; 90)	[90 ; 100)	Cộng
Tần số (n)	10	15	17	25	8	5	$N = 80$

Ta có biểu đồ tần số ghép nhóm dạng cột như sau:



2) Lấy ngẫu nhiên 3 đoạn thẳng trong 5 đoạn thẳng trên, ta có không gian mẫu là:

$\Omega = \{(2,4,6);(2,4,8);(2,4,10);(2,6,8);(2,6,10);(2,8,10);(4,6,8);(4,6,10);(4,8,10);(6,8,10)\}$

Tập Ω có 10 phần tử. Do đó có 10 kết quả có thể xảy ra và 10 kết quả này là đồng khả năng.

Gọi A là biến cố: “3 đoạn thẳng lấy ra lập thành 3 cạnh của một tam giác”.

Vì trong một tam giác, độ dài của một cạnh bất kì luôn nhỏ hơn tổng độ dài hai cạnh còn lại (quan hệ giữa ba cạnh của một tam giác).

Do đó có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố A là $(4,6,8);(4,8,10);(6,8,10)$.

Suy ra xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{3}{10}=0,3$.

Vậy xác suất để 3 đoạn thẳng lấy ra lập thành 3 cạnh của một tam giác là $0,3$.

Bài II (1,5 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}+\dfrac{4}{1-x}$ với $x>0, x\neq 1$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Đặt $P=A\cdot B$. Tìm các giá trị nguyên của x sao cho $P<\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

1) Thay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A ta có: $A=\dfrac{9-1}{\sqrt{9}}=\dfrac{8}{3}$

Vậy khi $x=9$ thì $A=\dfrac{8}{3}$.

2) $B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\dfrac{4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2-\left(\sqrt{x}-1\right)^2-4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$=\dfrac{x+2\sqrt{x}+1-x+2\sqrt{x}-1-4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{4\sqrt{x}-4}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{4}{\sqrt{x}+1}$.

3) $P=A\cdot B=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{4\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\dfrac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}$.

Khi đó $P-\dfrac{5}{2}=\dfrac{4\left(\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{8\left(\sqrt{x}-1\right)-5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\dfrac{3\sqrt{x}-8}{2\sqrt{x}}<0$

Với $x>0, x\neq 1$ thì $2\sqrt{x}>0$ nên $3\sqrt{x}-8<0$, suy ra $x<\dfrac{64}{9}$.

Kết hợp điều kiện được $0<x<\dfrac{64}{9}, x\neq 1$.

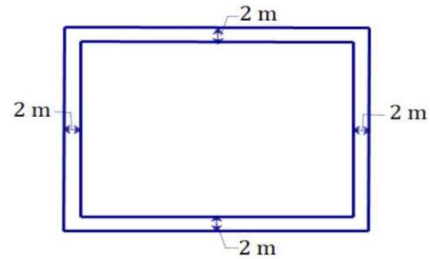
Vậy các giá trị nguyên của x cần tìm là $2; 3; 4; 5; 6; 7$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Trong tháng 9, hai tổ sản xuất được 1 100 chi tiết máy. Sang tháng 10, tổ Một sản xuất vượt mức 15% và tổ Hai sản xuất vượt mức 20% so với tháng 9, do đó tháng 10 hai tổ sản xuất được 1 295 chi tiết máy. Hỏi trong tháng 9 mỗi tổ sản xuất được bao nhiêu chi tiết máy?

2) Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280m.

Trong phần đất của vườn, người ta làm một lối đi xung quanh vườn rộng 2m. Phần đất còn lại để trồng trọt có diện tích là 4256m². Tính chiều dài, chiều rộng của khu vườn.



3) Cho phương trình bậc hai $x^2-5x+3=0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình. Không giải phương trình, hãy tính $T=x_1^2+x_2^2-3x_1x_2$.

Lời giải

1) Gọi x, y lần lượt là số chi tiết máy tổ Một và tổ Hai sản xuất được trong tháng 9 (đơn vị: chi tiết máy, điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*; x, y<1100$).

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} x+y=1100 \\ 1,15x+1,2y=1\,295 \end{cases}$

Giải hệ được $\begin{cases} x=500 \\ y=600 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy trong tháng 9, tổ Một sản xuất được 500 chi tiết máy, tổ Hai sản xuất được 600 chi tiết máy.

2) Nửa chu vi của khu vườn là $280:2=140$ (m)

Gọi chiều dài của hình chữ nhật là x (m) ($70 \le x < 140$)

Khi đó chiều rộng của khu vườn là $140-x$ (m)

Vì người ta làm một lối đi xung quanh vườn rộng 2 m nên phần đất còn lại để trồng trọt có chiều dài là $x-4$ (m) và chiều rộng là $140-x-4=136-x$ (m)

Vì phần đất còn lại để trồng trọt có diện tích là 4256m² nên ta có phương trình:

$$(x-4)(136-x)=4256$$

Học sinh giải phương trình trên được:

$x = 80$ (thỏa mãn điều kiện); $x = 60$ (không thỏa mãn điều kiện)

Do đó chiều dài hình chữ nhật là 80 m

Suy ra chiều rộng hình chữ nhật là 140 – 80 = 60 (m)

Vậy khu vườn có chiều dài là 80 m và chiều rộng là 60 m.

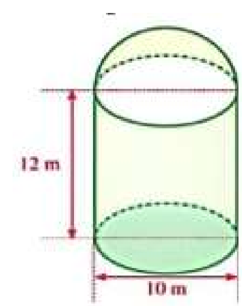
3) Xét phương trình $x^2 - 5x + 3 = 0$ có $\Delta = (-5)^2 - 4.1.3 = 13 > 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt.

Áp dụng định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{-5}{1} = 5 \\ x_1x_2 = 3 \end{cases}$. Ta có $T = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2$.

Thay số ta được $T = 5^2 - 5.3 = 10$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một kho chứa ngũ cốc có dạng một hình trụ và một mái vòm có dạng nửa hình cầu. Phần hình trụ có đường kính đáy là 10 m và chiều cao là 12 m. Phần mái vòm là nửa hình cầu đường kính 10 m (xem hình vẽ minh họa bên).



a) Hỏi dung tích của kho đó là bao nhiêu mét khối (*bỏ qua bề dày của tường nhà kho và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm*).

b) Để đảm bảo ngũ cốc trong kho không bị mốc người ta sơn mặt bên trong kho (bao gồm cả mặt đáy của kho). Biết tiền công là 30 000 đồng/m². Hỏi số tiền công cần phải trả là bao nhiêu? (*diện tích cần sơn làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị mét vuông*).

2) Cho tam giác ABC ($AB > AC$) có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Đường cao CE của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại M $(M \neq C)$. Gọi I là trung điểm của MB. Kẻ đường thẳng vuông góc với OE tại E cắt AC tại P, cắt MB tại Q.

a) Chứng minh bốn điểm O, I, Q, E cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh $MB.EC = AC.EB$;

c) Chứng minh $OP = OQ$.

Lời giải

1)

a) Bán kính đáy hình trụ là $R = 10:2 = 5$ (m)

Dung tích của kho chứa ngũ cốc là:

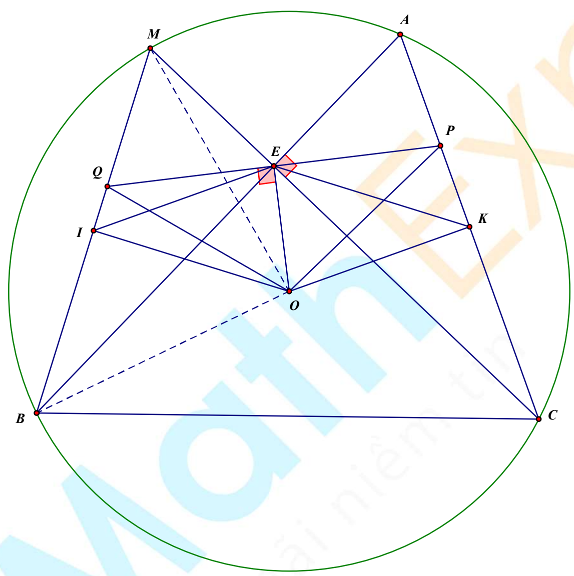
$$V = h\cdot\pi\cdot R^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = 12\cdot\pi\cdot 5^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 5^3 = \frac{1150\pi}{3} \approx 1204,28 \text{ (m}^3\text{)}.$$

b) Diện tích các mặt cần sơn là

$$S = 2\cdot\pi\cdot R\cdot h + S_d + \frac{1}{2}\cdot 4\cdot\pi\cdot R^2 = 2\cdot\pi\cdot 5\cdot 12 + \pi\cdot 5^2 + 2\cdot\pi\cdot 5^2 = 195\pi \approx 612,61 \text{ (m}^2\text{)}$$

Số tiền công cần phải trả là $612,61 \,.\, 30\,000 = 18\,378\,300$ (đồng)

2)



b) Chứng minh $\Delta EMB \backsim \Delta EAC\,(g.g)$. Do đó $\dfrac{MB}{AC} = \dfrac{EB}{EC}$, suy ra $MB.EC = AC.EB$

c) Vì tứ giác $OIQE$ là tứ giác nội tiếp (chứng minh ở ý a) nên $\widehat{QOE} = \widehat{QIE}$ (1)

Gọi K là trung điểm của AC.

Chứng minh được tứ giác $OEPK$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{POE} = \widehat{EKP}$ (2)

Xét ΔMEB vuông tại E có: EI là đường trung tuyến ứng với MB

Do đó $MI = IE = IB = \dfrac{MB}{2}$ (tính chất đường trung tuyến trong tam giác vuông).

Suy ra ΔIEB cân tại I nên $\widehat{IBE} = \widehat{IEB}$. Do đó $\widehat{QIE} = 2.\widehat{IBE}$

Tương tự, ΔEKC cân tại K nên $\widehat{KEC}=\widehat{KCE}$. Do đó $\widehat{EKP}=2.\widehat{KCE}$.

Mà $\widehat{IBE}=\widehat{KCE}$ (hai góc nội tiếp (O) cùng chắn $\overset{\frown}{AM}$)

Suy ra $\widehat{QIE}=\widehat{EKP}$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{QOE}=\widehat{POE}$.

Xét ΔQOE và ΔPOE có:

$\widehat{QEO}=\widehat{PEO}=90°$

OE chung

$\widehat{QOE}=\widehat{POE}$ (cmt)

Suy ra $\Delta QOE=\Delta POE(c.g.c)$ do đó $OP=OQ$ (hai cạnh tương ứng).

Bài V (0,5 điểm). Đón đầu xu thế bảo vệ môi trường, một cửa hàng bán xe máy đã tập trung kinh doanh xe máy điện với chi phí nhập vào mỗi chiếc là 15 triệu đồng và bán ra với giá 19 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng khách mua trong một tháng là 50 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn lượng tiêu thụ, cửa hàng dự định giảm giá bán và ước tính rằng: mỗi khi giá bán giảm 100 nghìn đồng/1 chiếc thì lượng xe bán ra trong tháng tăng thêm 5 chiếc. Vậy cửa hàng nên định giá mới bao nhiêu để sau khi thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất?

Lời giải

Gọi x là số lần giảm giá 100 nghìn đồng/1 xe máy ($x>0$)

Khi đó số lượng xe bán ra trong một tháng tăng $5x$ (chiếc, điều kiện: $5x$ là số tự nhiên) và số xe bán ra là $50+5x$ (chiếc)

Lợi nhuận thu được sau khi bán một xe lúc này là $4\,000-100x$ (nghìn đồng)

Tổng lợi nhuận thu được tương ứng là $T=(50+5x)(4\,000-100x)=500\left(-x^2+30x+400\right)$ (nghìn đồng)

Ta có $T=500\left[625-(x-15)^2\right]\le 312\,500$. Dấu bằng xảy ra khi $x=15$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy cửa hàng bán với giá $17\,500\,000$ đồng mỗi xe thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

--HẾT--

ĐỀ MINH HỌA SỐ 2

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Thống kê số quyển sách quyên góp ủng hộ thư viện nhà trường của 100 học sinh khối 9 như sau:

50	38	35	38	50	38	27	38	47	27	27	35	38	32	38	32	35	32	35	32
38	38	35	32	35	38	38	50	32	47	27	38	35	27	47	35	38	38	32	35
35	35	27	32	38	35	32	32	38	32	38	35	27	38	27	38	27	32	38	38
38	32	38	32	35	27	35	38	32	27	50	32	27	35	47	32	38	27	32	32
38	27	35	38	35	47	35	38	35	38	35	35	35	35	35	27	50	38	32	38

Trong 100 số liệu thống kê ở trên, có bao nhiêu giá trị khác nhau? Lập bảng tần số của mẫu số liệu trên.

2) Trong một chiếc hộp kín có 4 chiếc thẻ cùng loại ghi lần lượt các số 2, 4, 6, 8. Bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một chiếc thẻ ra khỏi hộp (không trả lại hộp), sau đó bạn Cường lấy ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong ba chiếc thẻ còn lại. Quan sát số trên hai chiếc thẻ mà hai bạn lấy được. Tính xác suất của biến cố A: "Bạn Hùng lấy được chiếc thẻ ghi số 8".

Lời giải

1)

+) Trong 100 số liệu thống kê ở trên có 6 giá trị khác nhau:

$x_1 = 27; x_2 = 32; x_3 = 35; x_4 = 38; x_5 = 47; x_6 = 50$.

+) Bảng tần số của mẫu số liệu trên như sau:

Số quyển sách quyên góp	27	32	35	38	47	50	Tổng
Tần số	15	20	25	30	5	5	$N = 100$

2) Không gian mẫu của phép thử là (2;4), (4;2), (2;6), (6;2), (2;8), (8;2), (4;6), (6;4), (4;8), (8;4), (6;8), (8;6). Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 12$.

Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là (8;2), (8;4), (8;6) nên $P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.

Bài II (1,5 điểm). Cho biểu thức $E=\left(\dfrac{x+\sqrt{x}-1}{x\sqrt{x}-1}-\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}\right):\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$.

1) Rút gọn biểu thức E;

2) Chứng minh rằng $E<\dfrac{1}{3}$;

3) Tìm x để $E=\dfrac{3}{4\sqrt{x}+1}$.

Lời giải

1) $E=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 1$.

2) Xét hiệu $E-\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{3\left(x+\sqrt{x}+1\right)}$

Vì $x+\sqrt{x}+1>0$ với mọi $x\ge 0$ và $-\left(\sqrt{x}-1\right)^2<0$ với mọi $x\ge 0, x\ne 1$ nên $E-\dfrac{1}{3}<0$

Hay $E<\dfrac{1}{3}$ với mọi $x\ge 0, x\ne 1$.

3) $\dfrac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1}=\dfrac{3}{4\sqrt{x}+1}$, suy ra $4x+\sqrt{x}=3x+3\sqrt{x}+3$, suy ra $x-2\sqrt{x}-3=0$

Phân tích được $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-3\right)=0$, mà $\sqrt{x}+1>0$ với mọi $x\ge 0$

Nên $\sqrt{x}=3$ hay $x=9$ (thỏa mãn điều kiện).

Bài III (2,5 điểm).

1) Trong một đợt khuyến mãi, siêu thị giảm giá cho mặt hàng A là 20% và mặt hàng B là 15% so với giá niêm yết. Một khách hàng mua 2 món hàng A và 1 món hàng B phải trả số tiền là $362\ 000$ đồng. Nhưng nếu mua trong khung giờ vàng thì món hàng A được giảm giá 30% còn món hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết. Một người mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên chỉ trả số tiền là $552\ 000$ đồng. Tính giá niêm yết của mỗi món hàng A và B.

2) Một người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B. Sau đó 16 phút có một ô tô đi từ tỉnh B về tỉnh A với tốc độ lớn hơn tốc độ của xe máy là 15 km/h. Xe máy gặp ô tô ở một địa điểm cách tỉnh B 24 km. Tính tốc độ của ô tô, biết rằng quãng đường AB dài 54 km.

3) Cho phương trình bậc hai $4x^2-2x-1=0$ có hai nghiệm là x_1, x_2. Không giải phương trình, hãy tính giá trị của biểu thức $P=\left(x_1-x_2\right)^2-x_1x_2$.

Lời giải

1) Gọi x, y (đồng) lần lượt là giá niêm yết của món hàng A và món hàng B. Điều kiện $x, y>0$.

Mặt hàng A giảm giá 20% so với giá niêm yết nên giá phải trả cho 1 món hàng A là

$x-20\%x=x(1-20\%)$ (đồng)

mặt hàng B giảm giá là 15% so với giá niêm yết nên giá phải trả cho 1 món hàng B là

$y-15\%y=y(1-15\%)$ (đồng)

Mặt hàng A giảm giá 20% và mặt hàng B giảm giá là 15% so với giá niêm yết và mua 2 món hàng A và 1 món hàng B phải trả tổng số tiền là $362\ 000$ đồng nên $2.x(1-20\%)+y(1-15\%)=362000$

Trong khung giờ vàng thì món hàng A được giảm giá 30% nên giá phải trả cho 1 món hàng A là

$x-30\%x=x(1-30\%)$ (đồng)

Trong khung giờ vàng thì món hàng B được giảm giá 25% nên giá phải trả cho 1 món hàng B là

$y-25\%y=y(1-25\%)$ (đồng)

trong khung giờ vàng thì món hàng A được giảm giá 30% còn món hàng B được giảm giá 25% so với giá niêm yết và mua 3 món hàng A và 2 món hàng B trong khung giờ vàng nên chỉ trả số tiền là $552\ 000$ đồng nên $3.x.(1-30\%)+2.y.(1-25\%)=552000$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}2.x(1-20\%)+y(1-15\%)=362000\\3.x.(1-30\%)+2.y.(1-25\%)=552000\end{cases}$

$$\begin{cases}1,6x+0,85y=362000\\2,1x+1,5y=552000\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=120000\\y=200000\end{cases}$$

Vậy giá niêm yết của món hàng A là 120000 đồng, của món hàng B là 200000 đồng.

2) Gọi tốc độ của xe máy đi từ tỉnh A đến tỉnh B là x (km/h) (điều kiện: $x>0$).

Tốc độ của ô tô đi từ tỉnh B về tỉnh A là $x+15$ (km/h)

Quãng đường AB dài 54 km, xe máy gặp ô tô ở một địa điểm cách tỉnh B 24 km, nên quãng đường xe máy đi được là: $54-24=30$ (km).

Do đó thời gian mà xe máy đi từ A đến nơi gặp nhau là $\frac{30}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi từ B đến nơi gặp nhau là $\frac{24}{x+15}$ (giờ)

Vì ô tô xuất phát sau xe máy 16 phút $=\frac{4}{15}$ giờ, nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x}-\frac{4}{15}=\frac{24}{x+15}$$

Học sinh giải phương trình trên và được $x=45$ (thỏa mãn điều kiện)

Hoặc $x=-37,5$ (không thỏa mãn điều kiện)

Do đó tốc độ của xe máy là 45 km/h.

Suy ra tốc độ của ô tô là 45 + 15 = 60 (km/h)

Vậy tốc độ của ô tô là 60 km/h.

3) Vì $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4.4.(-1)=20>0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2.

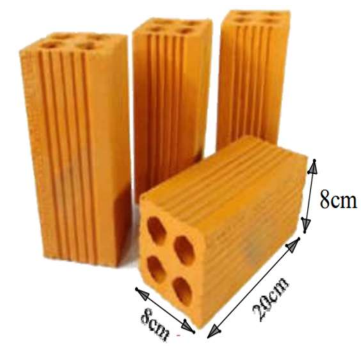
Theo định lí Viète, ta có $\begin{cases} S=x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \\ P=x_1.x_2=\frac{c}{a}=\frac{-1}{4} \end{cases}$

Ta có $P=(x_1-x_2)^2-x_1x_2=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2-x_1x_2=(x_1+x_2)^2-5x_1x_2$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}=\frac{3}{2}.$$

Bài IV (4,0 điểm).

1) Gạch ống là một sản phẩm được tạo hình thành từ đất sét và nước, được kết hợp lại với nhau theo một công thức chung hợp lý mới có thể tạo ra hỗn hợp dẻo quánh, sau đó chúng được đổ vào khuôn, rồi đem phơi hoặc sấy khô và cuối cùng là đưa vào lò nung. Một viên gạch hình hộp chữ nhật có kích thước dài 20 cm, rộng 8 cm, cao 8 cm. Bên trong có bốn lỗ hình trụ bằng nhau có đường kính 2,5 cm.



a) Tính thể tích đất sét để làm một viên gạch (lấy $\pi = 3,14$).

b) Theo tính toán ban đầu, bác Thanh muốn xây một ngôi nhà phải mua 10 000 viên gạch, giá một viên là 1 100 đồng. Nhưng khi thi công, bác Thanh phải mua dư 2% số gạch cần dùng dự phòng cho hư hao. Tính số tiền bác Thanh mua gạch để xây ngôi nhà.

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (các tiếp tuyến này cùng phía với nửa đường tròn). Trên nửa đường tròn, lấy điểm C ($C \neq A, C \neq B$). Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C cắt Ax, By lần lượt tại các điểm D, E. Kẻ đường cao CH của tam giác ABC.

a) Chứng minh tứ giác $OBEC$ là tứ giác nội tiếp;

b) Gọi K là giao điểm của CH và BD. Chứng minh $\widehat{AHD} = \widehat{BHE}$;

c) Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh $AM \parallel HE$.

Lời giải

1)

a) Thể tích đất sét làm viên gạch hình hộp chữ nhật chưa trừ bốn lỗ rỗng bên trong là:

$$V = 8.8.20 = 1280 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của một lỗ ống hình trụ là $V_1 = \pi R^2 h = 3,14.\left(\frac{2,5}{2}\right)^2.20 = 98,125$ (cm³).

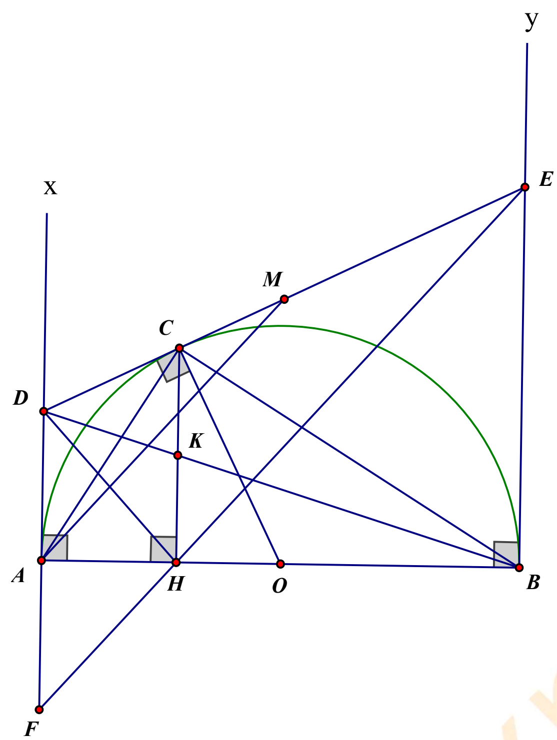
Mỗi viên gạch bên trong có bốn lỗ hình trụ bằng nhau nên thể tích đất sét để làm một viên gạch là:

$$V_2 = V - 4.V_1 = 1280 - 4.98,125 = 887,5 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

b) Số viên gạch bác Thanh cần mua là $10000.(1+2\%) = 10200$ (viên gạch).

Số tiền bác Thanh mua gạch để xây căn nhà là $10\ 200.\ 1\ 100 = 11\ 220\ 000$ (đồng).

2)



b) $\dfrac{AH}{BH}=\dfrac{DK}{BK}=\dfrac{DC}{CE}=\dfrac{AD}{BE}$ nên $\Delta ADH \backsim \Delta BEH\,(c.g.c)$. Do đó $\widehat{AHD}=\widehat{BHE}$

c) Kéo dài EH cắt đường thẳng AD tại F. Ta có $\widehat{BHE}=\widehat{AHF}$ (đối đỉnh)

Mà $\widehat{BHE}=\widehat{AHD}$ (chứng minh trên) nên $\widehat{AHF}=\widehat{AHD}$.

Xét ΔAHD và ΔAHF có: $\widehat{AHF}=\widehat{AHD}$; AH chung; $\widehat{HAD}=\widehat{HAF}=90^\circ$

Suy ra $\Delta AHD=\Delta AHF\,(g.c.g)$ nên $AD=AF$ (hai cạnh tương ứng)

Hay A là trung điểm của DF

Xét ΔDEF có: A là trung điểm của DF (cmt); M là trung điểm của DE (gt)

Suy ra AM là đường trung bình trong tam giác DEF nên $AM\,//\,HE$ (đpcm).

Bài V (0,5 điểm). Một công ty du lịch dự định tổ chức một tour du lịch xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tour là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty sẽ quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tour 100 nghìn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải giảm giá tour là bao nhiêu để doanh thu từ tour xuyên Việt là lớn nhất.

Lời giải

Gọi số lần giảm giá $100\ 000$ đồng thì thu được doanh thu lớn nhất là x (lần) ($x>0$)

Sau x lần giảm thì giá của tour là $2\ 000\ 000-100\ 000.x$ (đồng)

Vì cứ sau 1 lần giảm thì có thêm 20 người tham gia nên sau x lần giảm thì có thêm $20.x$ (người tham gia, điều kiện: $20x$ là số tự nhiên) nên tổng số người tham gia sau x lần giảm giá là $150+20.x$ (người)

Tổng doanh thu sau x lần giảm giá là:

$S=(2\ 000\ 000-100\ 000.x).(150+20.x)=100\ 000.10.(20-x).(15+2x)$ (đồng)

$=1\ 000\ 000.\left(-2x^2+25x+300\right)$ (đồng)

Xét $\left(-2x^2+25x+300\right)=-2\left(x^2-\frac{25}{2}x-150\right)$

$$=-2\left[\left(x^2-2.\frac{25}{4}.x+\left(\frac{25}{4}\right)^2\right)-\left(\frac{25}{4}\right)^2-150\right]=-2\left[\left(x-\frac{25}{4}\right)^2-\frac{3025}{16}\right]$$

Vì $-2\left(x-\frac{25}{4}\right)^2+2.\frac{3025}{16}\le\frac{3025}{8}$ nên $-1\ 000\ 000\cdot 2\left[\left(x-\frac{25}{4}\right)^2-\frac{3025}{16}\right]\le 1\ 000\ 000.\frac{3025}{8}$

Hay $-1\ 000\ 000\cdot 2\left[\left(x-\frac{25}{4}\right)^2-\frac{3025}{16}\right]\le 378\ 125\ 000$

Suy ra $S\le 378\ 125\ 000$, dấu bằng xảy ra khi $x=\frac{25}{4}=6,25$ (thỏa mãn)

Do đó $S_{max}=378\ 125\ 000$, khi $x=\frac{25}{4}=6,25$.

Giá tour khi đó là $2\ 000\ 000-100\ 000.6,25=1\ 375\ 000$ (đồng).

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 3

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Số cuộc gọi đến một tổng đài hỗ trợ khách hàng mỗi ngày trong tháng 04/2024 được ghi lại như sau:

4	2	6	3	6	3	2	5	4	2	5	4	3	3	3
3	5	4	4	3	4	6	5	3	6	3	5	3	5	5

Lập bảng tần số cho mẫu số liệu trên. Tìm tần số và tần số tương đối của số cuộc gọi nhiều nhất trong một ngày. (*kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị*)

2) Những tháng đầu năm sau dịp Tết Nguyên Đán, nhiều địa phương trong nước thường tổ chức các lễ hội. Do thắng trong một trò chơi ở lễ hội làng mình, bạn Đạt được tham gia quay một lần trong trò chơi "Vòng quay may mắn". Biết vòng quay được chia thành 15 hình quạt tròn như nhau và mỗi hình quạt tròn có ghi các điểm số từ 10 điểm đến 50 điểm (*như hình bên*). Tính xác suất của biến cố A: "Bạn Đạt quay được vào ô ít nhất 30 điểm". (*Biết mỗi lần quay thì mũi tên chỉ rơi vào đúng một trong các hình quạt nhỏ trong số 15 hình quạt trên*)

Lời giải

1) Trong 30 số liệu thống kê ở trên, có 5 giá trị khác nhau là :

$x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 4;\ x_4 = 5;\ x_5 = 6.$

Tần số của các giá trị $x_1;\ \ x_2;\ \ x_3;\ \ x_4;\ x_5$ lần lượt là $n_1 = 3;\ n_2 = 10;\ n_3 = 6;\ n_4 = 7;\ n_5 = 4.$

Tổng số lần xuất hiện của các giá trị $x_1;\ \ x_2;\ \ x_3;\ \ x_4;\ x_5$ là: $3 + 10 + 6 + 7 + 4 = 30$

Do đó ta có bảng tần số của mẫu số liệu trên như sau :

Số cuộc gọi trong một ngày (x)	2	3	4	5	6
Tần số (n)	3	10	6	7	4

Theo bảng tần số, ta có :

Số cuộc gọi nhiều nhất trong một ngày là 6

Tần số của số cuộc gọi nhiều nhất trong một ngày là 4

Tần số tương đối của số cuộc gọi nhiều nhất trong một ngày là $\frac{4.100}{30}\% \approx 13\%$

Vậy số cuộc gọi nhiều nhất trong một ngày có tần số là 4 và tần số tương đối khoảng 13%.

2) Do vòng quay được chia thành 15 hình quạt tròn như nhau nên có 15 kết quả có thể xảy ra và 15 kết quả này là đồng khả năng.

Xét biến cố A: "Bạn Đạt quay được vào ô ít nhất 30 điểm"

Có 6 ô từ 30 điểm trở lên (3 ô 30 điểm; 2 ô 40 điểm; 1 ô 50 điểm) nên có 6 kết quả thuận lợi cho biến cố này.

Do đó xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{6}{15} = 0,4$

Vậy xác suất của biến cố A là $0,4$.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0; x \neq 4$

1) Tính giá trị của A khi $x = 9$; 2) Rút gọn biểu thức B;

3) Cho $P = \frac{B}{A}$. Tìm x để $|P| + P = 0$.

Lời giải

1) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A ta có: $A = \frac{2\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}} = \frac{2.3+1}{3} = \frac{7}{3}$

Vậy $A = \frac{7}{3}$ khi $x = 9$.

2) Với $x > 0; x \neq 4$ rút gọn biểu thức B được $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$. Vậy với $x > 0; x \neq 4$ thì $B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$.

3) Với $x>0; x\neq 4$ ta có: $P=\dfrac{B}{A}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}:\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}.\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$

Ta có $|P|+P=0$ suy ra $|P|=-P$. Do đó $P\leq 0$ hay $\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}\leq 0$

Mà với điều kiện $x>0$ thì $\sqrt{x}>0$ suy ra $2\sqrt{x}+1>0$

Suy ra $\sqrt{x}-2\leq 0$ hay $\sqrt{x}\leq 2$ do đó $x\leq 4$.

Kết hợp điều kiện xác định ta có $0<x<4$.

Vậy $0<x<4$ thì $|P|+P=0$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Khi mới nhận lớp 9A, cô giáo chủ nhiệm dự định chia lớp thành 4 tổ có số học sinh như nhau. Nhưng sau khi khai giảng xong có 4 bạn học sinh chuyển đi. Do đó, cô giáo chủ nhiệm thay đổi phương án và chia đều số học sinh còn lại thành 3 tổ. Hỏi lớp 9A hiện có bao nhiêu học sinh? Biết rằng so với phương án dự định ban đầu, số học sinh mỗi tổ hiện tại nhiều hơn 2 học sinh.

2) Trong tháng đầu, hai đội thợ mỏ khai thác được 440 tấn than. Sang tháng thứ hai, đội I làm vượt mức 20%, đội 2 làm vượt mức 15% so với tháng đầu. Vì vậy, tháng thứ hai cả 2 đội đã khai thác được 516 tấn than. Tính khối lượng than mà mỗi đội đã khai thác được trong tháng đầu.

3) Cho phương trình $x^2-2(m+1)x-9=0$ (ẩn x, tham số m). Tìm các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 sao cho $x_1<x_2$ và $|x_1|-|x_2|=-6$.

Lời giải

1) Gọi số học sinh của lớp 9A hiện có là x (học sinh) ($x\in\mathbb{N}^*$)

Số học sinh lớp 9A trước lúc khai giảng là: $x+4$ (học sinh)

Số học sinh mỗi tổ theo dự định ban đầu là: $\dfrac{x+4}{4}$ (học sinh)

Số học sinh mỗi tổ hiện có là: $\dfrac{x}{3}$ (học sinh)

Do số học sinh mỗi tổ hiện tại nhiều hơn số học sinh mỗi tổ dự định ban đầu là 2 học sinh nên ta có phương trình: $\frac{x}{3}-\frac{x+4}{4}=2$

HS tự giải phương trình trên được $x=36$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy số học sinh hiện tại của lớp 9A là 36 học sinh.

2) Gọi khối lượng than mà đội I đã khai thác được trong tháng đầu là x (tấn) ($0<x<440$)

khối lượng than mà đội II đã khai thác được trong tháng đầu là y (tấn) ($0<y<440$)

Do trong tháng đầu hai đội đã khai thác được 440 tấn than nên ta có: $x+y=440$ (1)

Sang tháng thứ hai đội I làm vượt mức 20%, do đó khối lượng than mà đội I khai thác được là:

$$x.(100\%+20\%)=120\%.x=1,2x \text{ (tấn)}$$

Sang tháng thứ 2 đội II làm vượt mức 15%, do đó khối lượng than mà đội II khai thác được là:

$$y.(100\%+15\%)=115\%.y=1,15y \text{ (tấn)}$$

Vì trong tháng thứ hai cả hai đội đã khai thác được 516 tấn than nên ta có phương trình:

$$1,2x+1,15y=516 \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=440 & (1) \\ 1,2x+1,15y=516 & (2) \end{cases}$

Học sinh tự giải hệ phương trình và được $\begin{cases} x=200 \\ y=240 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy khối lượng than mà đội I khai thác được trong tháng đầu là 200 tấn

khối lượng than mà đội II khai thác được trong tháng đầu là 240 tấn.

3) Xét phương trình: $x^2-2(m+1)x-9=0$ (*)

$$\left(a=1, b=-2(m+1), c=-9\right)$$

Nhận thấy $ac=-9<0$ vậy phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt trái dấu x_1 và x_2.

Mà $x_1 < x_2$ suy ra $x_1 < 0 < x_2$

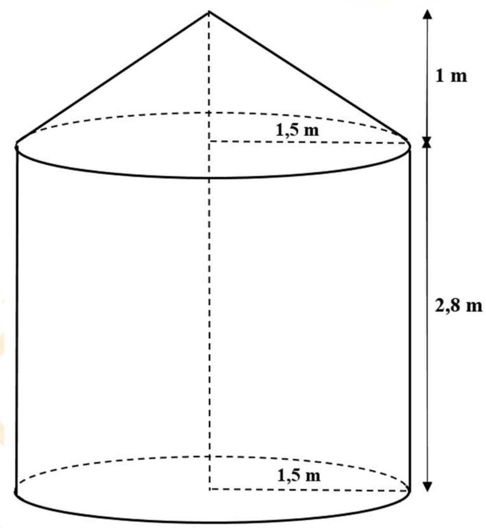
Theo đề bài ta có: $|x_1| - |x_2| = -6$ suy ra: $-x_1 - x_2 = -6$ (do $x_1 < 0 < x_2$) hay $x_1 + x_2 = 6$ (1)

Áp dụng định lí Viète cho phương trình (*) ta có: $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $2(m+1) = 6$, suy ra $m+1=3$ hay $m = 2$.

Vậy $m = 2$ thì thoả mãn yêu cầu bài toán.

Bài IV (4,0 điểm).



1) Một bồn nước được đặt trên mặt đất với cấu tạo gồm phần đỉnh có dạng hình nón và phần thân có dạng hình trụ như hình vẽ. Biết chiều cao của hình nón là 1 m, chiều cao của hình trụ là 2,8 m, bán kính đáy của hình trụ là 1,5 m.

a) Tính thể tích của bồn chứa nước trên (*làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét khối*).

b) Người ta muốn sơn toàn bộ mặt ngoài của bồn chứa nước trên (*không sơn phần đáy bồn đặt trên mặt đất*).

Tính diện tích cần sơn (*làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất của mét vuông*).

2) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Vẽ hai tiếp tuyến Ax, By của nửa đường tròn $(O;R)$ sao cho Ax, By và nửa đường tròn $(O;R)$ nằm cùng phía so với AB. Từ điểm M thuộc nửa đường tròn trên vẽ tiếp tuyến thứ ba cắt Ax, By lần lượt tại P và Q.

a) Chứng minh bốn điểm A, P, M, O cùng nằm trên một đường tròn.

b) AM cắt OP tại điểm I, BM cắt OQ tại điểm K. Chứng minh $MIOK$ là hình chữ nhật và tính tích $AP.BQ$ theo R.

c) Gọi N là giao điểm của BP và IK. Chứng minh A, N, Q thẳng hàng.

Lời giải

1) a) Thể tích của hình nón là $\frac{1}{3}.\pi.1,5^2.1=0,75\pi$ (m³)

Thể tích của hình trụ là $\pi.1,5^2.2,8=6,3\pi$ (m³)

Thể tích của bồn chứa nước trên là $0,75\pi+6,3\pi=7,05\pi\approx 22,1$ (m³)

Vậy bồn chứa nước trên có thể tích khoảng $22,1$ m³.

b) Diện tích xung quanh của hình trụ là $2\pi\ .\ 1,5\ .\ 2,8=8,4\pi$ (m²)

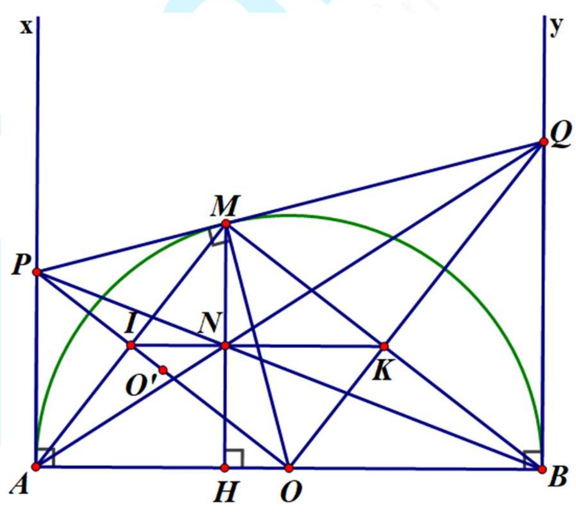
Đường sinh của hình nón là $\sqrt{1^2+1,5^2}=\sqrt{3,25}$ (m)

Diện tích xung quanh của hình nón là $\pi.1,5.\sqrt{3,25}$ (m²)

Diện tích cần sơn là $8,4\pi+\pi.1,5.\sqrt{3,25}\approx 34,9$ (m²)

Vậy diện tích cần sơn là khoảng $34,9$ m².

2)



a) Gọi O' là trung điểm của OP.

Chứng minh được bốn điểm A,P,M,O cùng nằm trên một đường tròn (O') (điều phải chứng minh).

b) Vì PA, PM là các tiếp tuyến của (O) (A, M là các tiếp điểm)

Nên $PA = PM$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra P thuộc đường trung trực của AM .

Lại có $OA = OM\,(= R)$ nên O thuộc đường trung trực của AM .

Do đó OP là đường trung trực của AM . Suy ra $OP \perp AM$ tại I hay $\widehat{OIM} = 90^o$

Chứng minh tương tự: $\widehat{OKM} = 90^o$

Xét (O) có: $\widehat{IMK} = 90^o$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn của (O))

Xét tứ giác $MIOK$ có: $\widehat{OIM} = \widehat{OKM} = \widehat{IMK} = 90^o$ (chứng minh trên)

Suy ra $MIOK$ là hình chữ nhật (dấu hiệu nhận biết)

Vậy $MIOK$ là hình chữ nhật (điều phải chứng minh).

Chứng minh được $\widehat{MOP} = \widehat{MQO}$ (cùng phụ với $\widehat{MOQ}$)

Xét ΔOMP và ΔQMO có: $\widehat{OMP} = \widehat{QMO} = 90^o$, $\widehat{MOP} = \widehat{MQO}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\Delta OMP \backsim \Delta QMO\,(g.g)$ suy ra $\dfrac{OM}{QM} = \dfrac{PM}{OM}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Hay $PM.QM = OM^2 = R^2$

Mà $PM = AP; QM = BQ$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Do đó $AP.BQ = PM.QM = R^2$ (điều phải chứng minh).

c)

Gọi H là giao điểm của MN và $AB\,(H \in AB)$.

Ta có: $OP \,//\, BM$ (vì cùng vuông góc với AM) nên $\widehat{NPI} = \widehat{NBK}$ (hai góc so le trong)

Xét ΔPIN và ΔBKN, có: $\widehat{NPI} = \widehat{NBK}$ (chứng minh trên), $\widehat{PNI} = \widehat{BNK}$ (hai góc đối đỉnh)

Suy ra $\Delta PIN \backsim \Delta BKN(g.g)$ nên $\dfrac{PN}{NB}=\dfrac{PI}{BK}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) (1).

Xét (O') có $\widehat{IAP}=\widehat{IOM}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{MP}$).

Chứng minh tương tự a: $OBQM$ nội tiếp đường tròn đường kính OQ.

Suy ra $\widehat{KQB}=\widehat{KMO}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OB}$ của đường tròn đường kính OQ)

Lại có $OP // BM$ (chứng minh trên) nên $\widehat{IOM}=\widehat{KMO}$ (2 góc so le trong). Do đó $\widehat{IAP}=\widehat{KQB}$

Xét ΔAIP và ΔQKB có: $\widehat{IAP}=\widehat{KQB}$ (chứng minh trên), $\widehat{AIP}=\widehat{QKB}=90^o$

Suy ra $\Delta AIP \backsim \Delta QKB(g.g)$ nên $\dfrac{PI}{BK}=\dfrac{AP}{QB}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Mà $PM=AP; QM=BQ$ (chứng minh trên). Suy ra $\dfrac{PI}{BK}=\dfrac{PM}{MQ}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $\dfrac{PN}{NB}=\dfrac{PM}{MQ}$. Do đó $MN // BQ$ (định lí Thalès đảo)

Mà $AB \perp BQ$ (tính chất tiếp tuyến). Suy ra $MN \perp AB$ tại H

Xét ΔMHB và ΔPAO có: $\widehat{MHB}=\widehat{PAO}=90^o$, $\widehat{MBH}=\widehat{POA}$ (2 góc đồng vị)

Suy ra $\Delta MHB \backsim \Delta PAO(g.g)$ nên $\dfrac{MH}{PA}=\dfrac{BH}{AO}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) (3).

Xét ΔABP có $NH // AP$ (cùng vuông góc với AB) nên $\dfrac{PA}{NH}=\dfrac{AB}{BH}$ (hệ quả định lí Thalès) (4).

Từ (3), (4) suy ra $\dfrac{MH}{PA}.\dfrac{PA}{NH}=\dfrac{BH}{AO}.\dfrac{AB}{BH}$ hay $\dfrac{MH}{NH}=\dfrac{AB}{AO}=\dfrac{2R}{R}=2$. Suy ra $MH=2NH$

Mà M,N,H thẳng hàng

Vậy N là trung điểm của MH

Gọi N' là giao điểm của AQ và MH

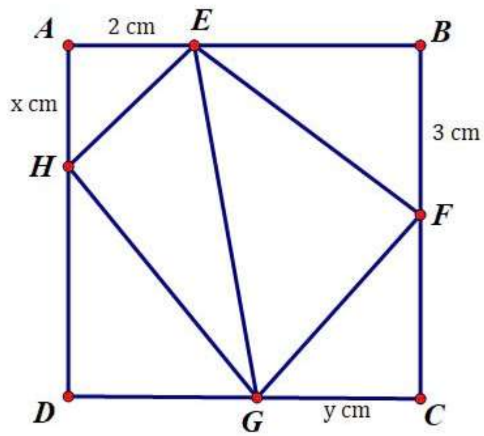
Chứng minh tương tự ta được N' là trung điểm của MH

Suy ra $N \equiv N'$.

Vậy A, N, Q thẳng hàng (điều phải chứng minh).

Bài V (0,5 điểm).

Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $6\,\text{cm}$. Người ta muốn cắt một hình thang như hình vẽ.



Tìm tổng $x + y$ để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Điều kiện: $0 < x < 6;\ 0 < y < 6$

Từ hình vẽ ta có: $CF = 6 - BF = 6 - 3 = 3$ (cm); $BE = 6 - AE = 6 - 2 = 4$ (cm)

Vì $ABCD$ là hình vuông suy ra ΔEBF là tam giác vuông nên $S_{EBF} = \frac{1}{2}.BE.BF = \frac{1}{2}.4.3 = 6\,(\text{cm}^2)$

Ta có $S_{EFGH} = S_{ABCD} - \left(S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF} + S_{EBF}\right) = S_{ABCD} - \left(S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF} + 6\right)$.

Do đó để diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ đạt giá trị lớn nhất. Lại có $\Delta AHE, \Delta DHG, \Delta GCF$ là các tam giác vuông (do $ABCD$ là hình vuông). Suy ra

$$S_{AHE} = \frac{1}{2}AE \cdot AH = \frac{1}{2}\cdot 2.x; S_{DHG} = \frac{1}{2}DH \cdot DG = \frac{1}{2}(6-x)(6-y); S_{CGF} = \frac{1}{2}CG \cdot CF = \frac{1}{2}3y.$$

Đặt $S = S_{AHE} + S_{DHG} + S_{GCF}$ thì $S = \frac{1}{2}(2x + 3y + 36 - 6x - 6y + xy) = \frac{1}{2}(36 + xy - 4x - 3y)\,(1)$

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB // CD$. Suy ra $\widehat{AEG} = \widehat{EGC}$ (hai góc so le trong).

Vì $EFGH$ là hình thang nên $EH // GF$. Suy ra $\widehat{HEG} = \widehat{EGF}$ (hai góc so le trong).

Lại có: $\widehat{AEH} + \widehat{HEG} = \widehat{AEG}$; $\widehat{EGF} + \widehat{FGC} = \widehat{EGC}$. Suy ra $\widehat{AEH} = \widehat{FGC}$.

Xét ΔAEH và ΔCGF có: $\widehat{AEH} = \widehat{CGF}$; $\widehat{EAH} = \widehat{GCF} = 90°$

Suy ra $\Delta AEH \backsim \Delta CGF(g.g)$. Do đó $\dfrac{AH}{CF} = \dfrac{AE}{CG}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

Nên $AH.CG = CF.AE$ hay $x.y = 3.2 = 6$ và $y = \dfrac{6}{x}$ (2)

Thay (2) vào (1) ta có $S = \dfrac{1}{2}\left(36 + 6 - 4x - 3.\dfrac{6}{x}\right) = \dfrac{1}{2}\left[42 - \left(4x + \dfrac{18}{x}\right)\right]$.

Ta có $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ với mọi $a, b \geq 0$ hay $a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$. Suy ra $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (*)

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Theo BĐT (*) với $a = 4x, b = \dfrac{18}{x}$ ta được $4x + \dfrac{18}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \dfrac{18}{x}} = 12\sqrt{2}$

Suy ra $S = \dfrac{1}{2}\left[42 - \left(4x + \dfrac{18}{x}\right)\right] \leq \dfrac{1}{2}\left(42 - 12\sqrt{2}\right) = 21 - 6\sqrt{2}$ (cm²)

Dấu "=" xảy ra khi $4x = \dfrac{18}{x}$ hay $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ (cm) (thỏa mãn điều kiện)

Do đó $y = \dfrac{6}{x} = \dfrac{6}{\frac{3\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{2}$ (cm) (thỏa mãn điều kiện). Suy ra $x + y = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ (cm)

Vậy $x + y = \dfrac{7\sqrt{2}}{2}$ cm thì diện tích hình thang $EFGH$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $21 - 6\sqrt{2}$ cm².

--HẾT--

ĐỀ MINH HỌA SỐ 4

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Trực ban ghi lại số ngày đi làm muộn của các công nhân một phân xưởng trong tháng 10 và tháng 11 ở bảng tần số sau:

Số ngày đi muộn	0	1	2	3	4
Số công nhân trong tháng 10	20	10	6	2	2
Số công nhân trong tháng 11	28	8	4	0	0

Hãy tính tần số tương đối của số ngày đi làm muộn của các công nhân trong tháng 10 và tháng 11.

2) Một túi đựng bốn viên bi có cùng khối lượng và kích thước, được đánh số $1;2;3;4$, hai viên bi khác nhau thì đánh số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt hai viên bi từ túi, viên bi lấy ra lần đầu không trả lại vào túi. Mô tả không gian mẫu của phép thử và tính xác suất để lấy được hai viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ.

Lời giải

1) Số công nhân của phân xưởng trong tháng 10 là $20+10+6+2+2=40$ (công nhân).

Số công nhân của phân xưởng trong tháng 11 là $28+8+4=40$ (công nhân). Vậy số công nhân của phân xưởng trong tháng 10 và tháng 11 đều là $\mathrm{N}=40$. Gọi $f_0; f_1; f_2; f_3; f_4$ lần lượt là tần số tương đối của số ngày đi muộn là 0; 1; 2; 3; 4 của các công nhân trong tháng 10. Ta có:

$$f_0=\frac{20}{40}\cdot 100\%=50\%; f_1=\frac{10}{40}\cdot 100\%=25\%; f_2=\frac{6}{40}\cdot 100\%=15\%$$

$$f_3=\frac{2}{40}\cdot 100\%=5\%; f_4=\frac{2}{40}\cdot 100\%=5\%$$

Gọi $f_0'; f_1'; f_2'; f_3'; f_4'$ lần lượt là tần số tương đối của số ngày đi muộn là 0; 1; 2; 3; 4 của các công nhân trong tháng 11. Ta có:

$$f_0'=\frac{28}{40}\cdot 100\%=70\%; f_1'=\frac{8}{40}\cdot 100\%=20\%$$

$$f_2'=\frac{4}{40}\cdot 100\%=10\%; f_3'=f_4'=0\%$$

2) Không gian mẫu của phép thử là:

$\Omega = \{(1,2);(1,3);(1,4);(2,1);(2,3);(2,4);(3,1);(3,2);(3,4);(4,1);(4,2);(4,3)\}$

Số các kết quả có thể xảy ra (số phần tử của không gian mẫu) là $n(\Omega) = 12$.

Gọi A là biến cố "Lấy được 2 viên bi mà tổng hai số trên hai viên bi đó là số lẻ".

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là $n(A) = 8$.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \dfrac{3\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \dfrac{2-5\sqrt{x}}{x-4}$ với $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 0,25$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Xét biểu thức $P = \dfrac{B}{A}$. Tìm số nguyên x nhỏ nhất để $\sqrt{P} < \sqrt{2}$.

Lời giải

1) Thay $x = 0,25$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A có: $A = \dfrac{4 \cdot \sqrt{0,25}}{\sqrt{0,25}+1} = \dfrac{4}{3}$

Vậy $x = 0,25$ thì $A = \dfrac{4}{3}$.

2) $B = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \dfrac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} - \dfrac{2-5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)+3\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)-2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$

$= \dfrac{x-3\sqrt{x}+2+3x+6\sqrt{x}-2+5\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{4x+8\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{4\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

3) Ta có $P = \dfrac{B}{A} = \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} : \dfrac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$

Để $\sqrt{P}$ có nghĩa thì $P \geq 0$, suy ra $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \geq 0$. Mà $\sqrt{x}+1 > 0$ với mọi $x > 0; x \neq 1; x \neq 4$.

Suy ra $\sqrt{x}-2 > 0$ hay $\sqrt{x} > 2$ hay $x > 4$ (1)

Để $\sqrt{P} < \sqrt{2}$ thì $P < 2$, suy ra $P - 2 = \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - 2 = \dfrac{\sqrt{x}+1-2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}-2} = \dfrac{5-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} < 0$

Từ (1) có $\sqrt{x} - 2 > 0$, suy ra $5 - \sqrt{x} < 0$ hay $x > 25$ (thỏa mãn).

Vì x là số nguyên nhỏ nhất nên chọn $x = 26$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Hai đội công nhân cùng làm một công việc trong 24 ngày thì xong. Nếu đội A làm trong 10 ngày và đội B làm trong 12 ngày thì được $\dfrac{9}{20}$ công việc. Hỏi nếu làm một mình thì mỗi đội làm xong công việc đó trong bao lâu?

2) Một cơ sở sản xuất lập kế hoạch làm 180 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do cải tiến kĩ thuật, năng suất mỗi ngày tăng thêm 3 sản phẩm, vì thế không những hoàn thành kế hoạch sớm một ngày, mà còn vượt mức 18 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày cơ sở phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm?

3) Cho phương trình bậc hai (ẩn x): $x^2 - 2(m-1)x - m - 3 = 0$ (1) với m là tham số. Chứng minh rằng phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m và biểu thức $T = x_1(1+x_2) + x_2(1+x_1)$ không phụ thuộc m.

Lời giải

1) Gọi thời gian làm riêng hoàn thành công việc của đội A là x (đơn vị: ngày, điều kiện $x > 24$).

Thời gian làm riêng hoàn thành công việc của đội B là y (đơn vị: ngày, điều kiện: $y > 24$).

Ta có mỗi ngày đội A làm được $\dfrac{1}{x}$ (công việc); mỗi ngày đội B làm được $\dfrac{1}{y}$ (công việc).

Vì hai đội công nhân cùng làm một công việc trong 24 ngày nên ta có phương trình

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{24} \quad (1)$$

Vì đội A làm trong 10 ngày và đội B làm trong 12 ngày thì được $\dfrac{9}{20}$ công việc

Nên ta có phương trình: $\dfrac{1}{x}.10 + \dfrac{1}{y}.12 = \dfrac{9}{20}$ hay $\dfrac{10}{x} + \dfrac{12}{y} = \dfrac{9}{20}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{24} \\ \dfrac{10}{x} + \dfrac{12}{y} = \dfrac{9}{20} \end{cases}$. Giải hệ ta được $\begin{cases} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{40} \\ \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{60} \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = 40 \\ y = 60 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy đội A làm riêng hoàn thành công việc trong 40 ngày, đội B làm riêng hoàn thành công việc trong 60 ngày.

2) Gọi số sản phẩm theo kế hoạch cơ sở cần sản xuất trong một ngày là x (sản phẩm/ngày, $x \in \mathbb{N}^*$).

Thời gian theo kế hoạch cơ sở hoàn thành công việc là $\frac{180}{x}$ (ngày)

Số sản phẩm thực tế cơ sở cần sản xuất trong một ngày là $x+3$ (sản phẩm/ngày)
Thực tế cơ sở sản xuất vượt mức 18 sản phẩm nên số sản phẩm thực tế là 198 sản phẩm.

Thời gian thực tế cơ sở hoàn thành công việc là $\frac{198}{x+3}$ (ngày)

Vì cơ sở hoàn thành kế hoạch sớm một ngày nên ta có phương trình:

$$\frac{180}{x} - \frac{198}{x+3} = 1$$

$$180(x+3) - 198x = x(x+3)$$

$$180x + 540 - 198x = x^2 + 3x$$

$$x^2 + 21x - 540 = 0$$

Giải phương trình này ta được $x_1 = 15$ (thỏa mãn), $x_2 = -36$ (không thỏa mãn).

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày cơ sở cần phải sản xuất 15 sản phẩm.

3)

+) Ta có $\Delta' = (m-1)^2 - 1.(-m-3) = m^2 - 2m + 1 + m + 3 = m^2 - m + 4 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$ với mọi m.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt với mọi m.

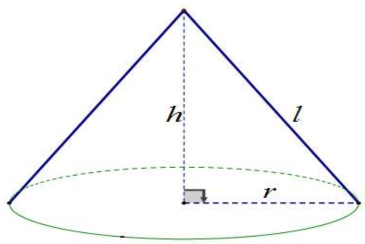
+) Áp dụng định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-2(m-1)}{1} = 2(m-1) \\ x_1 x_2 = \frac{-m-3}{1} = -m-3 \end{cases}$.

Ta có $T = x_1(1+x_2) + x_2(1+x_1) = (x_1 + x_2) + 2x_1x_2$.

Suy ra $T = 2(m-1) + 2(-m-3) = 2m - 2 - 2m - 6 = -8$ không phụ thuộc m (ĐPCM).

Bài IV (4,0 điểm).

1)



Khung của nón lá có dạng hình nón được làm bởi các thanh gỗ nối từ đỉnh tới đáy như các đường sinh l, 16 vành nón được làm từ những thanh tre mảnh nhỏ, dẻo dai uốn thành những vòng tròn có đường kính to, nhỏ khác nhau, cái nhỏ nhất to bằng đồng xu.

– Đường kính ($d=2r$) của chiếc nón lá khoảng 40 (cm);

– Chiều cao (h) của chiếc nón lá khoảng 19 (cm).

a) Tính độ dài của thanh tre uốn thành vòng tròn lớn nhất của vành chiếc nón lá (*không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ hai*).

b) Tính diện tích phần lá phủ xung quanh của chiếc nón lá (*không kể phần chắp nối, tính gần đúng đến chữ số thập phân thứ hai, lấy* $\pi \approx 3{,}14$).

2) Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Kẻ các tiếp tuyến Ax và By với nửa đường tròn (các tiếp tuyến này cùng phía với nửa đường tròn). Trên nửa đường tròn, lấy điểm C ($C \neq A, C \neq B$). Tiếp tuyến với nửa đường tròn tại C cắt Ax, By lần lượt tại các điểm D, E. Gọi F là giao điểm của đường thẳng BC và tia Ax.

a) Chứng minh tứ giác $OBEC$ là tứ giác nội tiếp;

b) Chứng minh $AD.BE=R^2$ và D là trung điểm của AF;

c) Đoạn thẳng AC cắt OD, OF tương ứng tại H, G; K là giao điểm của AE và OD. Chứng minh GK vuông góc với AB.

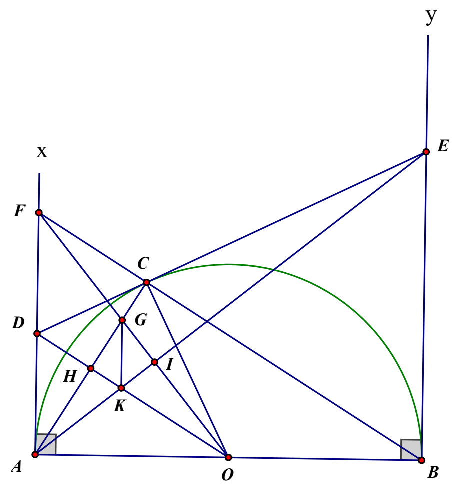
Lời giải

1) a) Độ dài của thanh tre uốn thành vòng tròn lớn nhất của vành chiếc nón lá bằng chu vi của đường tròn đáy là $C=\pi d=40\pi \approx 125{,}66$ (cm)

b) Độ dài đường sinh $l=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{20^2+19^2}=\sqrt{761}$ (cm).

Diện tích phần lá phủ xung quanh của chiếc nón lá bằng diện tích xung quanh hình nón.
Diện tích lá cần dùng là $S_{xq}=\pi rl=\pi.20.\sqrt{761} \approx 3{,}14.20.\sqrt{761} \approx 1732{,}42$ (cm²).

2)



c) Dễ dàng thấy rằng $OD \perp AC$ tại H nên OH là đường cao trong tam giác AOG (1)

Gọi I là giao điểm của AE và OF.

Vì $AF = 2AD$ và $AD.BE = R^2$ nên $AF.BE = 2R^2 = OA.AB$, suy ra $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{OA}{BE}$.

Do đó $\Delta OAF \backsim \Delta EBA$ (c-g-c) nên $\widehat{AOF} = \widehat{BEA}$ (hai góc tương ứng)

Suy ra $\widehat{AOI} + \widehat{OAI} = \widehat{BEA} + \widehat{BAE} = 90^0$ nên $\widehat{AIO} = 90^0$ hay $AI \perp OF$.

Khi đó AI là đường cao trong tam giác AOG (2)

Từ (1), (2) suy ra K là trực tâm của tam giác AOG. Suy ra $GK \perp AB$.

Bài V (0,5 điểm). Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách 400 km tới nơi sinh sản. Vận tốc dòng nước là 6 km/h. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v km/h thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E = cv^3t$, trong đó c là hằng số cho trước, E được tính bằng Jun. Hỏi vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là bao nhiêu để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất?

Lời giải

Điều kiện $v > 6$.

Vận tốc của cá khi bơi ngược dòng là $v - 6$ (km/h)

Thời gian cá bơi ngược dòng từ nơi sinh sống đến nơi sinh sản là $t = \dfrac{400}{v-6}$ (giờ)

Khi đó $E = c \cdot v^3 \cdot \dfrac{400}{v-6} = 400c \cdot \dfrac{v^3}{v-6}$ (Jun)

Vì c là hằng số nên $E_{\min}$ khi $\dfrac{v^3}{v-6}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có $\frac{v^3}{v-6}=\frac{v^3-216+216}{v-6}=v^2+6v+36+\frac{216}{v-6}=\left(v^2-18v+81\right)+24v+\frac{216}{v-6}-45$

$=\left(v-9\right)^2+24\left(v-6\right)+\frac{216}{v-6}+99=\left(v-9\right)^2+24\left(v-6+\frac{9}{v-6}\right)+99$.

Nhận xét: $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$ với mọi $a,b\geq 0$ nên $a+b\geq 2\sqrt{ab}$, dấu bằng khi $a=b$.

Áp dụng với $a=v-6>0$ và $b=\frac{9}{v-6}>0$ ta được $v-6+\frac{9}{v-6}\geq 2\sqrt{\left(v-6\right)\cdot\frac{9}{v-6}}=2.3=6$

Lại có $\left(v-9\right)^2\geq 0$ với mọi v, suy ra $\frac{v^3}{v-6}\geq 0+24.6+99=243$. Dấu bằng khi $v=9$ (thỏa mãn).

Vậy vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là 9 km/h thì năng lượng tiêu hao của cá là ít nhất.

--HẾT--

ĐỀ MINH HỌA SỐ 5

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Người ta nghiên cứu về độ bền của hai loại ti vi màn hình phẳng 43 inch của hai hãng sản xuất A và B; thời gian sử dụng của một số chiếc ti vi từ khi mua về đến khi gặp sự cố hỏng hóc đầu tiên được ghi lại ở bảng tần số sau:

Thời gian sử dụng (năm)	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$
Số ti vi của hãng A	6	39	54	30	21
Số ti vi của hãng B	15	75	90	40	30

Hãy tính tần số tương đối của ti vi mỗi hãng theo thời gian sử dụng.

2) Một hộp có 25 quả bóng cùng kích thước được đánh số thứ tự từ 1 đến 25. Xét phép thử "Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp". Tính xác suất của biến cố A: "Lấy được quả bóng được đánh số chia hết cho 3".

Lời giải

1)

Bảng tần số tương đối:

Thời gian sử dụng (năm)	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$
Số ti vi của hãng A	4%	26%	36%	20%	14%
Số ti vi của hãng B	6%	30%	36%	16%	12%

2) Xét phép thử: "Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng từ hộp".

Vì các quả bóng có cùng kích thước nên các kết quả của phép thử là đồng khả năng xảy ra, nên tập hợp các kết quả xảy ra phép thử đó là $\Omega = \{1;2;3;4;...;24;25\}$.

Số phần tử của tập hợp Ω là $n(\Omega) = 25$.

Có kết quả thuận lợi của biến cố A là $3;6;9;12;15;18;21;24$. Suy ra $n(A)=8$.

Vậy xác suất cần tìm là $P(A)=\dfrac{8}{25}=0,32$.

Bài II (1,5 điểm). Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$ với $x>0$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$;

2) Chứng minh $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$;

3) Đặt $P=A.B$. Tìm số nguyên x lớn nhất để $\sqrt{2P}<1$.

Lời giải

3) $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

Để $\sqrt{P}$ có nghĩa thì $P\geq 0$, suy ra $\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\geq 0$

Mà $\sqrt{x}+1>0$ với mọi $x>0$ nên $\sqrt{x}-1\geq 0$ hay $x\geq 1$ (1)

Để $\sqrt{2P}<1$ thì $2P<1$ hay $2P-1=\dfrac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1}-1=\dfrac{2\sqrt{x}-2-\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}<0$

Suy ra $\sqrt{x}-3<0$ hay $x<9$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $1\leq x<9$ (thỏa mãn điều kiện).

Mà x là số nguyên lớn nhất nên chọn $x=8$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Xe máy thứ nhất đi quãng đường từ Hà Nội về Nam Định hết 3 giờ 20 phút. Xe máy thứ hai đi hết 3 giờ 40 phút. Mỗi giờ xe máy thứ nhất đi nhanh hơn xe máy thứ hai là 3 km. Tính tốc độ của mỗi xe máy và quãng đường từ Hà Nội về Nam Định.

2) Khoảng cách giữa hai bến sông A và B là 60 km. Một ca nô đi xuôi dòng từ bến A đến bến B, nghỉ 36 phút rồi đi ngược dòng quay lại bến A. Kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 7 giờ. Tìm tốc độ của ca nô khi nước yên lặng, biết rằng tốc độ nước chảy là 5 km/h.

3) Cho phương trình bậc hai (ẩn x): $x^2-(4m-1)x+3m^2-2m=0$ với m là tham số. Chứng minh rằng phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 với mọi m. Tìm m để có $x_1^2+x_2^2=7$.

Lời giải

1) Gọi tốc độ của xe máy thứ nhất và xe máy thứ hai lần lượt là x, y (km/h; $x > 3, y > 0$).

Vì xe máy thứ nhất đi nhanh hơn xe máy thứ hai là 3 km/h nên ta có phương trình $x - y = 3$ (1)

Trong 3 giờ 20 phút $= \frac{10}{3}$ giờ, xe máy thứ nhất đi được $\frac{10}{3}x$ (km)

Trong 3 giờ 40 phút $= \frac{11}{3}$ giờ, xe máy thứ hai đi được $\frac{11}{3}y$ (km)

Đó là quãng đường từ Hà Nội đến Nam Định nên ta có phương trình $\frac{10}{3}x = \frac{11}{3}y$ hay $10x - 11y = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x - y = 3 \\ 10x - 11y = 0 \end{cases}$. Giải hệ được $\begin{cases} x = 33 \\ y = 30 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy tốc độ của xe máy thứ nhất là 33 km/h và tốc độ của xe máy thứ hai 30 km/h.

Quãng đường từ Hà Nội về Nam Định là $\frac{10}{3} \cdot 33 = 110$ km.

2) Gọi tốc độ của ca nô khi nước yên lặng là x (đơn vị: km/h, điều kiện: $x > 5$)

Do kể từ lúc khởi hành đến khi về tới bến A hết tất cả 7 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x+5} + \frac{60}{x-5} + \frac{3}{5} = 7$$

Giải phương trình này được $x_1 = 20$ (thỏa mãn), $x_2 = -\frac{5}{4}$ (không thỏa mãn).

3) +) Ta có $\Delta = (4m-1)^2 - 4(3m^2 - 2m) = 4m^2 + 1 > 0$ với $\forall m$.

Suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $\forall m$.

+) Theo định lý Viète, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4m - 1 \\ x_1 x_2 = 3m^2 - 2m \end{cases}$.

Khi đó $x_1^2 + x_2^2 = 7$

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7$

$(4m-1)^2 - 2(3m^2 - 2m) = 7$.

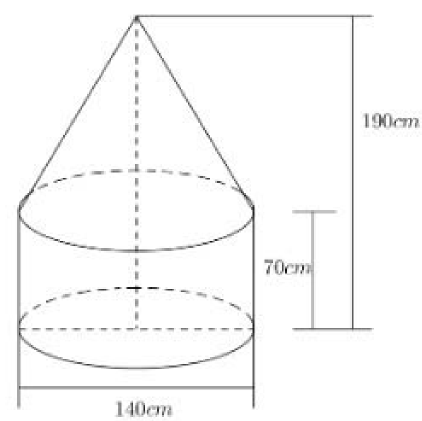
$10m^2 - 4m - 6 = 0$

$5m^2 - 2m - 3 = 0$

Giải phương trình này được $m = 1; m = -\dfrac{3}{5}$.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một dụng cụ gồm một phần có dạng hình trụ và một phần có dạng hình nón có cùng đường kính đáy $d = 140$ cm, chiều cao hình trụ $h_1 = 70$ cm, chiều cao của dụng cụ $h = 190$ cm (xem hình vẽ bên).



a) Tính thể tích của dụng cụ trên;

b) Tính diện tích mặt ngoài của dụng cụ (không tính mặt đáy của dụng cụ).

2) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn $(O; R)$ kẻ tiếp tuyến AB với (O) (B là tiếp điểm). Đường thẳng đi qua B vuông góc với OA tại H và cắt đường tròn (O) tại C. Vẽ đường kính BD. Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm M, N (M nằm giữa A và N).

a) Chứng minh $CD // OA$;

b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O) và tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp;

c) Gọi I là trung điểm của HN. Từ H kẻ đường thẳng vuông góc với BI cắt BM tại E. Chứng minh M là trung điểm của BE.

Lời giải

1) a) Bán kính đáy của hình trụ và hình nón là $140 : 2 = 70$ (cm)

Chiều cao của hình nón trong dụng cụ trên là $190 - 70 = 120$ (cm)

Thể tích của dụng cụ đã cho là $V = 70\pi.70^2 + \dfrac{1}{3}.120.\pi.70^2 = 539000\pi$ (cm³)

Vậy thể tích của dụng cụ đã cho là 539000π cm³.

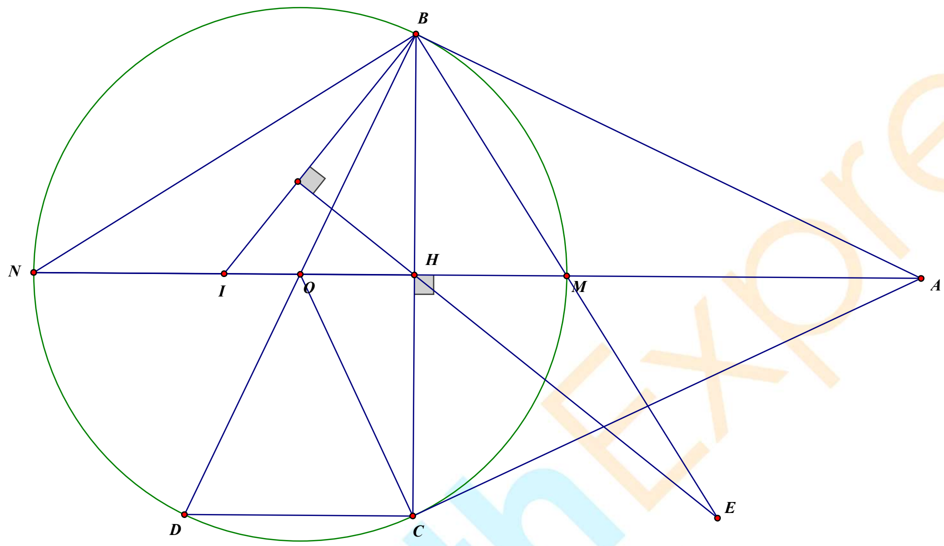
b) Độ dài đường sinh của hình nón trong dụng cụ là $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \sqrt{120^2 + 70^2} = 10\sqrt{193}$ (cm)

Diện tích mặt ngoài dụng cụ (không tính mặt đáy dụng cụ) bằng tổng diện tích xung quanh hình nón và diện tích xung quanh hình trụ:

$$S = \pi.70.10\sqrt{193} + 2.\pi.70.70 = 700\pi\left(\sqrt{193} + 14\right) \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích mặt ngoài cùng dụng cụ là $700\pi\left(\sqrt{193} + 14\right)$ cm².

2)



c) Ta có $\Delta HMB \backsim \Delta HBN$ (g-g) nên $\dfrac{BM}{BN} = \dfrac{HB}{HN}$ (1).

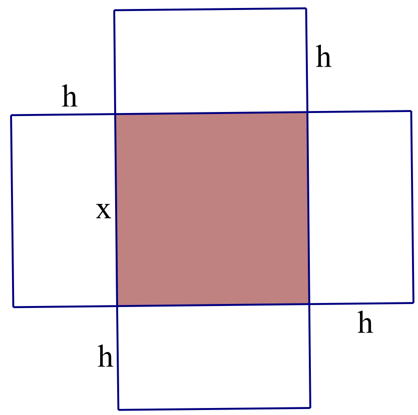
Ta có $\widehat{IBN} + \widehat{IBM} = 90^0$ và $\widehat{HEB} + \widehat{IBM} = 90^0$ nên $\widehat{IBN} = \widehat{HEB}$

Mà $\widehat{BNI} = \widehat{HBM}$ (cùng cộng với $\widehat{HBN}$ bằng 90^0).

Suy ra $\Delta BIN \backsim \Delta EHB$ (g-g) nên $\dfrac{BN}{BE} = \dfrac{NI}{BH}$ (2)

Nhân (1) với (2) ta được $\dfrac{BM}{BN} \cdot \dfrac{BN}{BE} = \dfrac{HB}{HN} \cdot \dfrac{NI}{BH}$. Suy ra $\dfrac{BM}{BE} = \dfrac{IN}{HN} = \dfrac{1}{2}$.

Bài V (0,5 điểm). Một hộp không nắp được làm từ một mảnh bìa cát-tông theo hình vẽ dưới đây. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh x (cm), chiều cao h (cm) và thể tích là 500 (cm³). Tính độ dài cạnh hình vuông x sao cho chiếc hộp làm ra tốn ít bìa cát-tông nhất.



Lời giải

Điều kiện $x > 0$.

Thể tích của chiếc hộp là $hx^2 = 500$ nên $h = \dfrac{500}{x^2}$.

Diện tích bìa cát-tông dùng để làm chiếc hộp là $S = S_{xq} + S_d = h.4x + x^2 = \dfrac{500}{x^2} \cdot 4x + x^2 = x^2 + \dfrac{2000}{x}$

Để chiếc hộp tốn ít bìa cát-tông nhất thì cần tìm $\min S$.

Ta có $S = \left(x^2 - 20x + 100\right) + 20\left(x + \dfrac{100}{x}\right) - 100 = \left(x - 10\right)^2 + 20\left(x + \dfrac{100}{x}\right) - 100$

$$\geq 0 + 20.2.\sqrt{x \cdot \frac{100}{x}} - 100 = 400 - 100 = 300$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 10$ (thỏa mãn).

Vậy cạnh hình vuông bằng 10 cm thì chiếc hộp làm ra tốn ít bìa cát-tông nhất.

--HẾT--

ĐỀ MINH HỌA SỐ 6

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Điểm kiểm tra chất lượng môn toán của các học sinh trong một lớp 9 tại một trường THCS được ghi lại ở bảng sau đây:

6	9	8	9	7,5	8,5	6,25	9,25	8	8
7,5	9	9,5	9,25	6,75	8	9	9	8,75	9,5
8,25	7	9,25	6,5	9	6,75	8,5	8	9,25	7,75

Sau khi tổng kết điểm, các học sinh trong lớp được thầy cô xếp loại A, B, C, D theo điểm kiểm tra mà mỗi bạn đạt được như sau:

Điểm kiểm tra (X)	$6 \le X < 7$	$7 \le X < 8$	$8 \le X < 9$	$9 \le X < 10$
Xếp loại	D	C	B	A

Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên. Cho biết có bao nhiêu học sinh tham gia làm bài kiểm tra và tính tần số tương đối ghép nhóm của nhóm được xếp loại A?

2) Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần và ghi lại kết quả của mỗi lần gieo. Tính xác suất của biến cố C: "Tích các số chấm thu được trong hai lần gieo xúc xắc là một số chính phương".

Lời giải

1) Ta có bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên :

Điểm kiểm tra	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)
Tần số	5	4	9	12

Số học sinh tham gia làm bài kiểm tra là : $5+4+9+12=30$ (học sinh)

Có 12 học sinh được xếp loại A (từ 9 điểm đến dưới 10 điểm) nên tần số tương đối ghép nhóm của nhóm được xếp loại A là : $f=\dfrac{12.100}{30}\%=40\%$

Vậy tần số tương đối ghép nhóm của nhóm được xếp loại A là 40%.

2) Kí hiệu $(x,\ y)$ là kết quả số chấm thu được khi gieo con xúc xắc. Trong đó:

x là số chấm thu được khi gieo con xúc xắc lần 1; y là số chấm thu được khi gieo con xúc xắc lần 2.

Ta lập được bảng sau:

Lần 1 \ Lần 2	1	2	3	4	5	6
1	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(1,5)$	$(1,6)$
2	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(2,5)$	$(2,6)$
3	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)$	$(3,5)$	$(3,6)$
4	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$	$(4,6)$
5	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$	$(5,6)$
6	$(6,1)$	$(6,2)$	$(6,3)$	$(6,4)$	$(6,5)$	$(6,6)$

Mỗi ô trong bảng trên là một kết quả có thể xảy ra. Vì con xúc xắc cân đối, đồng chất nên các kết quả có thể xảy ra là đồng khả năng.

Không gian mẫu là tập hợp 36 ô của bảng trên. Do đó $n(\Omega)=36$.

Xét biến cố C: "Tích các số chấm thu được trong hai lần gieo xúc xắc là một số chính phương".

Có 8 kết quả thuận lợi để biến cố C xảy ra là: $(1;1);(2;2);(3;3);(4;4);(5;5);(6;6);(1;4);(4;1)$.

Do đó xác suất của biến cố C là: $P(C)=\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$.

Vậy xác suất của biến cố C là $P(C)=\dfrac{2}{9}$.

Bài II (1,5 điểm). Cho biểu thức $P=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}-\dfrac{3x+9}{x-9}\ (x\ge 0;\ x\ne 9)$

1) Rút gọn biểu thức P;

2) Tìm giá trị của x để $P=\dfrac{1}{3}$;

3) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Lời giải

1) Với $x \ge 0; x \ne 9$ ta có:

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{x-9}$$
$$= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{3x+9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-3\right) + 2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+3\right) - (3x+9)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$
$$= \frac{x - 3\sqrt{x} + 2x + 6\sqrt{x} - 3x - 9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$
$$= \frac{3\sqrt{x}-9}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)}$$
$$= \frac{3\left(\sqrt{x}-3\right)}{\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}+3\right)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$$

Vậy với $x \ge 0; x \ne 9$ thì $P = \dfrac{3}{\sqrt{x}+3}$

2) Với $x \ge 0; x \ne 9$ ta có:

$P = \dfrac{1}{3}$ suy ra $\dfrac{3}{\sqrt{x}+3} = \dfrac{1}{3}$

$$\sqrt{x}+3 = 9$$
$$\sqrt{x} = 6$$
$x = 36$ (thoả mãn điều kiện xác định).

Vậy với $x = 36$ thì $P = \dfrac{1}{3}$.

3) Với $x \ge 0; x \ne 9$ ta có $\sqrt{x} \ge 0$. Suy ra $\sqrt{x}+3 \ge 3 > 0$.

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{x}+3} \le \dfrac{1}{3}$. Suy ra $\dfrac{3}{\sqrt{x}+3} \le 1$ hay $P \le 1$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x}=0$ suy ra $x=0$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy với $x=0$ thì giá trị lớn nhất của P bằng 1.

Bài III (2,5 điểm).

1) Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sông có tốc độ của dòng nước là 2 km/h. Tính tốc độ của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian tàu đi xuôi dòng ít hơn thời gian tàu đi ngược dòng 1 giờ.

2) Anh Bình đã đến siêu thị để mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện với tổng số tiền theo giá niêm yết là 850 ngàn đồng. Tuy nhiên, thực tế khi trả tiền, nhờ siêu thị khuyến mãi để tri ân khách hàng nên giá của bàn ủi và quạt điện đã được giảm bớt lần lượt là 10% và 20% so với giá niêm yết. Do đó, số tiền anh Bình phải trả ít hơn 125 ngàn đồng nếu mua so với giá niêm yết. Tính giá niêm yết của từng loại sản phẩm mà anh Bình đã mua.

3) Cho phương trình $x^2-(m+2)x+m-3=0$ (ẩn x, tham số m). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2>5$.

Lời giải

1) Gọi tốc độ của tàu tuần tra khi nước yên lặng là x (Đơn vị: km/h. Điều kiện: $x>2$).

Tốc độ của tàu khi chạy xuôi dòng là $x+2$ (km/h)

Tốc độ của tàu khi chạy ngược dòng là $x-2$ (km/h)

Thời gian tàu tuần tra chạy ngược dòng là $\dfrac{60}{x-2}$ (giờ).

Thời gian tàu tuần tra chạy xuôi dòng là $\dfrac{48}{x+2}$ (giờ).

Vì thời gian đi xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{60}{x-2}-\frac{48}{x+2}=1$$
$$\frac{60(x+2)}{(x-2)(x+2)}-\frac{48(x-2)}{(x-2)(x+2)}=1$$
$$\frac{60x+120-48x+96}{(x-2)(x+2)}=1$$
$$12x+216=(x-2)(x+2)$$
$$12x+216=x^2-4$$
$$x^2-12x-220=0$$
$$x^2-22x+10x-220=0$$
$$x(x-22)+10(x-22)=0$$
$$(x-22)(x+10)=0$$

Suy ra $x-22=0$ hoặc $x+10=0$

TH1: $x-22=0$ suy ra $x=22$ (thoả mãn điều kiện xác định)

TH2: $x+10=0$ suy ra $x=-10$ (không thoả mãn điều kiện xác định)

Vậy tốc độ của tàu tuần tra khi nước yên lặng là 22 km/h.

2) Gọi x và y lần lượt là giá niêm yết anh Bình mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện.

(Đơn vị: ngàn đồng, điều kiện: $0<x;y<850$)

Tổng giá niêm yết khi mua một cái bàn ủi và một cái quạt điện là 850 ngàn đồng, nên ta có phương trình $x+y=850$ (1)

Giá tiền mua một cái bàn ủi khi được giảm bớt 10% so với giá niêm yết là:

$$x-10\%x=90\%x=0,9x \text{ (ngàn đồng)}$$

Giá tiền mua một cái quạt điện khi được giảm bớt 20% so với giá niêm yết là:

$$y-20\%y=80\%y=0,8y \text{ (ngàn đồng)}$$

Do đó, số tiền anh Bình phải trả ít hơn 125 ngàn đồng nếu mua so với giá niêm yết

Nên ta có phương trình: $0,9x+0,8y=850-125$ hay $0,9x+0,8y=725$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+y=850 & (1) \\ 0,9x+0,8y=725 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có $x=850-y$ (3)

Thay $x=850-y$ vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned} 0,9(850-y)+0,8y &= 725 \\ 765-0,9y+0,8y &= 725 \\ -0,1y &= -40 \\ y &= 400 \text{ (thỏa mãn điều kiện)} \end{aligned}$$

Thay $y=400$ vào phương trình (3) ta được: $x=850-400=450$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy giá niêm yết khi mua một cái bàn ủi là 450 ngàn đồng và giá niêm yết cho một chiếc quạt điện là 400 ngàn đồng.

3) Xét phương trình $x^2-(m+2)x+m-3=0$ (*).

Ta có $\Delta=\left[-\left(m+2\right)\right]^2-4.1.\left(m-3\right)=m^2+4m+4-4m+12=m^2+16>0$ với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Do đó phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Theo định lí Viète ta có $x_1+x_2=m+2;\ x_1.x_2=m-3$

Suy ra $x_1+x_2+2x_1x_2=m+2+2\left(m-3\right)=m+2+2m-6=3m-4$

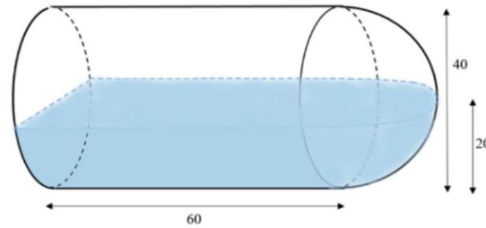
Theo bài ra ta có $x_1+x_2+2x_1x_2>5$ suy ra $3m-4>5$.

Do đó $3m>9$ hay $m>3$.

Vậy với $m>3$ thì thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Một bình nước có dạng hình trụ kết hợp với nửa hình cầu có các kích thước (Đơn vị: cm) như hình bên. Khi bình nước nằm ngang, mực nước trong bình cao 20cm.



a) Hỏi thể tích nước trong bình là bao nhiêu lít?

(*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

b) Nếu đặt bình nước thẳng đứng sao cho phần nửa hình cầu ở trên thì chiều cao mực nước trong bình là bao nhiêu centimét? (*Kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

2) Từ điểm M nằm ngoài đường tròn $(O;R)$ vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). Gọi giao điểm của MO và AB là điểm H.

a) Chứng minh tứ giác $MAOB$ là tứ giác nội tiếp;

b) Đường thẳng vuông góc với OA tại O cắt AB và MB lần lượt tại I, S. Chứng minh tam giác SOM cân và $SI + SO = MB$;

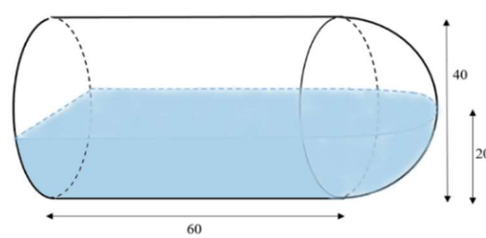
c) Gọi G là điểm đối xứng với điểm O qua điểm S, MO cắt AG ở E. Chứng minh rằng $EH.EO < EG^2$.

Lời giải

1)

a) Thể tích phần hình trụ của bình là $\pi.20^2.60 = 24\ 000\pi$ (cm³)

Thể tích phần nửa hình cầu của bình là :



$$\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.20^3 = \frac{16\ 000}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích bình nước là $24\ 000\pi + \frac{16\ 000}{3}\pi = \frac{88\ 000}{3}\pi$ (cm³)

Do đó thể tích nước trong bình là $\frac{1}{2}.\frac{88\ 000}{3}\pi = \frac{44\ 000}{3}\pi$ (cm³) $= \frac{44}{3}\pi$ (dm³) $\approx 46{,}1$ (l)

Vậy thể tích nước trong bình là khoảng $46{,}1$ lít.

b) Vì thể tích của nước nhỏ hơn thể tích phần hình trụ của bình $\left(\frac{44\ 000}{3}\pi < 24\ 000\pi\right)$ suy ra khi dựng thẳng đứng bình nước thì lúc này phần nước trong bình sẽ có dạng hình trụ và chiều cao của mực nước sẽ nhỏ hơn chiều cao của phần hình trụ của bình.

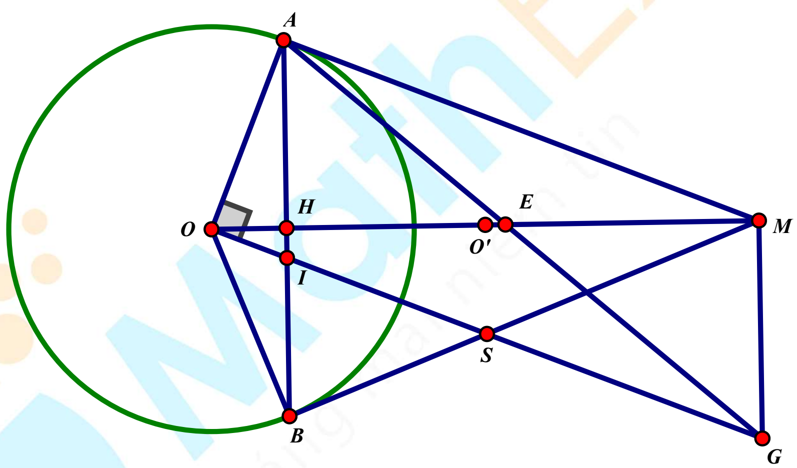
Gọi h_1 (cm) là chiều cao của mực nước sau khi đã dựng thẳng đứng bình nước $(h_1 > 0)$.

Do thể tích nước không thay đổi nên ta có $V_{\text{nước}} = \pi.20^2.h_1 = \frac{44\ 000}{3}\pi$ (cm³)

Suy ra $h_1 = \left(\frac{44\ 000}{3}\pi\right):\left(\pi.20^2\right) = \frac{110}{3}(\text{cm}) \approx 36,7$ (cm) (thỏa mãn)

Vậy khi đặt bình nước thẳng đứng thì chiều cao mực nước trong bình là khoảng $36,7$ cm.

2)



a) Gọi O' là trung điểm của OM. Chứng minh được tứ giác $MAOB$ nội tiếp đường tròn tâm O', bán kính $\frac{1}{2}OM$.

b) Xét ΔOAB cân tại O có OM là phân giác của $\widehat{AOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên đồng thời là đường cao, suy ra $OM \perp AB$ tại H.

Chứng minh được $\widehat{SOM} = \widehat{OAB}$ (vì cùng phụ với $\widehat{AOH}$) (1)

Xét đường tròn (O') có $\widehat{OAB}=\widehat{OMB}=\widehat{OMS}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{OB}$) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{SOM}=\widehat{OMS}$. Do đó ΔSOM cân tại S (điều phải chứng minh).

Suy ra $SO=SM$ (*)

Vì $MA\perp OA$ và $SO\perp OA$ (giả thiết) nên $MA//SO$. Suy ra $\widehat{SIB}=\widehat{MAB}$ (hai góc đồng vị) (3)

Mà $MA=MB$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau) nên ΔMAB cân tại M.

Suy ra $\widehat{MAB}=\widehat{SBI}$ (4). Từ (3), (4) suy ra $\widehat{SIB}=\widehat{SBI}$ hay ΔSBI cân S. Do đó $SB=SI$ (**)

Từ (*) và (**) suy ra $SI+SO=SB+SM=MB$ (điều phải chứng minh).

c) Ta có $SO=SG$ (giả thiết) và $SO=SM$ (chứng minh trên) nên $SO=SG=SM=\dfrac{1}{2}OG$

Suy ra ΔOMG vuông tại M (trung tuyến MS bằng một nửa cạnh tương ứng thì tam giác đó vuông). Do đó $GM\perp OM$, mà $AH\perp OM$ (chứng minh trên) nên $GM//AH$.

Xét ΔAEH có $GM//AH$, theo hệ quả định lí Thalès ta có $\dfrac{GE}{EA}=\dfrac{ME}{EH}$ (5)

Xét ΔAEM có $GO//MA$ (chứng minh trên) nên theo hệ quả định lý Thalès ta có $\dfrac{GE}{EA}=\dfrac{OE}{ME}$ (6)

Từ (5), (6) suy ra $\dfrac{ME}{EH}=\dfrac{OE}{ME}$ nên $EO.EH=EM^2$ (7)

Mặt khác ΔGME vuông tại M (chứng minh trên) nên $EM<EG$ (cạnh góc vuông nhỏ hơn cạnh huyền trong tam giác vuông), suy ra $EM^2<EG^2$ (8)

Từ (7) và (8) suy ra $EO.EH<EG^2$ (điều phải chứng minh).

Bài V (0,5 điểm). Một miếng bìa hình tam giác đều ABC, cạnh bằng 16. Học sinh cắt một hình chữ nhật $MNPQ$ từ miếng bìa trên để làm biển trông xe cho lớp trong buổi ngoại khóa (với M,N thuộc cạnh BC, P và Q tương ứng thuộc cạnh AC và AB). Hỏi diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

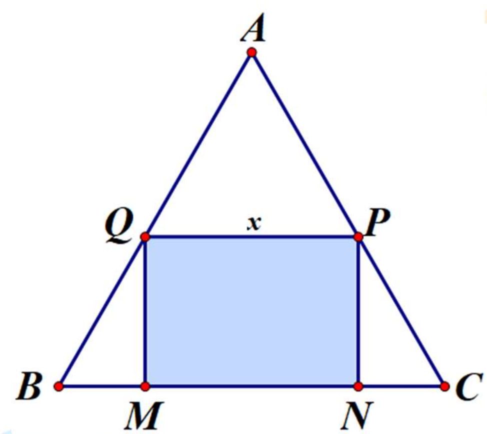
Đặt $MN = x\ (0 < x < 16)$. Vì $MNPQ$ là hình chữ nhật nên $MN = PQ = x$ và $QP // MN$.

Xét ΔABC có $QP // BC$ (chứng minh trên) nên $\frac{QB}{AB} = \frac{PC}{AC}$ (định lí Thalès)

Vì ΔABC đều nên $AB = AC$ suy ra $QB = PC$.

Vì ΔABC đều nên $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = 60^o$ hay $\widehat{QBM} = \widehat{PCN} = 60^o$

Xét ΔQBM và ΔPCN có:



$\widehat{QBM} = \widehat{PCN}$ (chứng minh trên);

$QB = PC$ (chứng minh trên)

$\widehat{QMB} = \widehat{PNC} = 90°$ (do $MNPQ$ là hình chữ nhật)

Suy ra $\Delta QBM = \Delta PCN$ (cạnh huyền – góc nhọn)

do đó $BM = NC$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có $BM + MN + NC = BC$

$BM + x + BM = 16$. Suy ra $BM = \frac{16 - x}{2}$

Xét ΔQBM vuông tại M có $\tan \widehat{QBM} = \frac{QM}{BM}$ (tỉ số lượng giác trong tam giác vuông)

Suy ra $QM = BM.\tan \widehat{QBM} = \frac{16 - x}{2}.\tan 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}.(16 - x)$

Do đó $S_{MNPQ} = QM.MN = \frac{\sqrt{3}}{2}.(16 - x).x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-x^2 + 16x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}(x - 8)^2 + 32\sqrt{3} \le 32\sqrt{3}$

Dấu "=" xảy ra khi: $(x - 8)^2 = 0$ suy ra $x - 8 = 0$ hay $x = 8$ (thỏa mãn). Do đó $MN = x = 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích hình chữ nhật $MNPQ$ là $32\sqrt{3}$.

--HẾT--

ĐỀ MINH HỌA SỐ 7

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Nhà máy kiểm tra 100 sản phẩm của một dây chuyền đóng gói kẹo đang trong thời gian chạy thử nghiệm. Tiêu chuẩn là mỗi gói nặng 500 gam. Những gói kẹo có khối lượng chênh lệch không quá 10 gam so với tiêu chuẩn được xem là đạt yêu cầu. Kết quả kiểm tra được thống kê trong bảng sau:

Khối lượng (g)	480	490	495	500	505	520	Tổng
Tần số	2	2	30	46	15	5	N = 100

Cho biết trong 100 gói kẹo được kiểm tra, có bao nhiêu gói đã đạt yêu cầu? Hãy vẽ biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn dữ liệu cho trong bảng.

2) Bạn An gieo một đồng xu cân đối, đồng chất và bạn Bình gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Tính xác suất của biến cố E: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 3".

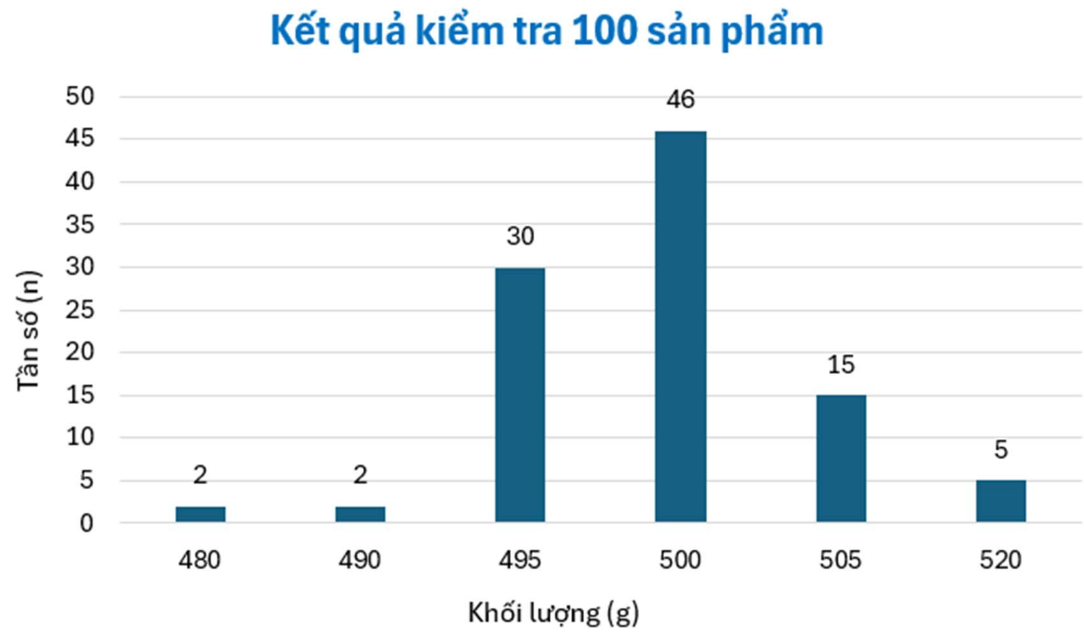
Lời giải

1) Dựa vào bảng tần số trên, ta thấy trong 100 gói kẹo được kiểm tra khối lượng các gói đạt yêu cầu là 490g, 495g, 500g, 505 g.

Do vậy số gói kẹo đạt yêu cầu là $2+30+46+15=93$ (gói)

Vậy trong 100 gói kẹo được kiểm tra, có 93 gói đạt yêu cầu.

Dựa vào bảng tần số, ta có biểu đồ tần số dạng cột biểu diễn dữ liệu trong bảng như sau:



2) Từ đề bài, ta có phần mô tả cho không gian mẫu như sau:

An \ Bình	1	2	3	4	5	6
S	(S, 1)	(S, 2)	(S, 3)	(S, 4)	(S, 5)	(S, 6)
N	(N, 1)	(N, 2)	(N, 3)	(N, 4)	(N, 5)	(N, 6)

Có 12 kết quả có thể xảy ra. Vì đồng xu và con xúc xắc đều cân đối và đồng chất nên 12 kết quả này là đồng khả năng. Do đó $n(\Omega)=12$.

Có 3 kết quả thuận lợi cho biến cố E: "Đồng xu xuất hiện mặt sấp và số chấm xuất hiện trên con xúc xắc lớn hơn 3", đó là (S, 4); (S, 5); (S, 6).

Suy ra xác suất của biến cố E là $P(E)=\frac{3}{12}=0,25$

Vậy xác suất của biến cố E là $0,25$.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$ và $B=\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}-6}+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}\right):\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$ với $x>0; x\neq 9$

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$;

2) Chứng minh rằng $B=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$;

3) Tìm x để biểu thức $P=A.B$ có giá trị là số nguyên tố.

Lời giải

1) Học sinh tính được $x=16$ thì $A=\dfrac{6}{5}$.

2) Với $x>0;\ x\neq 9$ rút gọn biểu thức B được : $B=\dfrac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$

3) Với $x>0; x\neq 9$ ta có:

$$P=A.B=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}.\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}=\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1}=\frac{\sqrt{x}+1+3}{\sqrt{x}+1}=1+\frac{3}{\sqrt{x}+1}$$

Với $x>0$ ta có $\sqrt{x}>0$ suy ra $\sqrt{x}+1\geq 1$. Do đó $\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\leq 3$

Mà $\sqrt{x}+1\geq 1>0$ suy ra $\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}>0$. Nên $0<\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\leq 3$.

Suy ra $1<1+\dfrac{3}{\sqrt{x}+1}\leq 4$ hay $1<P\leq 4$.

Để P là số nguyên tố thì $P=2$ hoặc $P=3$

Với $P=2$ học sinh giải được $x=4$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Với $P=3$ học sinh giải được: $x=\dfrac{1}{4}$ (thỏa mãn điều kiện xác định)

Vậy với $x\in\left\{4;\dfrac{1}{4}\right\}$ thì biểu thức P có giá trị là số nguyên tố.

Bài III (2,5 điểm).

1) Một phòng họp ban đầu có 104 ghế được xếp thành các dãy và số ghế trong mỗi dãy đều bằng nhau. Có một lần phòng họp phải cất bớt 2 dãy ghế và mỗi dãy còn lại xếp thêm 1 ghế (số ghế trong các dãy vẫn bằng nhau) để vừa đủ chỗ ngồi cho 120 đại biểu. Hỏi ban đầu trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

2) Một chuyên gia dinh dưỡng đề xuất cho khách hàng một chế độ ăn đặc biệt bao gồm hai loại thực phẩm A và B. Chế độ ăn phải có đúng 350 đơn vị canxi và 180 đơn vị sắt. Số lượng đơn vị của canxi và sắt trong 100 gam thực phẩm mỗi loại được cho trong bảng sau:

	Thực phẩm A	Thực phẩm B
Canxi	30	10
Sắt	10	10

Hỏi khách hàng trên cần ăn bao nhiêu gam thực phẩm A và B theo chế độ đó ?

3) Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m-3=0$ (ẩn x, tham số m). Tìm giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm đối nhau.

Lời giải

1) Gọi số dãy ghế ban đầu trong phòng họp là x (dãy ghế, $x\in\mathbb{N}^*$, $x>2$)

Số ghế ở mỗi dãy ban đầu là $\dfrac{104}{x}$ (ghế)

Sau khi cất bớt 2 dãy ghế, số dãy ghế còn lại là $x-2$ (dãy ghế)

Sau khi cất bớt 2 dãy ghế, số ghế ở mỗi dãy để vừa đủ chỗ ngồi cho 120 đại biểu là $\dfrac{120}{x-2}$ (ghế)

Sau khi cất bớt 2 dãy ghế, mỗi dãy còn lại xếp thêm 1 ghế nên ta có phương trình:

$$\frac{104}{x}+1=\frac{120}{x-2}$$

Học sinh giải phương trình trên được $x = 26$ (thỏa mãn điều kiện) hoặc $x = -8$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy ban đầu trong phòng họp có 26 dãy ghế.

2) Gọi x (g) và y (g) $(x;\ y > 0)$ lần lượt là khối lượng thực phẩm A và B mà khách hàng trên cần ăn theo chế độ.

Trong 100 gam thực phẩm A có 30 đơn vị canxi và 10 đơn vị sắt nên trong x gam thực phẩm A có $\frac{30x}{100}$ đơn vị canxi và $\frac{10x}{100}$ đơn vị sắt.

Trong 100 gam thực phẩm B có 10 đơn vị canxi và 10 đơn vị sắt nên trong y gam thực phẩm B có $\frac{10y}{100}$ đơn vị canxi và $\frac{10y}{100}$ đơn vị sắt.

Chế độ ăn phải có đúng 350 đơn vị canxi nên ta có: $\frac{30x}{100} + \frac{10y}{100} = 350 \quad (1)$

Chế độ ăn phải có đúng 180 đơn vị sắt nên ta có: $\frac{10x}{100} + \frac{10y}{100} = 180 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{30x}{100} + \frac{10y}{100} = 350 & (1) \\ \frac{10x}{100} + \frac{10y}{100} = 180 & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} 0,3x + 0,1y = 350 \\ 0,1x + 0,1y = 180 \end{cases} \quad \begin{cases} 0,2x = 170 \\ x + y = 1800 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 850 \\ y = 950 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy khách hàng trên cần ăn 850g thực phẩm A và 950g thực phẩm B.

3) Xét phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0$ (*)

Ta có: $\Delta' = \left[-(m-1)\right]^2 - 1.(m-3) = m^2 - 3m + 4 = m^2 - 2.\frac{3}{2}m + \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \left(m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$

Vì với mọi $m \in \mathbb{R}$ ta có $\left(m - \frac{3}{2}\right)^2 \geq 0$

Nên $\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}>0$ hay $\Delta'>0$

Suy ra phương trình (*) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1; x_2 với mọi $m\in\mathbb{R}$.

Theo định lí Viète ta có: $x_1+x_2=2(m-1)$

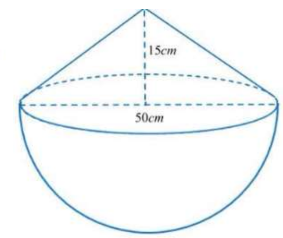
Để phương trình (*) có hai nghiệm đối nhau thì $x_1+x_2=0$.

Suy ra $2(m-1)=0$ hay $m=1$

Vậy khi $m=1$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm đối nhau.

Bài IV (4,0 điểm).

1) Nhà bạn Ánh có một thúng gạo vun đầy. Thúng có dạng nửa hình cầu với đường kính 50 cm, phần gạo vun lên có dạng hình nón cao 15 cm.



a) Tính thể tích phần gạo trong thúng. (*coi bề dày của vỏ thúng không đáng kể*).

b) Nhà bạn Ánh dùng lon sữa bò cũ có dạng hình trụ (bán kính đáy 5 cm, chiều cao 15 cm) để đong gạo mỗi ngày. Biết mỗi ngày nhà bạn Ánh ăn 5 lon gạo và mỗi lần đong thì lượng gạo chiếm 90% thể tích của lon. Hỏi với lượng gạo ở thúng trên thì nhà bạn Ánh có thể ăn nhiều nhất là bao nhiêu ngày?

2) Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

a) Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

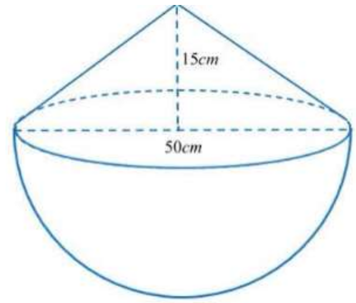
b) Kẻ dây cung CD song song với OA. Chứng minh ba điểm B, O, D thẳng hàng và $BC^2=2AH.CD$

c) Đường thẳng AO cắt đường tròn (O) tại hai điểm P, Q (P nằm giữa A và O).

Chứng minh rằng $\frac{1}{PH}-\frac{2}{PQ}=\frac{1}{PA}$.

Lời giải

1)



a) Bán kính của nửa hình cầu là $50:2=25\,(\text{cm})$

Thể tích của nửa hình cầu là $\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.25^3=\frac{31\,250}{3}\pi$ (cm³)

Thể tích của hình nón là $\frac{1}{3}\pi.25^2.15=3125\pi$ (cm³)

Thể tích phần gạo trong thúng là $\frac{31250}{3}\pi+3125\pi=\frac{40\,625}{3}\pi$ (cm³)

Vậy thể tích phần gạo trong thúng là $\frac{40\,625}{3}\pi$ cm³.

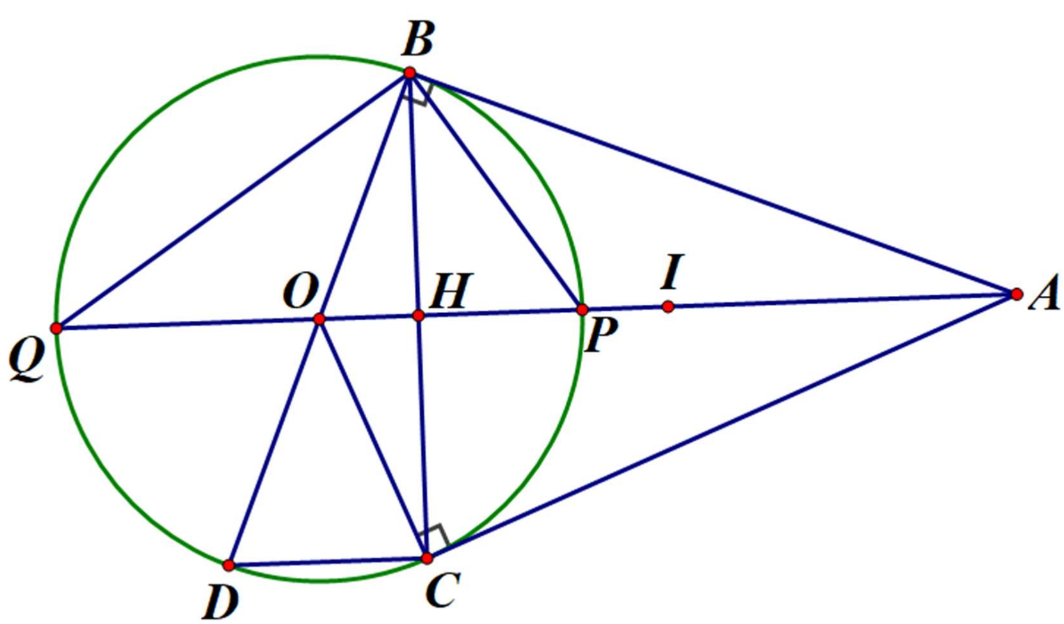
b) Thể tích của lon sữa bò để đong gạo mỗi ngày là: $\pi.5^2.15=375\pi$ (cm³)

Thể tích gạo đong mỗi lần là: $375\pi.90\%=337,5\pi$ (cm³)

Số ngày nhiều nhất nhà bạn Ánh có thể ăn là: $\frac{40\,625}{3}\pi:(5\,.337,5\pi)\approx 8$ (ngày)

Vậy với lượng gạo ở thúng trên thì nhà bạn Ánh có thể ăn nhiều nhất là 8 ngày.

2)



a) Gọi I là trung điểm của OA.

Chứng minh được tứ giác $ABOC$ nội tiếp đường tròn tâm I, bán kính bằng $\frac{1}{2}OA$ (điều phải chứng minh).

b) Chứng minh được $OA \perp BC$ và H là trung điểm của BC.

Mà $CD // OA$ (giả thiết) nên $CD \perp BC$ (quan hệ từ vuông góc đến song song)

Suy ra $\widehat{BCD} = 90^0$ mà $\widehat{BCD}$ là góc nội tiếp chắn $\overset{\frown}{BD}$ của (O) nên BD là đường kính của (O).

Suy ra BD đi qua tâm O hay ba điểm B, O, D thẳng hàng (điều phải chứng minh).

Chứng minh được $\widehat{BAH} = \widehat{CBD}$ (cùng phụ $\widehat{ABH}$)

Từ đó chứng minh được $\Delta BCD \backsim \Delta AHB\,(g.g)$ nên $\frac{BC}{AH} = \frac{CD}{BH}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ)

hay $BC.BH = AH.CD$

Lại có H là trung điểm của BC (chứng minh trên)

Suy ra $BH = \frac{BC}{2}$ nên $BC.\frac{BC}{2} = AH.CD$ hay $BC^2 = 2AH.CD$ (điều phải chứng minh).

c) Ta có: $\widehat{ABP} + \widehat{PBO} = \widehat{ABO} = 90^0$ (vì tam giác OBA vuông tại B) (1)

$\widehat{PBH} + \widehat{HPB} = 90^0$ (vì tam giác PBH vuông tại H) (2)

Mà tam giác OPB cân tại O nên $\widehat{PBO} = \widehat{OPB} = \widehat{HPB}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{ABP} = \widehat{PBH}$ hay BP là phân giác của $\widehat{ABH}$

Xét ΔABH có BP là phân giác của $\widehat{ABH}$ (chứng minh trên)

Ta có $\frac{PH}{PA} = \frac{BH}{BA}$ (tính chất đường phân giác trong của tam giác) (4)

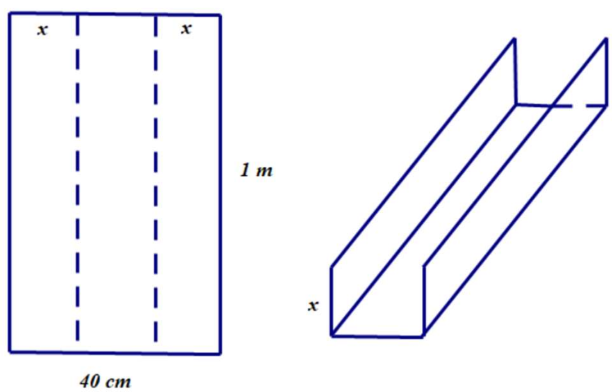
Chứng minh được $\Delta OHB \backsim \Delta OBA\,(g.g)$ nên $\frac{BH}{BA} = \frac{OH}{OB}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) (5)

Từ (4) và (5) suy ra $\dfrac{PH}{PA}=\dfrac{OH}{OB}$ mà $OB=OP$ nên $\dfrac{PH}{PA}=\dfrac{OH}{OP}$

Ta có $\dfrac{2PH}{PQ}=\dfrac{PH}{OP}$ (do $PQ=2OP$). Khi đó $\dfrac{PH}{PA}+\dfrac{2PH}{PQ}=\dfrac{OH}{OP}+\dfrac{PH}{OP}=1$ suy ra $\dfrac{1}{PA}+\dfrac{2}{PQ}=\dfrac{1}{PH}$

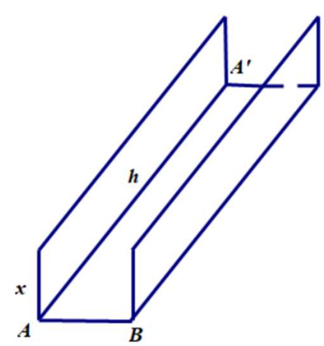
Hay $\dfrac{1}{PH}-\dfrac{2}{PQ}=\dfrac{1}{PA}$ (điều phải chứng minh).

Bài V (0,5 điểm). Để xử lí một chiếc máng thoát nước, người thợ từ 1 tấm tôn hình chữ nhật kích thước 1m x 40cm, đánh dấu 2 đường chia và gò lại thành 1 chiếc máng có dạng hình hộp chữ nhật (*thiếu mặt đáy trên và 2 mặt bên*) như hình vẽ.



Em hãy giúp người thợ tìm giá trị của x (đơn vị cm) để thể tích khối hộp chữ nhật là lớn nhất.

Lời giải



Gọi các điểm A, B, A' như hình vẽ.

Ta có: 1m = 100cm

Từ giả thiết suy ra: $AB=40-2x$ (cm), với điều kiện $0<x<20$

Diện tích đáy của hình hộp chữ nhật là:

$S=x.AB=x(40-2x)=-2x^2+40x$ (cm²)

Thể tích của khối hộp chữ nhật là $V=h.S$

Trong đó $h=AA'=100$ cm không đổi nên V đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi S đạt giá trị lớn nhất.

Ta có: $S=-2x^2+40x=-2\left(x^2-20x+100\right)+200=-2\left(x-10\right)^2+200$

Vì $\left(x-10\right)^2\geq 0\ \forall x$ nên $-2\left(x-10\right)^2\leq 0\ \forall x$, do đó $S=-2\left(x-10\right)^2+200\leq 200$.

Dấu "=" xảy ra khi $x-10=0$, tức là $x=10$ (thỏa mãn điều kiện).

S đạt giá trị lớn nhất là $200\,\text{cm}^2$ khi $x=10\,\text{cm}$.

Vậy $x=10\,\text{cm}$ thì thể tích khối hộp chữ nhật là lớn nhất.

--HẾT--

ĐỀ MINH HỌA SỐ 8

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Bạn Thảo phỏng vấn một số bạn học sinh cùng trường về màu mực mỗi bạn yêu thích nhất. Kết quả được cho ở bảng sau:

Màu mực	Xanh đen	Đen	Tím đậm	Tím hồng
Tần số	18	6	16	10

Lập bảng tần số tương đối và vẽ biểu đồ tần số tương đối dạng cột để biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn Thảo.

2) Bạn Tuấn và bạn Hùng cùng chơi cờ và tung một đồng xu (hai mặt đồng xu cân đối và đồng chất) để biết ai được đi đầu tiên. Nếu tung được mặt sấp (S) thì bạn Tuấn được đi trước, nếu tung được mặt ngửa (N) thì bạn Hùng được đi trước. Hai bạn chơi 2 ván cờ. Tính xác suất để bạn Tuấn được đi trước cả hai lần.

Lời giải

1) Mẫu số liệu thống kê trên có $18+6+16+10=50$ (số liệu)

Tần số tương đối của học sinh thích mực xanh đen là $\frac{18.100}{50}\%=36\%$

Tần số tương đối của học sinh thích mực đen là $\frac{6.100}{50}\%=12\%$

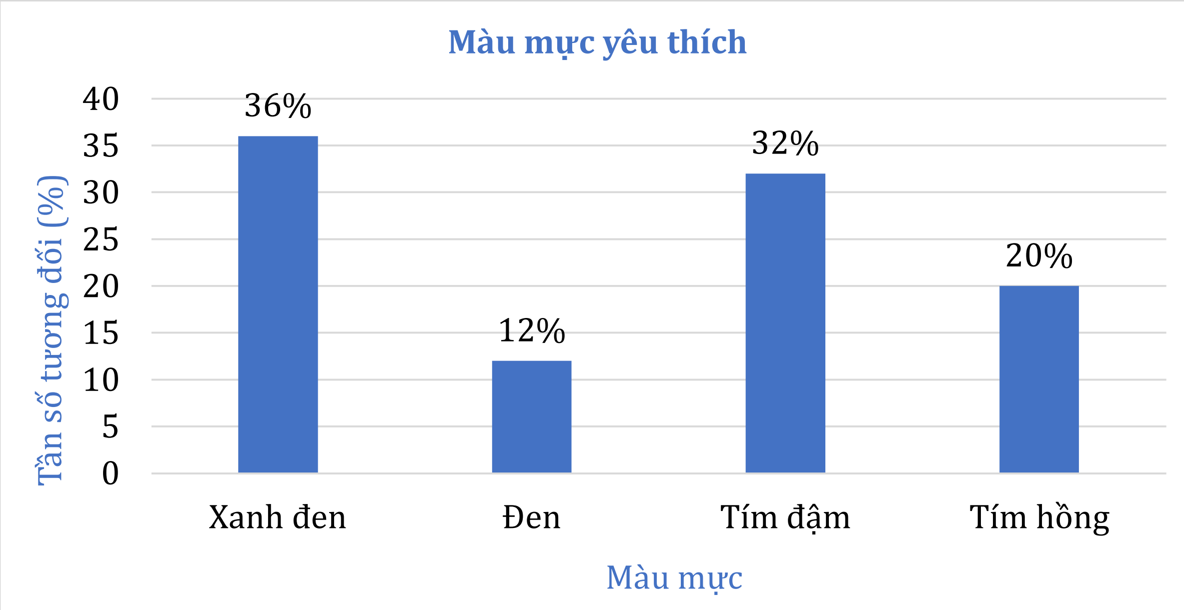
Tần số tương đối của học sinh thích mực tím đậm là $\frac{16.100}{50}\%=32\%$

Tần số tương đối của học sinh thích mực tím hồng là $\frac{10.100}{50}\%=20\%$

Do đó ta có bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê trên như sau:

Màu mực	Xanh đen	Đen	Tím đậm	Tím hồng
Tần số tương đối (%)	36	12	32	20

Từ bảng tần số tương đối của mẫu số liệu thống kê, ta vẽ được biểu đồ tần số tương đối biểu diễn mẫu số liệu điều tra của bạn Thảo như sau:



2) Có 4 kết quả có thể xảy ra ở hai lần tung đồng xu là $S-S; S-N; N-S; N-N$.

Vì hai mặt đồng xu cân đối và đồng chất nên 4 kết quả này là đồng khả năng.

Bạn Tuấn sẽ được đi trước cả hai lần nếu cả hai lần tung đồng xu đều được mặt sấp.

Xét biến cố A: "Cả hai lần tung đồng xu đều được mặt sấp".

Có 1 kết quả thuận lợi để biến cố A xảy ra là $S-S$

Do đó xác suất của biến cố A là $P(A)=\dfrac{1}{4}=0,25$.

Vậy xác suất để bạn Tuấn được đi trước cả hai lần là 0,25.

Bài II (1,5 điểm). Với $x>0$, cho hai biểu thức $A=\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=64$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Tìm x để $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

1) Thay $x=64$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{2+\sqrt{64}}{\sqrt{64}}=\dfrac{2+8}{8}=\dfrac{10}{8}=\dfrac{5}{4}$.

Vậy với $x=64$ thì $A=\dfrac{5}{4}$.

2) Với $x>0$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}+\frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}+\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{x-1+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}.$$

Vậy với $x>0$ thì $B=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$.

3) Với $x>0$, ta có $\dfrac{A}{B}=\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}:\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{2+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

Ta có $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}$ hay $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}>\dfrac{3}{2}$

$$\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}-\frac{3}{2}>0$$

$$\frac{2\left(\sqrt{x}+1\right)}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0$$

$$\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}>0$$

Mà với $x>0$ thì $2\sqrt{x}>0$. Suy ra $2-\sqrt{x}>0$. Do đó $2>\sqrt{x}$ hay $x<4$.

Kết hợp với điều kiện $x>0$, suy ra $0<x<4$.

Vậy với $0<x<4$ thì $\dfrac{A}{B}>\dfrac{3}{2}$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Sáng ngày 7/5/2024, tại thành phố Điện Biên Phủ đã tổ chức diễu hành kỉ niệm 70 năm chiến thắng Điện Biên Phủ (7/5/1954 - 7/5/2024). Tham gia đoàn diễu hành khối Nữ Cảnh Sát Đặc Nhiệm có 70 người (không tính người dẫn đầu và tổ cầm cờ) được xếp thành các hàng ngang, hàng dọc đều nhau. Nếu bớt đi 1 hàng và mỗi hàng thêm 1 người thì thừa ra 4 người. Hỏi lúc đầu đoàn diễu hành khối Nữ Cảnh Sát Đặc Nhiệm có bao nhiêu hàng và mỗi hàng có bao nhiêu người?

2) Để chuẩn bị trao thưởng cho học sinh giỏi cuối năm học, một trường THCS cần mua 2000 quyển vở và 400 cây bút để làm phần thưởng. Nhà trường dự tính để mua với giá niêm yết sẽ cần 18 triệu 400 nghìn đồng. Do mua với số lượng lớn nên đại lí bán quyết định giảm giá 5% cho mỗi quyển vở và 6% cho mỗi cây bút, vì thế nhà trường chỉ phải trả 17 triệu 456 nghìn đồng. Tính giá niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút.

3) Cho phương trình $x^2+3x+m+1=0$ (ẩn x, tham số m). Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x_1-x_2\right)^2+7m+5x_1x_2$.

Lời giải

1) Gọi x (hàng) là số hàng của đoàn diễu hành khối Nữ Cảnh Sát Đặc Nhiệm lúc ban đầu $(x\in\mathbb{N}^*, x>1)$

Số người trong một hàng lúc đầu là: $\dfrac{70}{x}$ (người)

Nếu bớt đi 1 hàng và mỗi hàng thêm 1 người thì thừa ra 4 người nên ta có phương trình:

$$\frac{70-4}{x-1}-\frac{70}{x}=1$$

Giải phương trình trên ta được $x=7$ (thoả mãn điều kiện) hoặc $x=-10$ (không thoả mãn điều kiện)

Do đó số hàng của đoàn diễu hành lúc ban đầu là 7 hàng.

Số người trong một hàng lúc đầu là: $\dfrac{70}{7}=10$ (người)

Vậy lúc đầu đoàn diễu hành khối Nữ Cảnh Sát Đặc Nhiệm có 7 hàng và mỗi hàng có 10 người.

2) Gọi x (đồng) và y (đồng) lần lượt là giá niêm yết của mỗi quyển vở và mỗi cây bút $(x>0;\ y>0)$

Vì nếu mua 2000 quyển vở và 400 cây bút theo giá niêm yết thì hết 18 triệu 400 nghìn đồng nên ta có phương trình:

$$2000x + 400y = 18\,400\,000 \text{ hay } 5x + y = 46000 \quad (1)$$

Số tiền mua 2000 quyển vở nếu mỗi quyển vở được giảm giá 5% là:

$$2000x.(100\% - 5\%) = 2000x.95\% = 1900x \text{ (đồng)}$$

Số tiền mua 400 cây bút nếu mỗi cây bút được giảm giá 6% là:

$$400y.(100\% - 6\%)y = 400y.94\% = 376y \text{ (đồng)}$$

Vì sau khi giảm giá nhà trường chỉ phải trả 17 triệu 456 nghìn đồng nên ta có phương trình:

$$1900x + 376y = 17\,456\,000 \text{ hay } 475x + 94y = 4\,364\,000 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 5x + y = 46\,000 \\ 475x + 94y = 4\,364\,000 \end{cases}$

Giải hệ phương trình trên ta được $\begin{cases} x = 8000 \\ y = 6000 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy giá niêm yết của mỗi quyển vở là 8 000 đồng và mỗi cây bút là 6 000 đồng.

3) Xét phương trình: $x^2 + 3x + m + 1 = 0 \quad (*)$

Ta có $\Delta = 3^2 - 4.1.(m+1) = 9 - 4m - 4 = 5 - 4m$

Để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thì $\Delta \ge 0$. Suy ra $5 - 4m \ge 0$ hay $m \le \dfrac{5}{4}$.

Với $m \le \dfrac{5}{4}$, áp dụng định lí Viète ta có: $x_1 + x_2 = -3;\ x_1x_2 = m + 1$

Do đó: $P = (x_1 - x_2)^2 + 7m + 5x_1x_2$

$= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 7m + 5x_1x_2$

$= (x_1 + x_2)^2 + x_1x_2 + 7m$

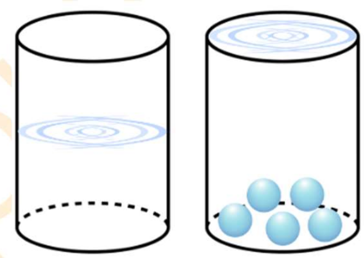
$= (-3)^2 + m + 1 + 7m$

$= 8m + 10$

Vì $m \le \frac{5}{4}$ suy ra $8m + 10 \le 8.\frac{5}{4} + 10$. Hay $P \le 20$. Dấu "=" xảy ra khi $m = \frac{5}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị lớn nhất của P bằng 20 khi $m = \frac{5}{4}$.

Bài IV (4,0 điểm).



1) Một ly nước dạng hình trụ có chiều cao là 15cm, đường kính đáy là 5cm, lượng nước tinh khiết trong ly cao 10cm. Ly nước được đặt cố định trên mặt bàn bằng phẳng như hình vẽ bên.

a) Tính thể tích lượng nước tinh khiết được chứa trong ly.

b) Người ta thả vào ly nước 5 viên bi hình cầu giống hệt nhau, có cùng thể tích, đồng chất và ngập hoàn toàn trong nước, làm nước trong ly dâng lên đúng bằng miệng ly, không tràn ra ngoài. Hỏi thể tích của mỗi viên bi là bao nhiêu centimét khối? (*Giả sử độ dày của ly là không đáng kể*).

2) Cho nửa đường tròn $(O;R)$ đường kính AB. Trên tiếp tuyến Ax của (O) tại A, lấy điểm C sao cho $AC > R$, nối CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là D. Kẻ AH vuông góc với OC cắt đoạn thẳng BC tại điểm M.

a) Chứng minh bốn điểm A, C, H, D cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh $OH.OC = R^2$ và $\widehat{OCB} = \widehat{OBH}$;

c) Chứng minh $MD.HB = MB.HD$.

Lời giải

1) a) Bán kính đáy của ly nước là: $5 : 2 = 2,5$ (cm)

Thể tích nước tinh khiết chứa trong ly là: $\pi.2,5^2.10 = 62,5\pi$ (cm³)

Vậy thể tích nước tinh khiết chứa trong ly là $62,5\pi$ cm³.

b) Vì khi thả 5 viên bi hình cầu ngập hoàn toàn trong nước làm nước trong ly dâng lên đúng bằng miệng ly và lượng nước không tràn ra ngoài. Do đó thể tích của 5 viên bi cũng chính là thể tích lượng nước dâng lên.

Chiều cao lượng nước dâng lên là: $15-10=5$ (cm)

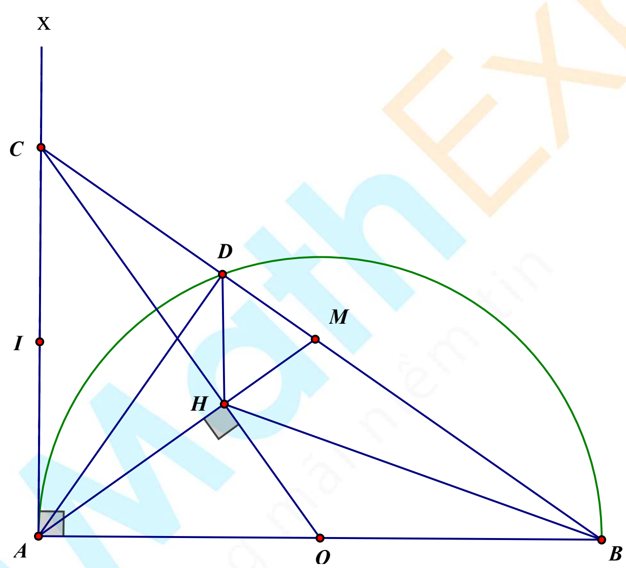
Thể tích lượng nước dâng lên hay thể tích của 5 viên bi hình cầu là: $\pi.2,5^2.5=31,25\pi$ (cm³)

Do 5 viên bi này giống hệt nhau, có cùng thể tích và đồng chất nên thể tích của mỗi viên bi là:

$$31,25\pi : 5 = 6,25\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vậy thể tích của mỗi viên bi là $6,25\pi$ cm³.

2)



a) Chứng minh $\widehat{ADC}=90^0$;
Chứng minh được bốn điểm A, C, H, D thuộc đường tròn (I) đường kính AC với I là trung điểm của AC.

b) Chứng minh được $\Delta OHA \backsim \Delta OAC$ (g-g), suy ra $\dfrac{OH}{OA}=\dfrac{OA}{OC}$ nên $OH.OC=OA^2=R^2$;

Ta có $OA=OB$, mà $OH.OC=OA^2$ (chứng minh ở ý a) nên $OH.OC=OB^2$

Suy ra $\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{OB}{OC}$.

Chứng minh được $\Delta OHB \backsim \Delta OBC$ (c-g-c), suy ra $\widehat{OCB}=\widehat{OBH}$ (hai góc tương ứng).

c) Vì $\Delta OHB \backsim \Delta OBC$ (chứng minh ở ý b) nên $\widehat{OHB} = \widehat{OBC}$ (hai góc tương ứng) (1)

Lại có $\widehat{OBC} + \widehat{DAB} = 90^0$ (vì tam giác BAD vuông tại D) và $\widehat{CAD} + \widehat{DAB} = \widehat{CAB} = 90^0$

Nên $\widehat{OBC} = \widehat{CAD}$ (2)

Xét (I) có $\widehat{CAD} = \widehat{CHD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{CD}$) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{OHB} = \widehat{CHD}$. Mà $MH \perp OC$ nên $\widehat{MHC} = \widehat{MHO} = 90^0$

Suy ra $\widehat{MHD} = \widehat{MHB}$ hay HM là tia phân giác của $\widehat{DHB}$.

Suy ra $\dfrac{MD}{MB} = \dfrac{HD}{HB}$ (tính chất phân giác) hay $MD.HB = MB.HD$.

Bài V (0,5 điểm). Hưởng ứng chương trình "*Tình nguyện mùa đông 2024*", một đoàn tình nguyện cần thuê xe để chở 28 người và 9 tấn hàng để giúp đồng bào hai tỉnh Yên Bái và Lào Cai bị ảnh hưởng bởi thiên tai. Nơi thuê xe có hai loại xe A và B, trong đó loại xe A có 10 chiếc và loại xe B có 9 chiếc. Một chiếc xe loại A cho thuê với giá 4 triệu đồng, một chiếc xe loại B cho thuê với giá 3 triệu đồng. Biết rằng mỗi xe loại A có thể chở tối đa 4 người và 0,6 tấn hàng; mỗi xe loại B có thể chở tối đa 2 người và 1,5 tấn hàng. Hỏi đoàn tình nguyện phải thuê bao nhiêu xe mỗi loại để chi phí bỏ ra là ít nhất?

Lời giải

Gọi số xe loại A cần thuê là x (đơn vị: xe, $0 < x \le 10, x \in \mathbb{N}$)

Gọi số xe loại B cần thuê là y (đơn vị: xe, $0 < y \le 9, y \in \mathbb{N}$)

Khi đó chi phí đoàn tình nguyện thuê xe là $T = 4x + 3y$ (triệu đồng).

Số người cả hai loại xe chở được là $4x + 2y \ge 28$ hay $2x + y \ge 14$.

Số tấn hàng cả hai loại xe chở được là $0,6x + 1,5y \ge 9$ hay $2x + 5y \ge 30$.

Xét $4T = 16x + 12y = (14x + 7y) + (2x + 5y) = 7.(2x + y) + (2x + 5y)$

$\ge 7.14 + 30 = 128$. Suy ra $T \ge 32$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 2x + y = 14 \\ 2x + 5y = 30 \end{cases}$.

Giải hệ này được $x = 5, y = 4$ (thỏa mãn).
Vậy cần thuê 5 xe loại A và 4 xe loại B thì chi phí bỏ ra là ít nhất.

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

ĐỀ MINH HỌA SỐ 9

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

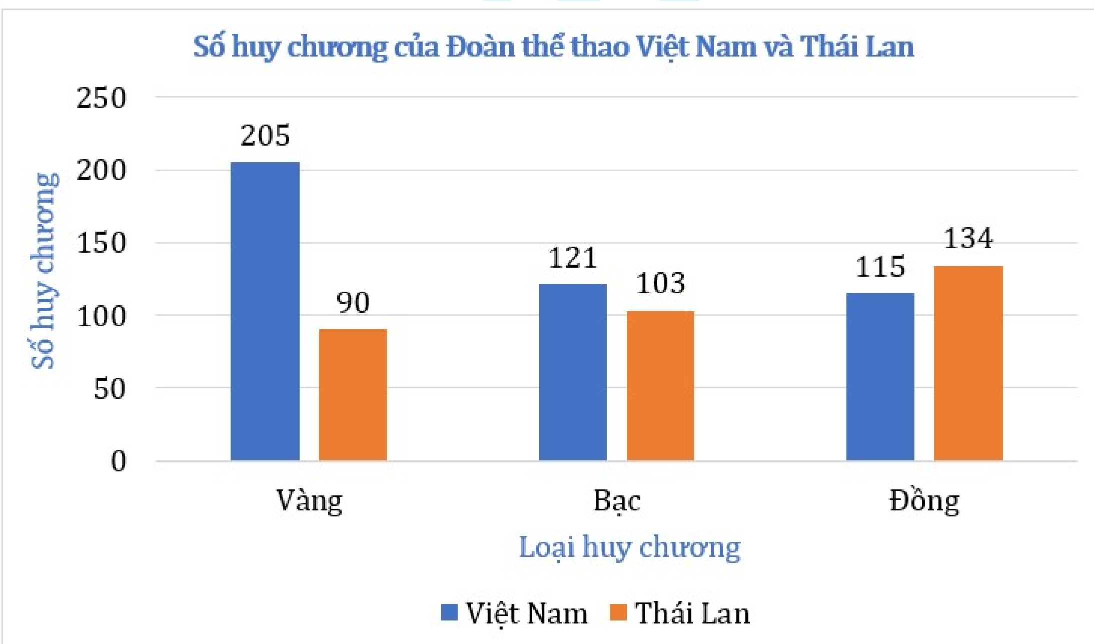
1) Thống kê cấp độ động đất của các trận động đất xảy ra tại một vùng trong 10 năm người ta thu được kết quả sau:

I	V	II	III	VI	V	IV	II	III	V	VI	VII	VIII	I	I	II	VI	VII	IV

Biết rằng theo thang Richter thì trận động đất cấp I có độ lớn từ 1 đến dưới 3; cấp II và cấp III có độ lớn từ 3 đến dưới 4; cấp IV và cấp V có độ lớn từ 4 đến dưới 5; cấp VI và cấp VII có độ lớn từ 5 đến dưới 6; cấp VIII có độ lớn từ 6 đến dưới 7.

Lập bảng tần số ghép nhóm và bảng tần số tương đối ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter. (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

2) Biểu đồ cột kép dưới đây biểu diễn số huy chương của Đoàn thể thao Việt Nam và Đoàn thể thao Thái Lan tại SEA Game 31:



Người ta lập danh sách tất cả các vận động viên đạt huy chương (Vàng, Bạc, Đồng) của hai đoàn thể thao, nếu 1 vận động viên đạt nhiều huy chương thì số lần ghi tên vận động viên đó bằng số huy chương mà người đó đạt được. Bảng thống kê có dạng như sau :

Số thứ tự	Họ và tên	Huy chương	Môn đạt huy chương	Nước
...	...	...	...	...

Chọn ngẫu nhiên một số trong danh sách số thứ tự của bảng trên.

Tính xác suất của biến cố "Số được chọn là số thứ tự của vận động viên đạt huy chương Bạc ".

Lời giải

1) Theo mẫu số liệu trên ta có bảng tần số ghép nhóm cho độ lớn các trận động đất xảy ra ở vùng này theo thang Richter như sau:

Độ lớn trận động đất (richter)	[1; 3)	[3; 4)	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	Cộng
Tần số (n)	3	5	5	5	1	N = 19

Tổng số trận động đất xảy ra là $3+5+5+5+1=19$ (trận)

Tần số tương đối ghép nhóm của độ lớn các trận động đất xảy ra là:

Nhóm [1; 3): $\frac{3.100}{19}\% \approx 15,8\%$;

Nhóm [3; 4): $\frac{5.100}{19}\% \approx 26,3\%$;

Nhóm [4; 5): $\frac{5.100}{19}\% \approx 26,3\%$;

Nhóm [5; 6): $\frac{5.100}{19}\% \approx 26,3\%$;

Nhóm [6; 7): $\frac{1.100}{19}\% \approx 5,3\%$;

Từ kết quả trên, ta có bảng tần số tương đối ghép nhóm như sau:

Độ lớn trận động đất (richter)	[1; 3)	[3; 4]	[4; 5)	[5; 6)	[6; 7)	Cộng
Tần số tương đối (%)	15,8	26,3	26,3	26,3	5,3	100

2)

Tổng số huy chương là $205+90+121+103+115+134=768$ (huy chương)

Vì chọn ngẫu nhiên một số trong danh sách số thứ tự của bảng trên nên có 768 kết quả có thể xảy ra và 768 kết quả này là đồng khả năng.

Gọi M là biến cố: "Số được chọn là số thứ tự của vận động viên đạt huy chương Bạc"

Tổng số huy chương Bạc là $121+103=224$ (huy chương).

Do đó có 224 kết quả thuận lợi cho biến cố M.

Suy ra xác suất của biến cố M là $P(M)=\dfrac{224}{768}=\dfrac{7}{24}$.

Vậy $P(M)=\dfrac{7}{24}$.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A=\dfrac{x+5}{3-\sqrt{x}}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}+\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}+\dfrac{x-4\sqrt{x}-9}{9-x}$ với $x\ge 0; x\ne 9$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x thỏa mãn đẳng thức $x^2-16=0$;

2) Rút gọn biểu thức B;

3) Đặt $M=\dfrac{B}{A}$. Chứng minh rằng $|M|<\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

1) Với $x^2-16=0$ ta có $x^2=16$

Suy ra $x=4$ (thỏa mãn điều kiện xác định) hoặc $x=-4$ (không thỏa mãn điều kiện xác định)

Thay $x=4$ vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{4+5}{3-\sqrt{4}}=\dfrac{9}{3-2}=\dfrac{9}{1}=9$

Vậy với $x^2-16=0$ thì $A=9$.

2) Với $x\ge 0; x\ne 9$ rút gọn được $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}$

3) Với $x\ge 0; x\ne 9$ ta có $M=\dfrac{B}{A}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}:\dfrac{x+5}{3-\sqrt{x}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3}.\dfrac{-\left(\sqrt{x}-3\right)}{x+5}=\dfrac{-\sqrt{x}}{x+5}$

Với $x=0$ thì $M=0$. Khi đó $|M|=0<\dfrac{1}{2}$ (luôn đúng) (1)

Với $x>0; x\ne 9$, ta có $-\sqrt{x}<0$; $x+5>0$. Do đó $M=\dfrac{-\sqrt{x}}{x+5}<0$. Suy ra $|M|=\dfrac{\sqrt{x}}{x+5}$

Xét $\left|M\right|-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{x}}{x+5}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{x}-x-5}{x+5}=\frac{-\left(x-2\sqrt{x}+1\right)-4}{x+5}=-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+4}{x+5}$

Ta thấy với mọi $x>0; x\neq 9$ thì $\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$ nên $\left(\sqrt{x}-1\right)^2+4\geq 4>0$ và $x+5>0$.

Suy ra $-\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)^2+4}{x+5}<0$ hay $\left|M\right|-\frac{1}{2}<0$ hay $\left|M\right|<\frac{1}{2}$ với mọi $x>0; x\neq 9$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\left|M\right|<\frac{1}{2}$ với mọi $x\geq 0; x\neq 9$.

Vậy với mọi $x\geq 0; x\neq 9$ thì $\left|M\right|<\frac{1}{2}$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Có hai loại quặng : Loại thứ nhất chứa 75% sắt; loại thứ hai chứa 50% sắt. Tính khối lượng từng loại quặng cần đun trộn để ra được 25 tấn quặng chứa 66% sắt. (Biết khối lượng hao hụt và khối lượng tạp chất không đáng kể).

2) Nhà bạn Hoa có một mảnh vườn trồng cà chua, vườn được chia thành nhiều luống và số cây ở mỗi luống là như nhau. Hoa tính rằng : Nếu tăng thêm 8 luống nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì tổng số cây cà chua trong vườn giảm đi 54 cây. Nếu giảm đi 4 luống nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây thì tổng số cây trong vườn tăng thêm 32 cây. Hỏi vườn nhà Hoa trồng bao nhiêu cây cà chua?

3) Cho phương trình $x^2-x+3m-11=0$ (x là ẩn, m là tham số). Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt sao cho $2023x_1+2024x_2=2025$.

Lời giải

1) Gọi khối lượng quặng loại thứ nhất cần đun trộn là x (tấn) (điều kiện: $0<x<25$).

Khi đó khối lượng quặng loại thứ hai cần đun trộn là $25-x$ (tấn).

Khối lượng sắt chứa trong loại quặng thứ nhất là $x.75\%=0,75x$ (tấn).

Khối lượng sắt chứa trong loại quặng thứ hai là $(25-x).50\%=12,5-0,5x$ (tấn).

Vì trong 25 tấn quặng sắt đun trộn chứa 66% sắt nên ta có phương trình:

$$0,75x+12,5-0,5x=25.66\%$$

Giải phương trình được $x=16$ (thoả mãn điều kiện)

Do đó khối lượng loại quặng thứ nhất cần đun trộn là 16 tấn.

Khối lượng loại quặng thứ hai cần đun trộn là $25-16-9$ (tấn).

Vậy khối lượng loại quặng thứ nhất và loại quặng thứ hai cần đun trộn lần lượt là 16 tấn và 9 tấn.

2) Gọi số luống cây cà chua của mảnh vườn là x (luống) $\left(x\in\mathbb{N}^*;\ x>4\right)$;

số cây ở mỗi luống là y (cây) $\left(y\in\mathbb{N}^*;\ y>3\right)$.

Suy ra số cây cà chua trong vườn là xy (cây).

Nếu tăng thêm 8 luống nhưng mỗi luống trồng ít đi 3 cây thì mảnh vườn có $x+8$ (luống), mỗi luống trồng $y-3$ (cây) và số cây cà chua trong vườn là $(x+8)(y-3)$ (cây).

Khi đó, tổng số cây cà chua trong vườn giảm đi 54 cây so với ban đầu nên ta có phương trình:

$$xy-(x+8)(y-3)=54 \qquad (1)$$

Nếu giảm đi 4 luống nhưng mỗi luống trồng tăng thêm 2 cây so với ban đầu thì mảnh vườn có $x-4$ (luống), mỗi luống trồng $y+2$ (cây) và số cây cà chua trong vườn là:

$$(x-4)(y+2) \text{ (cây)}$$

Khi đó, tổng số cây cà chua trong vườn tăng thêm 32 cây nên ta có phương trình:

$$(x-4)(y+2)-xy=32 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} xy-(x+8)(y-3)=54 \\ (x-4)(y+2)-xy=32 \end{cases}$

Giải hệ ta được $\begin{cases} x=50 \\ y=15 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Suy ra, vườn nhà bạn Hoa trồng được 50 luống, mỗi luống có 15 cây cà chua.

Do đó vườn nhà bạn Hoa trồng số cây cà chua là $50.15 = 750$ (cây)

Vậy vườn nhà bạn Hoa trồng 750 cây cà chua.

3) Xét phương trình $x^2 - x + 3m - 11 = 0$ (1). Ta có $\Delta = (-1)^2 - 4(3m - 11) = -12m + 45$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta = -12m + 45 > 0$ hay $m < \dfrac{15}{4}$

Với $m < \dfrac{15}{4}$, áp dụng định lí Viète được $x_1 + x_2 = 1;\ x_1x_2 = 3m - 11$

Theo đề bài, ta có $2023x_1 + 2024x_2 = 2025$

$$2023(x_1 + x_2) + x_2 = 2025$$
$$2023.1 + x_2 = 2025$$
$$x_2 = 2$$

Suy ra $x_1 = 1 - x_2 = 1 - 2 = -1$

Do đó $x_1x_2 = 2.(-1) = -2$. Hay $3m - 11 = -2$. Suy ra $m = 3$ (thỏa mãn điều kiện $m < \dfrac{15}{4}$)

Vậy $m = 3$ thì thỏa mãn đề bài.

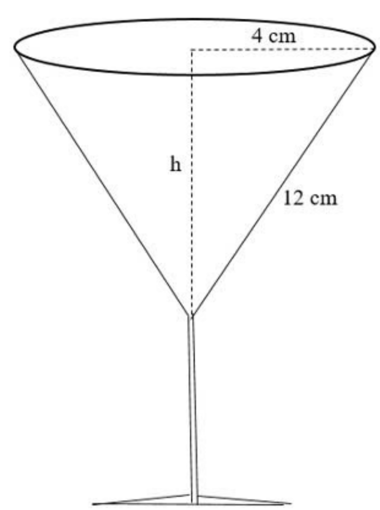
Bài IV (4,0 điểm).

1) Bạn Nam dự định tổ chức buổi tiệc sinh nhật và chọn loại ly có phần chứa nước dạng hình nón với bán kính đáy $R = 4$ cm và độ dài đường sinh $l = 10$ cm để khách uống nước trái cây.

a) Tính thể tích phần chứa nước của ly.

(*lấy* $\pi \approx 3,14$*, ghi kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)

b) Bạn Nam cần chuẩn bị một số hộp nước trái cây có lượng nước trong mỗi hộp là 1,2 lít. Biết rằng buổi tiệc sinh nhật có 14 người (*đã bao gồm cả Nam*). Nếu mỗi người trung bình uống 3 ly nước trái cây và lượng nước rót bằng 90% thể tích ly thì bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất bao nhiêu hộp nước trái cây?



2) Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm A sao cho $OA > 2R$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC của đường tròn B, C là các tiếp điểm), kẻ dây cung BD song song với AC. Đường thẳng AD cắt $(O;R)$ tại điểm $E\,(E \neq D)$. Gọi I là trung điểm của DE.

a) Chứng minh năm điểm A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường thẳng BC cắt OA, AD lần lượt tại H và K. Gọi F là giao điểm của BE và AC. Chứng minh $AK.AI = AH.AO$ và tam giác AFE đồng dạng với tam giác BFA.

c) Chứng minh ba đường thẳng AB, CD, FK đồng quy.

Lời giải

1) a) Chiều cao của hình nón là: $h = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{10^2 - 4^2} = 2\sqrt{21}$ (cm)

Thể tích phần chứa nước của ly là:

$$\frac{1}{3}\pi R^2 h \approx \frac{1}{3} \cdot 3{,}14 \cdot 4^2 \cdot 2\sqrt{21} \approx 153\ (\text{cm}^3)$$

Vậy thể tích phần chứa nước của ly khoảng 153 cm^3.

b) Đổi: $1{,}2$ lít $= 1200\,\text{cm}^3$

Lượng nước trái cây cần chuẩn bị cho 1 người là:

$$153.3.90\% = 413{,}1\ (\text{cm}^3)$$

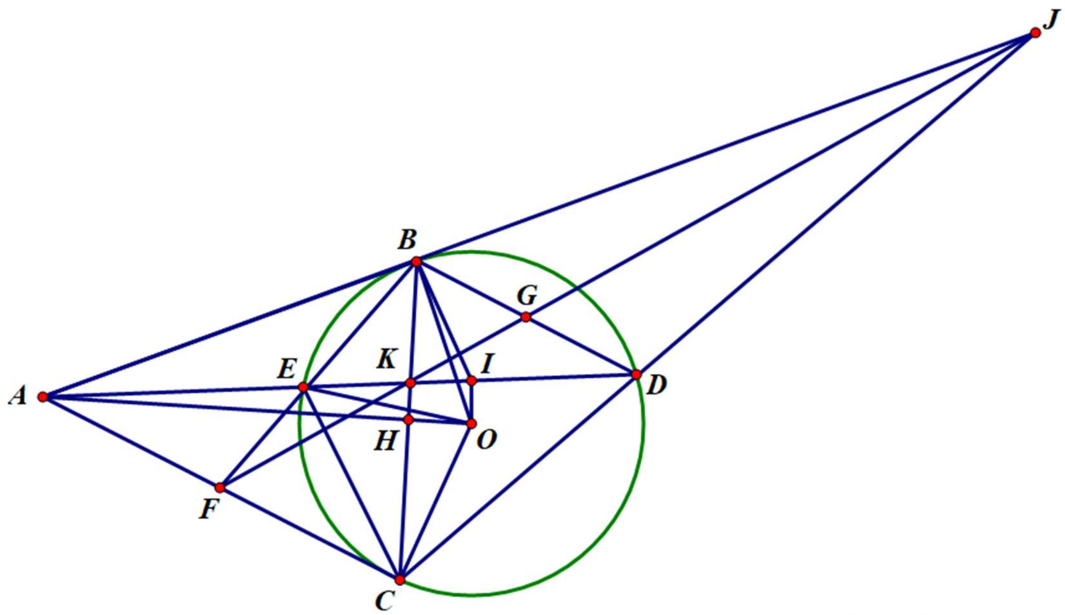
Lượng nước trái cây cần chuẩn bị cho 14 người là: $413{,}1\,.\,14 = 5\ 783{,}4\ (\text{cm}^3)$

Vì lượng nước trái cây trong mỗi hộp là $1200\,\text{cm}^3$ mà $5\ 783{,}4 : 1200 = 4{,}8195$.

Do đó, bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất 5 hộp nước trái cây để có thể đủ dùng cho buổi tiệc.

Vậy bạn Nam cần chuẩn bị ít nhất 5 hộp nước trái cây để có thể đủ dùng cho buổi tiệc.

2)



a) Chứng minh được $\widehat{ABO} = \widehat{ACO} = \widehat{AIO} = 90^o$ từ đó chứng minh được 5 điểm A, B, I, O, C cùng thuộc một đường tròn đường kính OA (điều phải chứng minh).

b) Ta có $AB = AC$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OB = OC = R$

Suy ra OA là đường trung trực của BC

Nên $OA \perp BC$ tại H. Suy ra $\widehat{AHK} = 90^0$

Xét ΔAHK và ΔAIO có: $\widehat{AHK} = \widehat{AIO} = 90^0$; $\widehat{OAI}$ chung

Do đó: $\Delta AHK \backsim \Delta AIO$ $(g.g)$

Suy ra $\dfrac{AH}{AI} = \dfrac{AK}{AO}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) hay $AK.AI = AH.AO$ (điều phải chứng minh)

Ta có: $BD // AC$ (giả thiết) suy ra $\widehat{BDE} = \widehat{FAE}$ (2 góc so le trong) (1)

Vì $OB = OE = R$ nên ΔOBE cân tại O. Suy ra $\widehat{OBE} = \widehat{OEB}$

Lại có: $\widehat{OBE} + \widehat{OEB} + \widehat{BOE} = 180°$ (tính chất tổng ba góc trong tam giác)

Suy ra $\widehat{BOE} = 180° - \left(\widehat{OBE} + \widehat{OEB}\right) = 180° - 2\widehat{OBE}$

Mà $\widehat{BDE}=\frac{1}{2}\widehat{BOE}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{BE}$)

Nên $\widehat{BDE}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-2\widehat{OBE}\right)=90^\circ-\widehat{OBE}$

Lại có: $\widehat{ABE}+\widehat{OBE}=\widehat{ABO}=90^\circ$ (do $AB\perp OB$) do đó $\widehat{ABE}=90^\circ-\widehat{OBE}$

Suy ra $\widehat{BDE}=\widehat{ABE}$ hay $\widehat{BDE}=\widehat{FBA}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{FAE}=\widehat{FBA}$

Xét ΔAFE và ΔBFA có:

$\widehat{BFA}$ chung; $\widehat{FAE}=\widehat{FBA}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\Delta AFE\backsim\Delta BFA\ (g.g)$ (điều phải chứng minh).

c) Ta có: $\Delta AFE\backsim\Delta BFA$ (chứng minh trên)

Suy ra $\frac{FE}{FA}=\frac{FA}{FB}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) hay $FA^2=FB.FE$

Vì $OE=OC=R$ nên ΔOCE cân tại O. Suy ra $\widehat{OCE}=\widehat{OEC}$

Lại có: $\widehat{OCE}+\widehat{OEC}+\widehat{COE}=180^\circ$ (tính chất tổng ba góc trong tam giác)

Suy ra $\widehat{COE}=180^\circ-\left(\widehat{OCE}+\widehat{OEC}\right)=180^\circ-2\widehat{OCE}$

Mà $\widehat{CDE}=\frac{1}{2}\widehat{COE}$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung $\overset{\frown}{CE}$)

Nên $\widehat{CDE}=\frac{1}{2}\left(180^\circ-2\widehat{OCE}\right)=90^\circ-\widehat{OCE}$

Lại có: $\widehat{FCE}+\widehat{OCE}=\widehat{FCO}=90^\circ$ (do $AC\perp OC$) do đó $\widehat{FCE}=90^\circ-\widehat{OCE}$

Suy ra $\widehat{CDE}=\widehat{FCE}$

Mà $\widehat{CDE}=\widehat{CBE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\overset{\frown}{CE}$) hay $\widehat{CDE}=\widehat{FBC}$

Nên $\widehat{FCE} = \widehat{FBC}$

Xét ΔFEC và ΔFCB có: $\widehat{BFC}$ chung; $\widehat{FCE} = \widehat{FBC}$ (chứng minh trên)

Do đó: $\Delta FEC \backsim \Delta FCB$ $(g.g)$

Suy ra $\frac{FE}{FC} = \frac{FC}{FB}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) hay $FC^2 = FB.FE$

Mà $FA^2 = FB.FE$ (chứng minh trên) nên $FA^2 = FC^2$ suy ra $FA = FC$

Gọi G là giao điểm của FK và BD

Ta có: $BG // FC$ (giả thiết) suy ra $\frac{BG}{FC} = \frac{KG}{KF}$ (hệ quả định lí Thalès)

$DG // AF$ (giả thiết) suy ra $\frac{GD}{FA} = \frac{KG}{KF}$ (hệ quả định lí Thalès)

Do đó $\frac{BG}{FC} = \frac{GD}{FA}$ mà $AF = CF$ nên $BG = DG$. Hay G là trung điểm của BD

Kéo dài AB cắt DC tại J. Gọi G' là giao điểm của JF và BD

Xét ΔJAF có: $BG' // AF$ (giả thiết) suy ra $\frac{BG'}{AF} = \frac{JG'}{JF}$ (hệ quả định lí Thalès)

Xét ΔJFC có: $DG' // CF$ (giả thiết) suy ra $\frac{DG'}{CF} = \frac{JG'}{JF}$ (hệ quả định lí Thalès)

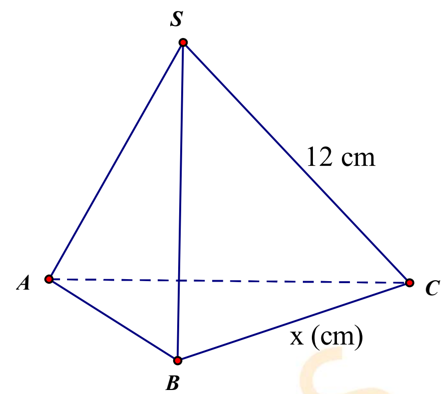
Do đó $\frac{BG'}{AF} = \frac{DG'}{CF}$ mà $AF = CF$ nên $BG' = DG'$

Hay G' là trung điểm của BD

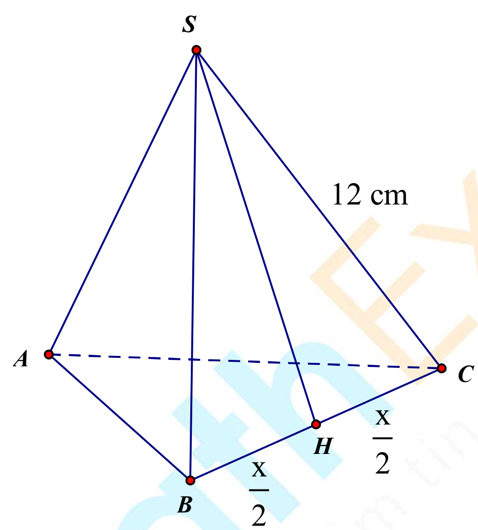
Suy ra $G \equiv G'$ do đó F, K, J thẳng hàng

Khi đó 3 đường thẳng AB, CD, FK đồng quy tại J (điều phải chứng minh).

Bài V. (0,5 điểm) Một mô hình đồ chơi bằng gỗ có dạng hình chóp tam giác đều. Biết các cạnh bên của hình chóp là các thanh gỗ có chiều dài bằng 12 cm. Gọi độ dài cạnh đáy của hình chóp là x cm ($0 < x < 24$). Để diện tích xung quanh của đồ chơi trên đạt giá trị lớn nhất thì x bằng bao nhiêu? (*coi các đường mép gấp là không đáng kể*).



Lời giải



Diện tích mặt bên SBC là $S_1 = \frac{1}{2}SH.BC$ với SH là chiều cao trong tam giác SBC

Tam giác SBC cân tại S nên SH là đường cao đồng thời là trung tuyến

Suy ra H là trung điểm của BC. Do đó $HB = HC = \frac{x}{2}$ (cm)

Theo định lý Pythagore trong tam giác SHC vuông tại H có $SH^2 + HC^2 = SC^2$

$SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{12^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{576 - x^2}$ (cm). Suy ra $S_1 = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{576 - x^2}\cdot x$ (cm²).

Gọi S là diện tích xung quanh của hình chóp thì $S = 3S_1 = \frac{3}{4}\cdot\sqrt{576 - x^2}\cdot x$ (cm²)

Nhận xét: $(a-b)^2 \ge 0$ với mọi a, b hay $a \cdot b \le \frac{a^2 + b^2}{2}$. Dấu bằng khi $a = b$.

Áp dụng với $a=\sqrt{576-x^2}, b=x$ được $\sqrt{576-x^2}\cdot x\le\dfrac{576-x^2+x^2}{2}=288$

Do đó $S\le\dfrac{3}{4}\cdot 288=216$, dấu bằng khi $\sqrt{576-x^2}=x$, tìm được $x=12\sqrt{2}$ (thỏa mãn)

Vậy $x=12\sqrt{2}$ thì diện tích các mặt xung quanh của đồ chơi đã cho đạt giá trị lớn nhất.

---------------------------------------HẾT---------------------------------------

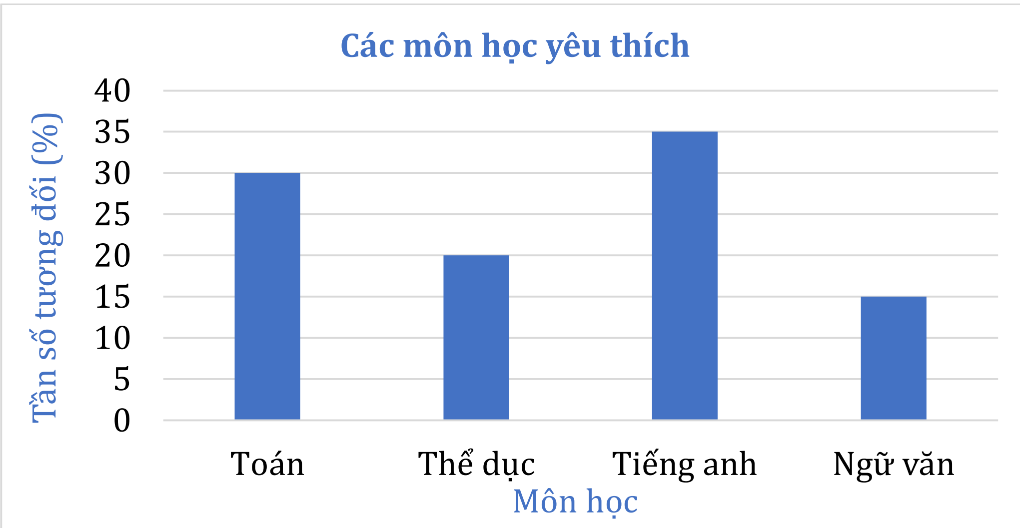
ĐỀ MINH HỌA SỐ 10

Môn: Toán 9

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài I (1,5 điểm).

1) Kết quả điều tra sự yêu thích môn học của 500 em học sinh lớp 9 được cho trong biểu đồ tần số tương đối dưới đây:



Hãy lập bảng tần số yêu thích các môn học và cho biết môn học nào được nhiều học sinh yêu thích nhất (*biết mỗi bạn chỉ chọn một môn học yêu thích*).

2) Bạn Hoàng có hai màu áo sơ mi khác nhau: trắng, xanh dương và ba màu quần khác nhau: đen, nâu, be. Bạn Hoàng chọn ngẫu nhiên một bộ quần áo để mặc. Tính xác suất để bộ quần áo bạn Hoàng mặc là áo màu trắng và quần màu đen.

Lời giải

1) Theo biểu đồ tần số tương đối, ta có tần số tương đối yêu thích môn Toán, Thể dục, Tiếng Anh, Ngữ Văn lần lượt là 30%; 20%; 35%; 15%. Do đó:

Tần số yêu thích môn Toán là $500.30\% = 500.\dfrac{30}{100} = 150$

Tần số yêu thích môn Thể dục là $500.20\% = 500.\dfrac{20}{100} = 100$

Tần số yêu thích môn Tiếng anh là $500.35\% = 500.\frac{35}{100} = 175$

Tần số yêu thích môn Ngữ văn là $500.15\% = 500.\frac{15}{100} = 75$

Từ đó, ta có bảng tần số yêu thích các môn học:

Môn học	Toán	Thể dục	Tiếng anh	Ngữ văn	Tổng
Tần số (n)	150	100	175	75	N = 500

Vậy môn học được nhiều học sinh yêu thích nhất là môn Tiếng anh với tần số là 175.

2) Kí hiệu hai màu áo sơ mi: trắng, xanh dương lần lượt là T, X.

Kí hiệu ba màu quần: đen, nâu, be lần lượt là Đ, N, B.

Bạn Hoàng chọn ngẫu nhiên một bộ quần áo để mặc nên ta có không gian mẫu là:

$$\Omega = \{\text{TĐ; TN; TB; XĐ; XN; XB}\}$$

Tập Ω có 6 phần tử. Do đó có 6 kết quả có thể xảy ra và 6 kết quả này là đồng khả năng.

Gọi M là biến cố: “Bộ quần áo bạn Hoàng mặc là áo màu trắng và quần màu đen”.

Có 1 kết quả thuận lợi cho biến cố M là TĐ

Suy ra xác suất của biến cố M là $P(M) = \frac{1}{6}$

Vậy xác suất để bộ quần áo bạn Hoàng mặc là áo màu trắng và quần màu đen là $\frac{1}{6}$.

Bài II (1,5 điểm).

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$ và $B = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1}\right)$ với $x > 0;\ x \neq 1$

1) Tính giá trị của biểu thức A biết $x = 16$;

2) Chứng minh rằng $B = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0$; $x \neq 1$;

3) Tìm giá trị nguyên của x để $P = A : B$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

1) Thay $x=16$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta có $A=\dfrac{\sqrt{16}+1}{\sqrt{16}}=\dfrac{5}{4}$

Vậy với $x=16$ thì $A=\dfrac{5}{4}$.

2) Với $x>0$; $x\neq 1$ rút gọn được $B=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

3) Theo đề bài, ta có $x\in\mathbb{Z}$, $x>0$, $x\neq 1$ nên $x\geq 2$.

$$P=A:B=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}:\frac{x-1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x-1}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Vì $x\geq 2$ nên $\sqrt{x}\geq\sqrt{2}$ suy ra $\sqrt{x}-1\geq\sqrt{2}-1>0$.

Do đó $\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1$. Suy ra $P\leq\sqrt{2}+1$. Dấu "=" xảy ra khi $x=2$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy GTLN của P bằng $\sqrt{2}+1$ khi $x=2$.

Bài III (2,5 điểm).

1) Trên một cánh đồng cấy 60ha giống lúa mới và 40ha giống lúa cũ. Biết sau khi gặt thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc. Hỏi năng suất mỗi giống lúa trên 1ha là bao nhiêu? Biết rằng 3ha giống lúa mới thu hoạch được ít hơn 4ha giống lúa cũ là 1 tấn.

2) Một xưởng may dự định may 1500 chiếc áo trong một thời gian quy định. Để hoàn thành sớm kế hoạch, thực tế mỗi ngày xưởng đã may được nhiều hơn 10 chiếc áo so với dự định. Do đó, ba ngày trước khi hết thời hạn, xưởng đã may được 1320 áo. Hỏi theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng đó phải may xong bao nhiêu chiếc áo?

3) Cho phương trình bậc hai $2x^2-\left(m+3\right)x+m=0$ (x là ẩn, m là tham số). Gọi x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\left|x_1-x_2\right|$.

Lời giải

1) Gọi năng suất của giống lúa mới là x (tấn thóc/ha) (Điều kiện: $x > 0$) và năng suất của giống lúa cũ là y (tấn thóc/ha) (Điều kiện: $y > 0$).

Vì trên cả cánh đồng cấy 60ha giống lúa mới, 40ha giống lúa cũ và thu hoạch được tất cả 460 tấn thóc nên ta có phương trình $60x + 40y = 460$ (1)

Vì 3ha giống lúa mới thu hoạch được ít hơn 4ha giống lúa cũ là 1 tấn thóc nên ta có phương trình:

$$3x + 1 = 4y \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} 60x + 40y = 460 \\ 3x + 1 = 4y \end{cases}$. Giải hệ được $\begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy năng suất của giống lúa mới là 5 tấn thóc/ha và năng suất của giống lúa cũ là 4 tấn thóc/ha.

2) Gọi số áo mỗi ngày xưởng phải may theo kế hoạch là x (chiếc) $\left(x \in \mathbb{N}^*; x < 1500\right)$

Theo kế hoạch, xưởng phải may 1500 chiếc áo trong số ngày là $\dfrac{1500}{x}$ (ngày)

Thực tế số áo mỗi ngày xưởng may được là $x + 10$ (chiếc)

Thực tế xưởng đã may được 1320 chiếc áo được may trong số ngày là $\dfrac{1320}{x+10}$ (ngày)

Vì ba ngày trước khi hết thời hạn, xưởng may được 1320 áo nên ta có phương trình:

$$\frac{1500}{x} - 3 = \frac{1320}{x+10}$$

Giải phương trình được $x_1 = 100$ (thoả mãn điều kiện), $x_2 = -50$ (không thỏa mãn điều kiện)

Vậy theo kế hoạch, mỗi ngày xưởng đó phải may xong 100 cái áo.

3) Phương trình $2x^2 - (m+3)x + m = 0$ có $\Delta = (m+3)^2 - 8m = m^2 - 2m + 9 = (m-1)^2 + 8$

Nhận thấy $(m-1)^2 \geq 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$ nên $\Delta = (m-1)^2 + 8 \geq 8 > 0$ với mọi $m \in \mathbb{R}$.

Nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$

Theo định lí Viète ta có $x_1 + x_2 = \dfrac{m+3}{2}$; $x_1x_2 = \dfrac{m}{2}$. Do đó:

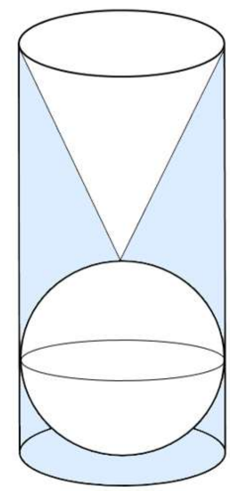
$$P = |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(\dfrac{m+3}{2}\right)^2 - 4.\dfrac{m}{2}} = \dfrac{\sqrt{(m-1)^2 + 8}}{2}$$

Với mọi $m \in \mathbb{R}$ ta có $(m-1)^2 \geq 0$ nên $(m-1)^2 + 8 \geq 8$. Suy ra $\sqrt{(m-1)^2 + 8} \geq \sqrt{8}$

Do đó $P = \dfrac{\sqrt{(m-1)^2 + 8}}{2} \geq \dfrac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}$. Dấu “=” xảy ra khi $m = 1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng $\sqrt{2}$ khi $m = 1$.

Bài IV (4,0 điểm).



1) Một chiếc cốc thủy tinh có dạng hình trụ chứa đầy nước, có chiều cao bằng 6cm, bán kính đáy bằng 1cm. Người ta thả từ từ lần lượt vào cốc nước một viên bi hình cầu và một vật có dạng hình nón đều bằng thủy tinh (vừa khít như hình vẽ) thì thấy nước trong chiếc cốc tràn ra ngoài. Biết rằng đường kính của viên bi, đường kính của đáy hình nón và đường kính của đáy cốc nước xem như bằng nhau, bỏ qua bề dày của lớp vỏ thủy tinh.

a) Tính thể tích của chiếc cốc thủy tinh hình trụ.

b) Tính thể tích của lượng nước còn lại trong chiếc cốc

2) Cho tam giác ABC vuông cân tại A nội tiếp đường tròn $(O;R)$. Lấy điểm K di động trên cung nhỏ AB. Kẻ đường kính AP. Gọi N là giao điểm của CK và AP. Tia AK cắt BC tại S.

a) Chứng minh tứ giác $BONK$ nội tiếp và $SK.SA = SB.SC$

b) Kẻ $AH \perp CK$ tại H, $KE \perp AO$ tại E.

Chứng minh H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác KOE

c) Gọi F là giao điểm của PK và BC. Tìm vị trí của điểm K trên cung nhỏ AB để diện tích tam giác KNF lớn nhất.

Lời giải

1)

a) Thể tích của chiếc cốc thủy tinh hình trụ là $\pi.1^2.6 = 6\pi$ (cm³)

Vậy thể tích của chiếc cốc thủy tinh hình trụ là 6π cm³.

b) Thể tích của viên bi hình cầu có cùng bán kính với chiếc cốc thủy tinh hình trụ là:

$$\frac{4}{3}.\pi.1^3 = \frac{4}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Vì chiều cao của chiếc cốc thuỷ tinh đúng bằng chiều cao của vật có dạng hình nón cộng với đường kính của viên bi hình cầu. Do đó chiều cao của vật có dạng hình nón là $6-2=4$ (cm)

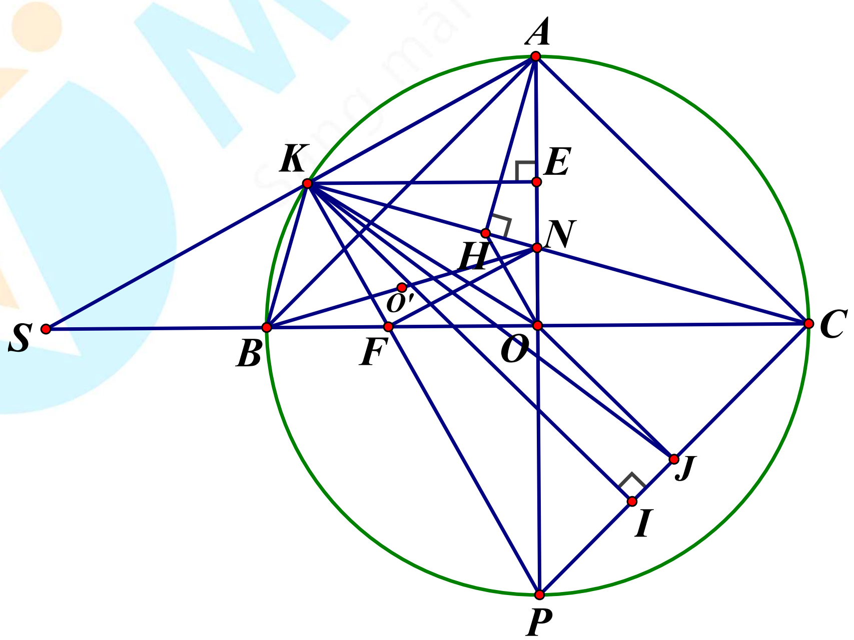
Thể tích của vật có dạng hình nón có cùng bán kính với chiếc cốc thủy tinh hình trụ là:

$$\frac{1}{3}\pi.1^2.4 = \frac{4}{3}\pi \text{ (cm}^3\text{)}$$

Thể tích của lượng nước còn lại trong chiếc cốc là $6\pi - \left(\frac{4}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) = \frac{10}{3}\pi$ (cm³)

Vậy thể tích của lượng nước còn lại trong chiếc cốc là $\frac{10}{3}\pi$ cm³.

2)



a) Gọi O' là trung điểm của NB.

Chứng minh được tứ giác $BONK$ nội tiếp đường tròn tâm O', bán kính bằng $\frac{1}{2}NB$.

Xét ΔSBA và ΔSKC có:

$\widehat{ASC}$ chung

$\widehat{SAB} = \widehat{SCK}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{BK}$ của đường tròn (O))

Suy ra $\Delta SBA \backsim \Delta SKC\,(g.g)$

Do đó $\frac{SB}{SK} = \frac{SA}{SC}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) hay $SK.SA = SB.SC$ (điều phải chứng minh).

b) Ta có $KE \perp OA$ (giả thiết); $BO \perp OA$ (chứng minh trên).

nên $KE // BO$ (từ vuông góc đến song song) hay $KE // BC$

Suy ra $\widehat{EKN} = \widehat{KCB}$ (hai góc so le trong)

Lại có $\widehat{KCB} = \widehat{OKN}$ (do $OK = OC = R$, ΔOKC cân tại O)

Do đó $\widehat{EKN} = \widehat{OKN}$. Khi đó KH là tia phân giác của $\widehat{EKO}$

Chứng minh được tứ giác $AHOC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC.

Suy ra $\widehat{AOH} = \widehat{ACH}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn $\overset{\frown}{AH}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AHOC$)

Mà $\widehat{ACH} = \frac{1}{2}\widehat{AOK}$ ($\widehat{ACH}$ là góc nội tiếp, $\widehat{AOK}$ là góc ở tâm cùng chắn $\overset{\frown}{AK}$ của (O))

Suy ra $\widehat{AOH} = \frac{1}{2}\widehat{AOK}$. Do đó OH là tia phân giác của $\widehat{AOK}$

Xét ΔKOE có H là giao điểm của 2 đường phân giác KH và OH. Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp ΔKOE (điều phải chứng minh).

c) Vì $AO \perp BC$, $OP = OC = R$ nên ΔOPC vuông cân tại O.

Do đó $\widehat{OCP}=\widehat{OPC}=45^0$ (1) và $PC=\dfrac{OP}{\sin\widehat{OCP}}=\dfrac{R}{\sin 45^o}=R\sqrt{2}$

Ta có $\widehat{PFC}=\widehat{CKF}+\widehat{KCF}$ (tính chất góc ngoài tại đỉnh F của ΔCFK)

Khi đó, xét (O) có $\widehat{PFC}=\dfrac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{PC}$ + sđ $\overset{\frown}{BK}$) $=\dfrac{1}{2}$(sđ $\overset{\frown}{PB}$ + sđ $\overset{\frown}{BK}$) $=\dfrac{1}{2}$ sđ $\overset{\frown}{PK}$ $=\widehat{KCP}$

Hay $\widehat{PFC}=\widehat{NCP}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\Delta FCP \backsim \Delta CPN\,(g.g)$

Suy ra $\dfrac{FC}{CP}=\dfrac{CP}{PN}$ (cặp cạnh tương ứng tỉ lệ) hay $FC.PN=CP^2=\left(R\sqrt{2}\right)^2=2R^2$

Khi đó $S_{FNCP}=S_{\Delta PFN}+S_{\Delta CNP}=\dfrac{1}{2}FO.PN+\dfrac{1}{2}CO.PN=\dfrac{1}{2}FC.PN=\dfrac{1}{2}.2R^2=R^2$ (không đổi).

Kẻ $KI\perp PC\ (I\in PC)$.

Khi đó $S_{\Delta KNF}=S_{\Delta KPC}-S_{FNCP}=\dfrac{1}{2}KI.PC-R^2$.

Để S_{KNF} lớn nhất khi $S_{\Delta KPC}$ đạt giá trị lớn nhất. $S_{\Delta KPC}$ đạt giá trị lớn nhất khi KI đạt giá trị lớn nhất (do $PC=R\sqrt{2}$ không đổi).

Gọi J là trung điểm PC. Khi đó J cố định, OJ không đổi và bằng $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $KI\le KJ\le KO+OJ$. Suy ra $KI\le R+\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi K,O,J thẳng hàng và I trùng với J. Do đó K,O,I,J thẳng hàng.

Khi đó K là điểm chính giữa cung AB nhỏ.

Vậy điểm K nằm chính giữa cung nhỏ AB thì diện tích tam giác KNF lớn nhất.

Bài V (0,5 điểm). Một xưởng sản xuất cần thiết kế một bể đựng nước hình trụ bằng nhựa có thể tích là 128π (m³). Tìm bán kính đáy của bể sao cho bể hình trụ được làm ra tốn ít vật liệu nhất.

Lời giải

Gọi chiều cao và bán kính của bể lần lượt là h, R (đơn vị: m, điều kiện: $h, R > 0$).

Thể tích của bể là $V = h\pi R^2 = 128\pi$ nên $h = \dfrac{128}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của bể là $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi R \cdot \dfrac{128}{R^2} + 2\pi R^2 = 2\pi \cdot \left(\dfrac{128}{R} + R^2\right)$

Ta có:

$$\frac{128}{R} + R^2 = \left(R^2 - 8R + 16\right) + \frac{128}{R} + 8R - 16 = \left(R-4\right)^2 + 8\cdot\left(\frac{16}{R} + R\right) - 16 \geq 0 + 8.2.\sqrt{16} - 16 = 48$$

Do đó $S_{tp} \geq 2\pi.48 = 96\pi$, dấu bằng xảy ra khi $R = 4$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy để tiết kiệm vật liệu khi làm bể đựng nước có dạng hình trụ thì bán kính đáy của bể là 4 m.

--HẾT--