

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN BIẾN ĐỔI ĐẠI SỐ TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN

NĂM HỌC 2025 – 2026

Bài 1. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Bài 2. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{8+2\sqrt{15}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{5}$.

b) Cho x, y, z dương thỏa $xyz=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{xz} + \sqrt{z} + 1}.$$

Bài 3. (Trường chuyên tỉnh Bắc Cạn năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.

Bài 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

a) Không dùng máy tính, chứng minh rằng biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ có giá trị là một số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức $(x^3 + 4x^2 - 23x + 2)^{2026}$ khi $x = 3\sqrt{3} - 2$.

Bài 5. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{2}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x-4\sqrt{x}+4} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức T .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $T < 0$.

Bài 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

Cho $M = \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1} - \frac{a-\sqrt{a}-3}{a-\sqrt{a}-2} \right) : \left(\frac{a-\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}-2} + \frac{2}{\sqrt{a}-2} \right)$ với $a \geq 0, a \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Chứng minh rằng $M \leq \frac{1}{7}$.

Bài 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Cho hai biểu thức $P = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + 2$ và $Q = 1 - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ ($x \geq 1$).

Với những giá trị nào của x thì $P \geq Q$?

Bài 8. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4, x \neq 9$.

- a) Rút gọn biểu thức P . b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho P nhận giá trị là số chẵn.

Bài 9. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{11\sqrt{x}+4}{x+3\sqrt{x}+2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{-2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$.

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các giá trị của x để P là số nguyên.

Bài 10. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

- a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$. b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Bài 11. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{x-7\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{2x+10\sqrt{x}+12}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

- a) Rút gọn biểu thức A .
b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 12. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x+5}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

Bài 13. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

Với hai số thực $a \geq b > 0$ và biểu thức: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}}$.

- a) Rút gọn biểu thức B .
b) Khi $a = 2$, tìm tất cả các số nguyên b để B nhận giá trị nguyên.

Bài 14. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{4\sqrt{a}}{a+4} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+4\sqrt{a}+a+4} \right)$, với $a \geq 0, a \neq 4$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Tính giá trị biểu thức P với $a = \sqrt{27} \cdot \sqrt{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1}$.

Bài 15. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $3a^2 + 5ab - 2b^2 = 0$. Tính giá trị của $P = \frac{3a-2b}{2a+b}$.

Bài 16. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a + b + c \neq 0$ và $ab + bc + ca = 0$. Tính giá trị của biểu

thức $P = \frac{1}{a^2 - bc} + \frac{1}{b^2 - ca} + \frac{1}{c^2 - ab}$.

Bài 17. (Trường chuyên tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a + b = 6$ và $a + \frac{4}{a} = b + \frac{4}{b}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{a^2 + 1}.$$

Bài 18. (Trường chuyên tin Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Cho $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $P = a^2 + b^2$.

Bài 19. (Trường chuyên tin Hải Dương năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left[\frac{2x - 1 + \sqrt{x}}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1} \right] \frac{(x - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{2\sqrt{x} - 1} - 1$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.

Bài 20. (Trường chuyên tin Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Bài 21. (Trường chuyên tin Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $(a + b)(a - b) = 1$. Tính giá trị

$$P = \sqrt{(4a + 5)^2 + (3b)^2} - \sqrt{(4a - 5)^2 + (3b)^2}.$$

Bài 22. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} + \frac{3(x\sqrt{x} - 1)}{x + \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$.

b) Cho hai số thực dương x, y phân biệt thỏa mãn $\frac{x}{y} = \frac{x^3 + y}{y^3 + x} = \frac{xy}{xy + 1}$. Tính giá trị của $x^3 + y^3$.

Bài 23. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{x - 4} + \frac{3\sqrt{x} + 10}{x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8} \right) \left(\frac{x + 4\sqrt{x} + 4}{4\sqrt{x}} - 2 \right)$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M .

b) Đặt $N = M \cdot (9x - 2\sqrt{x} + 4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức N .

Bài 24. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $y\sqrt{25 - y^2} + x\sqrt{25 - x^2} = 2xy$ ($0 < x, y < 5$). Chứng minh $x^2 + y^2 = 25$.

Bài 25. (Trường chuyên tỉnh Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x - 3\sqrt{x} + 4}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right) : \frac{2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}}$.

- a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .
b) Tìm x để $|A| + A = 0$.

Bài 26. (Trường chuyên tỉnh Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x - 4}{2x + 3\sqrt{x} - 2} - \frac{2x - 5\sqrt{x} - 1}{4x - 1} \right) \cdot \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.

Tìm điều kiện của x để A xác định và rút gọn biểu thức A .

Bài 27. (Trường chuyên tỉnh Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{\sqrt{x} + 2}{x - \sqrt{x} + 1}$ với $x \geq 0$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{4}$.

Bài 28. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai năm 2025 – 2026)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} + \frac{8\sqrt{x} + 8}{x + 2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{x + \sqrt{x} + 3}{x + 2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ và chứng minh rằng

$P \leq 1$ với mọi $x > 0$.

b) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $abc \neq 0; a + b + c \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \left(2 - \frac{a}{b} \right)^{2025} + \left(2 - \frac{b}{c} \right)^{2005} + \left(2 - \frac{c}{a} \right)^{2025}.$$

Bài 29. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $B = \frac{3\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{3\sqrt{x} - 1} - \frac{5x + 4\sqrt{x} + 2}{3x + 5\sqrt{x} - 2}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{9}$.

Rút gọn B rồi tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

Bài 30. (Trường chuyên tỉnh Long An năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x} - 3}{x - 2\sqrt{x} - 3} - \frac{2(\sqrt{x} - 3)}{\sqrt{x} + 1} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

- a) Rút gọn biểu thức P .
b) Chứng minh $P \geq 4$.

Bài 31. (Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2025 – 2026)

Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 9xy$.

Bài 32. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2025 – 2026)

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{2x+y}{3} = \frac{2y+z}{4} = \frac{2z+x}{5}$. Chứng minh rằng $x + y = z$.

b) Cho a, b là các số thực dương khác nhau thỏa mãn $a - b = \sqrt{2025 - b^2} - \sqrt{2025 - a^2}$. Tính giá trị biểu thức $A = a^2 + b^2$.

Bài 33. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên năm 2025 – 2026)

a) Cho biểu thức $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức P . Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $B = \frac{9}{P}$ nhận giá trị nguyên?

b) Cho a và b là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$2a^2 + 6a + 3 = 0; 3b^2 + 6b + 2 = 0; ab \neq 1.$$

Không tính các giá trị của a và b , hãy tính giá trị của biểu thức $P = \frac{6075b^3}{20ab^2 + (ab+1)^3}$.

Bài 34. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-6\sqrt{x}+9}$

a) Tìm điều kiện của x để P xác định và rút gọn P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \leq -2$.

Bài 35. (Trường chuyên Tin tỉnh Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P < -3$.

Bài 36. (Trường chuyên Toán tỉnh Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$, với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$. Rút gọn biểu thức A và

tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A > -1$.

Bài 37. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực a, b ($a \neq -2, b \neq -2$), thỏa mãn $ab + a + b = 0$.

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{(a+1)^2}{a^2 + 2a + b + 2} + \frac{(b+1)^2}{b^2 + 2ab + a + 2}$.

Bài 38. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\frac{a+1}{4\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \right)$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Chứng minh $P > \frac{3}{a+\sqrt{a}+1}$ với mọi $a > 0, a \neq 1$.

Bài 39. (Trường chuyên tỉnh Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{2+\sqrt{xy}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$.

Tính giá trị biểu thức A khi $x = 11 - 6\sqrt{2}, y = 3 + 2\sqrt{2}$.

Bài 40. (Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị biểu thức P khi $x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}$.

Bài 41. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $M = \left(\frac{3\sqrt{x}+3}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$ với $0 \leq x \neq 1$.

Bài 42. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x-y} = 0$. Tính $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Bài 43. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình năm 2025 – 2026)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x-3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} + \frac{x+5\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+3}$ (điều kiện $x > 0$). Tìm x để $A = 2x$.

b) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq 2025, b \geq 2025$ và $2025(a+b) = ab$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{a-2025} + \sqrt{b-2025} - \frac{1}{45}\sqrt{ab}$.

Bài 44. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Bài 45. (Trường chuyên tỉnh Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực khác nhau a, b và $ab + 1 \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} = \frac{2}{1 + ab}$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{a^{2025} + 1} + \frac{1}{b^{2025} + 1}$.

Bài 46. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2025 – 2026)

1) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \frac{3}{2}} - \sqrt{\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} - \frac{3}{2}}$.

2) Cho biểu $B = \frac{2x + 4\sqrt{x} - 9}{x + \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức B ;

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức B nhận giá trị nguyên.

Bài 47. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{(2\sqrt{3} - 1)\sqrt{13 + 4\sqrt{3}}}{\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}}$.

Bài 48. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2}$ và $B = \frac{x + \sqrt{x} - 4}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$.

c) Tìm số nguyên dương x lớn nhất để $\frac{A}{B} < \frac{1}{2}$. $X = 3$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Lời giải

Với $x \geq 0$ và $x \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+3} - \frac{36}{x-9} = \frac{(\sqrt{x}+3)^2}{x-9} - \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{x-9} - \frac{36}{x-9} \\ &= \frac{(\sqrt{x}+3)^2 - (\sqrt{x}-3)^2 - 36}{x-9} = \frac{12\sqrt{x} - 36}{x-9} = \frac{12(\sqrt{x}-3)}{x-9} = \frac{12}{\sqrt{x}+3}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{12}{\sqrt{x}+3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 9$.

Bài 2. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

a) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{8+2\sqrt{15}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{5}$.

b) Cho x, y, z dương thỏa $xyz=1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{xy} + \sqrt{x} + 1} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{yz} + \sqrt{y} + 1} + \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{xz} + \sqrt{z} + 1}.$$

Lời giải

a) $A=2$.

b) Đặt $\sqrt{x}=a, \sqrt{y}=b, \sqrt{z}=c$ ($a, b, c > 0$).

Ta có: $xyz=1$ hay $\sqrt{xyz}=1$ suy ra $abc=1$. Khi đó

$$\begin{aligned} P &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ac+c+1} \\ P &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{abc+ab+a} + \frac{c}{ac+c+abc} \\ P &= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{1}{a+1+ab} \\ P &= \frac{a+ab+1}{ab+a+1} = 1. \end{aligned}$$

Vậy $P=1$.

Bài 3. (Trường chuyên tỉnh Bắc Cạn năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm các số nguyên x để A nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$A = \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}-2}.$$

Vậy $A = \frac{2}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

b) Để $A \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{2}{\sqrt{x}-2} \in \mathbb{Z}$.

Tức là $\sqrt{x}-2$ là ước của 2 suy ra $\sqrt{x}-2 \in \{-2; -1; 1; 2\}$, suy ra $x \in \{0; 1; 9; 16\}$

Kết hợp điều kiện xác định $x > 0, x \neq 4$ suy ra $x \in \{1; 9; 16\}$.

Vậy $x \in \{1; 9; 16\}$ thì $A \in \mathbb{Z}$.

Bài 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

a) Không dùng máy tính, chứng minh rằng biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{3}}} - \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}$ có giá trị là một số nguyên.

b) Tính giá trị của biểu thức $(x^3 + 4x^2 - 23x + 2)^{2026}$ khi $x = 3\sqrt{3} - 2$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3+2\sqrt{3} \cdot 1+1} = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} = |\sqrt{3}+1| = \sqrt{3}+1;$$

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{3-2\sqrt{3} \cdot 1+1} = \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1 \text{ (vì } \sqrt{3} > 1).$$

Thay vào A , ta được:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{3}+1} - \frac{1}{\sqrt{3}-1} = \frac{(\sqrt{3}-1) - (\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1-\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2} = \frac{-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Vì -1 là một số nguyên nên ta có điều phải chứng minh.

b) Ta có $x + 2 = 3\sqrt{3}$.

Bình phương hai vế, ta được: $(x + 2)^2 = (3\sqrt{3})^2$, hay $x^2 + 4x - 23 = 0$.

Từ đây suy ra: $(x^3 + 4x^2 - 23x + 2)^{2026} = [x(x^2 + 4x - 23) + 2]^{2026} = 2^{2026}$.

Vậy giá trị của biểu thức là 2^{2026} khi $x = 3\sqrt{3} - 2$.

Bài 5. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $T = \left(\frac{2}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{2 - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 4\sqrt{x} + 4} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức T .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x sao cho $T < 0$.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{2}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{2 - \sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} + 2}{x - 4\sqrt{x} + 4} \right) \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} + \frac{1}{\sqrt{x} - 2} \right] : \left[\frac{\sqrt{x} + 2}{(\sqrt{x} - 2)^2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{\sqrt{x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Vậy $T = \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

b) Ta có: $T < 0$ hay $\frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x}} < 0$ suy ra $\sqrt{x} - 2 < 0$ (do $\sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0, x \neq 4$).

Do đó $\sqrt{x} < 2$ nên $0 \leq x < 4$.

Kết hợp điều kiện xác định, ta được $0 < x < 4$.

Vì x nhận các giá trị nguyên nên $x \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy với các giá trị nguyên $x \in \{1, 2, 3\}$ thì $T < 0$.

Bài 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

Cho $M = \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1} - \frac{a-\sqrt{a}-3}{a-\sqrt{a}-2} \right) : \left(\frac{a-\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}-2} + \frac{2}{\sqrt{a}-2} \right)$ với $a \geq 0, a \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức M .

b) Chứng minh rằng $M \leq \frac{1}{7}$.

Lời giải

a) Với $a \geq 0, a \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+1} - \frac{a-\sqrt{a}-3}{a-\sqrt{a}-2} \right) : \left(\frac{a-\sqrt{a}}{a-\sqrt{a}-2} + \frac{2}{\sqrt{a}-2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{a}-1}{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)} \cdot \frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-2)}{a+\sqrt{a}+2} = \frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+2}. \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+2}$ với $a \geq 0, a \neq 4$.

b) Theo yêu cầu bài toán thì: $\frac{\sqrt{a}-1}{a+\sqrt{a}+2} \leq \frac{1}{7}$ suy ra $\frac{(\sqrt{a}-3)^2}{7(a+\sqrt{a}+2)} \geq 0$.

Điều trên là hiển nhiên nên ta có điều phải chứng minh.

Bài 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Cho hai biểu thức $P = \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + 2$ và $Q = 1 - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$ ($x \geq 1$).

Với những giá trị nào của x thì $P \geq Q$, ?

Lời giải

Với $x \geq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P-Q &= \sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} - 1 \\ &= \sqrt{(2-\sqrt{x-1})^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2} - 1 \\ &= |2-\sqrt{x-1}| + |\sqrt{x-1}-1| - 1 \end{aligned}$$

Ta có $\begin{cases} |2-\sqrt{x-1}| \geq 2-\sqrt{x-1} \\ |\sqrt{x-1}-1| \geq \sqrt{x-1}-1 \end{cases} \quad (\text{do } |A| \geq A).$

Dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} 2-\sqrt{x-1} \geq 0 \\ \sqrt{x-1}-1 \geq 0 \end{cases}$ suy ra $2 \leq x \leq 5$.

$\Rightarrow P-Q \geq 0$ hay $P \geq Q$, ta có điều phải chứng minh.

Bài 8. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các số nguyên x sao cho P nhận giá trị là số chẵn.

Lời giải

a) Với $x \geq 0$ và $x \neq 4, x \neq 9$, ta có:

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9}{x-5\sqrt{x}+6} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} - \frac{2\sqrt{x}+1}{3-\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) + (2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9 - (x-9) + (2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{2\sqrt{x}-9-x+9+2x-4\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$$

$$P = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}.$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4, x \neq 9$.

b) Ta có $P = \frac{\sqrt{x}-3+4}{\sqrt{x}-3} = 1 + \frac{4}{\sqrt{x}-3}.$

P nhận giá trị là số chẵn khi $\sqrt{x}-3$ là ước số của 4. Ta có bảng

$\sqrt{x}-3$	4	-4	2	-2	1	-1
x	49 (thỏa mãn)	(loại)	25 (thỏa mãn)	1 (thỏa mãn)	16 (thỏa mãn)	4 (thỏa mãn)

Thử lại ta thấy P nhận giá trị chẵn khi $x = 49$.

Vậy $x = 49$ P thì nhận giá trị là số chẵn.

Bài 9. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{11\sqrt{x}+4}{x+3\sqrt{x}+2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{-2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}} \right)$ với $x > 0, x \neq 4$.

Rút gọn biểu thức P và tìm tất cả các giá trị của x để P là số nguyên.

Lời giải

Với $x > 0$ và $x \neq 4$, ta có:

$$P = \left(\frac{2}{\sqrt{x}+1} + \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{11\sqrt{x}+4}{x+3\sqrt{x}+2} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} + \frac{-2\sqrt{x}+4}{x+2\sqrt{x}} \right)$$

$$P = \frac{2(\sqrt{x}+2) + 3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - (11\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)} : \frac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}$$

$$P = \frac{3x-6\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} : \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)} = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

Với điều kiện $x > 0$, ta chứng minh được: $0 < P = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 3$.

Mà P là số nguyên nên $P \in \{1; 2\}$.

Với $P=1$ ta có $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn);

Với $P=2$ ta có $\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = 2 \Rightarrow x = 4$ (không thỏa mãn).

Vậy $x = \frac{1}{4}$ là giá trị cần tìm để P là số nguyên.

Bài 10. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Với $x > 0$, cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 64$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Tìm x để $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$.

Lời giải

a) Thay $x = 64$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{64}-1}{\sqrt{64}} = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Vậy $A = \frac{7}{8}$ khi $x = 64$.

b) Với $x > 0$, ta có:

$$B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} + \frac{1-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{x-1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0$.

c) Ta có: $\frac{A}{B} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} : \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} > \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} > \frac{3}{2}$ (điều kiện: $x > 0$ và $x \neq 1$)

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{3}{2} > 0$$

$$\frac{2\sqrt{x}+2-3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} > 0$$

$$2-\sqrt{x} > 0 \text{ (vì } x > 0 \text{)}$$

$$\sqrt{x} < 2 \Rightarrow x < 4.$$

Kết hợp điều kiện, ta được $0 < x < 4$ và $x \neq 1$.

Vậy $\frac{A}{B} > \frac{3}{2}$ khi $0 < x < 4$ và $x \neq 1$.

Bài 11. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \frac{x\sqrt{x}+5\sqrt{x}+6}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{x-7\sqrt{x}-8}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{2x+10\sqrt{x}+12}{x-\sqrt{x}-6}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức A .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để biểu thức $\frac{4}{A}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 9$, ta có:

$$A = \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-8)}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{2(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{x-\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} - \frac{2(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}-3}$$

$$= \frac{x-3\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x} - \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}+1} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $A = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

b) Theo bất đẳng thức Côsi, ta có $A = \sqrt{x} + 1 + \frac{9}{\sqrt{x} + 1} - 2 \geq 2\sqrt{9} - 2 = 4$

Để $\frac{4}{A} \in \mathbb{Z}$ thì $A = 4$ hay $\sqrt{x} + 1 = \frac{9}{\sqrt{x} + 1}$ suy ra $x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy $x = 4$.

Bài 12. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x+5}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ (với $x \geq 0, x \neq 1$).

Lời giải

Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x+5}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \left[\frac{x+5}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2}{\sqrt{x}-1} \right] \cdot (\sqrt{x}+2) \\ &= \frac{x+5-2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} \cdot (\sqrt{x}+2) = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1. \end{aligned}$$

Vậy $P = \sqrt{x}-1$ với $x \geq 0, x \neq 1$

Bài 13. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

Với hai số thực $a \geq b > 0$ và biểu thức: $B = \left(\frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}}$.

a) Rút gọn biểu thức B .

b) Khi $a = 2$, tìm tất cả các số nguyên b để B nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $a \geq b > 0$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \left(\frac{1}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b}} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} = \left(\frac{\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b} + \sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}^2 - \sqrt{a-b}^2} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} \\ &= \left(\frac{2\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}^2 - \sqrt{a-b}^2} \right) \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} = \frac{\sqrt{a+b}}{b} \cdot \frac{a+b^2}{\sqrt{a+b}} = \frac{a+b^2}{b}. \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{a+b^2}{b}$ với $a \geq b > 0$.

b) Khi $a = 2$, ta có: $B = \frac{2+b^2}{b} = b + \frac{2}{b}$.

Để B nhận giá trị nguyên thì b là ước của 2.

Suy ra $b \in \{1; 2\}$ thỏa mãn điều kiện xác định.

Vậy khi $a = 2, b \in \{1; 2\}$ thì B nhận giá trị nguyên.

Bài 14. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(1 - \frac{4\sqrt{a}}{a+4}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+4\sqrt{a}+a+4}\right)$, với $a \geq 0, a \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị biểu thức P với $a = \sqrt{27} \cdot \sqrt{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1}$.

Lời giải

a) Với $a \geq 0, a \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(1 - \frac{4\sqrt{a}}{a+4}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4\sqrt{a}}{a\sqrt{a}+4\sqrt{a}+a+4}\right) = \frac{a-4\sqrt{a}+4}{a+4} : \left[\frac{1}{\sqrt{a}+1} - \frac{4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}+1)(a+4)}\right] \\ &= \frac{a-4\sqrt{a}+4}{a+4} : \frac{a-4\sqrt{a}+4}{(\sqrt{a}+1)(a+4)} = \frac{(\sqrt{a}+1)(a+4)}{a+4} = \sqrt{a}+1 \end{aligned}$$

Vậy $P = \sqrt{a}+1$ với $a \geq 0, a \neq 4$.

b) Ta có:

$$a = \sqrt{27} \cdot \sqrt{\sqrt{4+2\sqrt{3}}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{4-2\sqrt{3}}+1} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{(\sqrt{3}+1-1)(\sqrt{3}-1+1)} = 3\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 9 \text{ (thỏa mãn)}$$

Với $a = 9$ suy ra $P = \sqrt{9}+1 = 4$.

Bài 15. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Xét các số thực dương a, b thỏa mãn $3a^2 + 5ab - 2b^2 = 0$. Tính giá trị của $P = \frac{3a-2b}{2a+b}$.

Lời giải

$$3a^2 + 5ab - 2b^2 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 6ab - ab - 2b^2 = 0 \Rightarrow 3a(a+2b) - b(a+2b) = 0 \Rightarrow (3a-b)(a+2b) = 0$$

$3a = b$ hoặc $a+2b = 0$ (vô lý do a, b đều dương - giả thiết)

$$\text{Thay } b = 3a \text{ vào } P \text{ có: } P = \frac{3a - 2 \cdot 3a}{2a + 3a} = \frac{-3a}{5a} = \frac{-3}{5}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{-3}{5}.$$

Bài 16. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho a, b, c là các số thực khác 0, thỏa mãn $a+b+c \neq 0$ và $ab+bc+ca = 0$. Tính giá trị của biểu

$$\text{thức } P = \frac{1}{a^2-bc} + \frac{1}{b^2-ca} + \frac{1}{c^2-ab}.$$

Lời giải

$$\text{Vì } ab+bc+ca = 0 \text{ nên } a^2-bc = a^2+ab+ac = a(a+b+c).$$

$$\text{Tương tự } b^2-ca = b(a+b+c), c^2-ab = c(a+b+c).$$

$$\text{Khi đó: } P = \frac{1}{a(a+b+c)} + \frac{1}{b(a+b+c)} + \frac{1}{c(a+b+c)} = \frac{ab+bc+ca}{abc(a+b+c)} = 0$$

Bài 17. (Trường chuyên tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho a, b là hai số thực phân biệt thỏa mãn $a + b = 6$ và $a + \frac{4}{a} = b + \frac{4}{b}$. Tính giá trị của biểu thức

$$M = \frac{a}{b^2 + 1} + \frac{b}{a^2 + 1}.$$

Lời giải

Vì $a + \frac{4}{a} = b + \frac{4}{b}$ nên $(a - b) - \frac{4(a - b)}{ab} = 0$ suy ra $(a - b)\left(1 - \frac{4}{ab}\right) = 0$.

Lưu ý rằng a, b là hai số thực phân biệt, vì thế $ab = 4$.

Đến đây $M = \frac{a^3 + b^3 + a + b}{a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1} = \frac{(a + b)^3 - 3ab(a + b) + (a + b)}{(ab)^2 + (a + b)^2 - 2ab + 1} = \frac{6^3 - 3 \cdot 4 \cdot 6 + 6}{4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 + 1} = \frac{10}{3}$.

Bài 18. (Trường chuyên tin Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Cho $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính $P = a^2 + b^2$.

Lời giải

Đặt $P = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3} + \sqrt{4 - 4\sqrt{5} + 5} = \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$
 $\Rightarrow P = (2 - \sqrt{3}) + (\sqrt{5} - 2) = \sqrt{5} - \sqrt{3} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$.

Khi đó, $a = 5$ và $b = 3$ suy ra $a^2 + b^2 = 34$. Vậy $a^2 + b^2 = 34$.

Bài 19. (Trường chuyên tin Hải Dương năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left[\frac{2x - 1 + \sqrt{x}}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1} \right] \frac{(x - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{2\sqrt{x} - 1} - 1$, với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Tìm các giá trị của x sao cho $A < \frac{-1}{7}$.

Lời giải

Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{2x - 1 + \sqrt{x}}{1 - x} + \frac{2x\sqrt{x} + x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x} + 1} \right] \cdot \frac{(x - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{2\sqrt{x} - 1} - 1 \\ &= \left[\frac{(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)} \right] \cdot \frac{(x - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x})}{2\sqrt{x} - 1} - 1 \\ &= \left[\frac{1}{1 - \sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} \right] \cdot (x - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) - 1 \\ &= \frac{x - \sqrt{x} + 1 + \sqrt{x} - x}{(1 - \sqrt{x})(x - \sqrt{x} + 1)} \cdot (x - \sqrt{x})(1 - \sqrt{x}) - 1 = \frac{x - \sqrt{x}}{x - \sqrt{x} + 1} - 1 = \frac{-1}{x - \sqrt{x} + 1}. \end{aligned}$$

Do đó

$$A < \frac{-1}{7}$$

$$\frac{-1}{x - \sqrt{x} + 1} < \frac{-1}{7}$$

$$\frac{1}{x - \sqrt{x} + 1} > \frac{1}{7}$$

$$x - \sqrt{x} + 1 < 7$$

$$x - \sqrt{x} - 6 < 0$$

$$(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) < 0$$

$\sqrt{x} - 3 < 0$ (do $\sqrt{x} + 2 > 0$ với mọi $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$). Suy ra $x < 9$.

Kết hợp điều kiện xác định ta được $0 \leq x < 9, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Vậy $0 \leq x < 9, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$ thì $A < \frac{-1}{7}$.

Bài 20. (Trường chuyên tin Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Lời giải

Với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} + \frac{x + 2\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1} \right) : \frac{1}{2\sqrt{x} - 1} = \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} + \frac{(\sqrt{x} + 1)^2}{\sqrt{x} + 1} \right] : \frac{1}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{x} + 1) : \frac{1}{2\sqrt{x} - 1} \\ &= (2\sqrt{x} + 1)(2\sqrt{x} - 1) = 4x - 1. \end{aligned}$$

Vậy $P = 4x - 1$ với $x \geq 0, x \neq 1, x \neq \frac{1}{4}$.

Bài 21. (Trường chuyên tin Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực $a, b > 0$ thỏa mãn $(a + b)(a - b) = 1$. Tính giá trị

$$P = \sqrt{(4a + 5)^2 + (3b)^2} - \sqrt{(4a - 5)^2 + (3b)^2}.$$

Lời giải

Từ giả thiết ta được $a^2 - b^2 = 1$ hay $b^2 = a^2 - 1$. Khi đó:

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{(4a + 5)^2 + (3b)^2} - \sqrt{(4a - 5)^2 + (3b)^2} \\ &= \sqrt{16a^2 + 40a + 25 + 9a^2 - 9} - \sqrt{16a^2 - 40a + 25 + 9a^2 - 9} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{25a^2 + 40a + 16} - \sqrt{25a^2 - 40a + 16} = \sqrt{(5a+4)^2} - \sqrt{(5a-4)^2}$$

$$= |5a+4| - |5a-4|.$$

Mặt khác $a^2 = b^2 + 1 \geq 1$ nên $a \geq 1$ (do $a > 0$).

Do đó $P = 5a + 4 - (5a - 4) = 8$.

Bài 22. (Trường chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

a) Rút gọn biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{3(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

b) Cho hai số thực dương x, y phân biệt thỏa mãn $\frac{x}{y} = \frac{x^3+y}{y^3+x} = \frac{xy}{xy+1}$. Tính giá trị của x^3+y^3 .

Lời giải

a) Với $x > 0$, ta có:

$$P = \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} + \frac{3(x\sqrt{x}-1)}{x+\sqrt{x}+1} = (\sqrt{x-1}+\sqrt{x}) - (\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) + 3(\sqrt{x}-1) = 5\sqrt{x}-3$$

Vậy $P = 5\sqrt{x}-3$ với $x > 0$.

b) Ta có $\frac{x}{y} = \frac{x^3+y}{y^3+x}$ suy ra $x(y^3+x) = y(x^3+y)$ hay $(x^2-y^2)(xy-1) = 0$.

Do x, y là các số thực dương nên $x+y > 0$, ta có các khả năng sau:

Nếu $x=y$ thì $\frac{xy}{xy+1} = \frac{x^2}{x^2+1} < 1$, vô lý;

Nếu $xy=1$ thì $2x=y$ suy ra $2x^2=1$ hay $x=\frac{\sqrt{2}}{2}, y=\sqrt{2}$. Như vậy $x^3+y^3 = \frac{9\sqrt{2}}{4}$.

Bài 23. (Trường chuyên tỉnh Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $M = \left(\frac{1}{x-4} + \frac{3\sqrt{x}+10}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8} \right) \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{4\sqrt{x}} - 2 \right)$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức M .

b) Đặt $N = M \cdot (9x - 2\sqrt{x} + 4)$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức N .

Lời giải

a) Điều kiện xác định $x > 0; x \neq 4$

$$M = \left(\frac{1}{x-4} + \frac{3\sqrt{x}+10}{(\sqrt{x}-2)(x-4)} \right) \left[\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{4\sqrt{x}} - 2 \right] = \frac{4(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(x-4)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{4\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $M = \frac{1}{\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$.

b) Ta có : $N = M(9x - 2\sqrt{x} + 4) = \frac{1}{\sqrt{x}}(9x - 2\sqrt{x} + 4) = \frac{9x - 2\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}}$

$$= 9\sqrt{x} - 2 + \frac{4}{\sqrt{x}} = \left(9\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}\right) - 2 \geq 2\sqrt{9\sqrt{x} \cdot \frac{4}{\sqrt{x}}} - 2 = 10.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức N bằng 10 .

Dấu “=” xảy ra khi $9\sqrt{x} = \frac{4}{\sqrt{x}} \Rightarrow x = \frac{4}{9}$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị nhỏ nhất của N là 10 khi $x = \frac{4}{9}$.

Bài 24. (Trường chuyên tỉnh Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy$ ($0 < x, y < 5$). Chứng minh $x^2 + y^2 = 25$.

Lời giải

$$y\sqrt{25-y^2} + x\sqrt{25-x^2} = 2xy \quad (0 < x, y < 5)$$

$$y(\sqrt{25-y^2} - x) + x(\sqrt{25-x^2} - y) = 0$$

$$\frac{y(25-x^2-y^2)}{\sqrt{25-y^2}+x} + \frac{x(25-x^2-y^2)}{\sqrt{25-x^2}+y} = 0$$

$$(25-x^2-y^2) \left(\frac{y}{\sqrt{25-y^2}+x} + \frac{x}{\sqrt{25-x^2}+y} \right) = 0$$

Vì $0 < x, y < 5$ nên $\frac{y}{\sqrt{25-y^2}+x} + \frac{x}{\sqrt{25-x^2}+y} > 0$

Do đó $25-x^2-y^2 = 0$ hay $x^2 + y^2 = 25$ (đpcm)

Bài 25. (Trường chuyên tỉnh Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-3\sqrt{x}+4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$.

a) Tìm điều kiện xác định và rút gọn biểu thức A .

b) Tìm x để $|A| + A = 0$.

Lời giải

a) Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq 4$.

Với điều kiện đó, ta có:

$$A = \frac{x-3\sqrt{x}+4-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 4$.

b) Ta có: $|A| + A = 0$ hay $|A| = -A$. Suy ra $A \leq 0$.

$$\text{Do đó } \begin{cases} x > 0, x \neq 4 \\ \frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+1} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, x \neq 4 \\ \sqrt{x}-2 \leq 0 \end{cases} \text{ suy ra } 0 < x < 4.$$

Vậy $0 < x < 4$ thì $|A| + A = 0$.

Bài 26. (Trường chuyên tỉnh Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \cdot \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$.

Tìm điều kiện của x để A xác định và rút gọn biểu thức A .

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0, x \neq \frac{1}{4}$

$$A = \left(\frac{x-4}{2x+3\sqrt{x}-2} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{4x-1} \right) \cdot \left(x\sqrt{x} + 2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$A = \left[\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{2x^2+4\sqrt{x}+x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \left[\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}-1} - \frac{2x-5\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \right] \cdot \frac{2x^2+4\sqrt{x}+x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1) - (2x-5\sqrt{x}-1)}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{x\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1) + 2(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{2\sqrt{x}-1}{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{(2\sqrt{x}+1)(x\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}}$$

$$A = \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}.$$

Với $A = \frac{x\sqrt{x}+2}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq \frac{1}{4}$.

Bài 27. (Trường chuyên tỉnh Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm các giá trị của x để $P \geq \frac{1}{4}$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{3\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \left(\frac{3\sqrt{x}}{(x-\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(x-\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{x-\sqrt{x}+1}{(x-\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}+2}{x-\sqrt{x}+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0$.

b) Với $x \geq 0$, ta có:

$$P \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}+2} \geq \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{x}+2 \leq 4$$

$$\sqrt{x} \leq 2$$

$$x \leq 4$$

Kết hợp điều kiện xác định ta có $0 \leq x \leq 4$

Vậy với $0 \leq x \leq 4$ thỏa mãn $P \geq \frac{1}{4}$.

Bài 28. (Trường chuyên tỉnh Lào Cai năm 2025 – 2026)

a) Rút gọn biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{8\sqrt{x}+8}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ và chứng minh rằng

$P \leq 1$ với mọi $x > 0$.

b) Cho $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ với $abc \neq 0; a+b+c \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức

$$Q = \left(2 - \frac{a}{b} \right)^{2025} + \left(2 - \frac{b}{c} \right)^{2005} + \left(2 - \frac{c}{a} \right)^{2025}.$$

Lời giải

a) Với $x > 0$, ta có:

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{8\sqrt{x}+8}{x+2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{x+\sqrt{x}+3}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

$$= \frac{4(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} : \frac{x+2\sqrt{x}+5}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{x+2\sqrt{x}+5}$$

$$\text{Xét } P-1 = \frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{x+2\sqrt{x}+5} \leq 0 \text{ với mọi } x > 0.$$

Suy ra $P \leq 1$.

b) Ta chứng minh được hằng đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$

Mà $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0$ và $a+b+c \neq 0$ nên $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = 0$

Suy ra $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$ suy ra $a=b=c \neq 0$.

Khi đó $Q = 1^{2005} + 1^{2025} + 1^{2025} = 3$.

Bài 29. (Trường chuyên tỉnh Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $B = \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}-1} - \frac{5x+4\sqrt{x}+2}{3x+5\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{9}$.

Rút gọn B rồi tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên.

Lời giải

Với $x \geq 0, x \neq \frac{1}{9}$, ta có:

$$B = \frac{3\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}-1} - \frac{5x+4\sqrt{x}+2}{3x+5\sqrt{x}-2} = \frac{(3\sqrt{x}-1)^2 - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) - 5x - 4\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x}+2)(3\sqrt{x}-1)}$$

$$= \frac{3x - 10\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x}+2)(3\sqrt{x}-1)} = \frac{(3\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+2)(3\sqrt{x}-1)} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} = 1 - \frac{5}{\sqrt{x}+2}$$

$$\text{Để } B \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{5}{\sqrt{x}+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{x}+2 \in Q \Rightarrow \sqrt{x} \in Q$$

$\Rightarrow \sqrt{x}+2$ là ước của 5

Lại có $\sqrt{x} \geq 0$ nên $\sqrt{x}+2 \geq 2$

Suy ra $\sqrt{x} + 2 = 5$

Vậy $x = 9$

Thử lại ta thấy $x = 9$ thỏa mãn.

Bài 30. (Trường chuyên tỉnh Long An năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Chứng minh $P \geq 4$.

Lời giải

a) Với $x \geq 0; x \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{x\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} - \frac{2(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-3-(2\sqrt{x}-6)(\sqrt{x}-3)-(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}-3-2x+12\sqrt{x}-18-x-4\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x\sqrt{x}-3x+8\sqrt{x}-24}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} \\ &= \frac{x(\sqrt{x}-3)+8(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 9$ thì $P = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1}$.

b) Xét hiệu $P-4$, ta có :

$$P-4 = \frac{x+8}{\sqrt{x}+1} - 4 = \frac{x+8-4\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-4\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \text{ (với mọi } x \geq 0; x \neq 9)$$

Vậy $P-4 \geq 0$ suy ra $P \geq 4$.

Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}-2=0$ suy ra $x=4$ (thỏa mãn).

Vậy $P \geq 4$ với mọi $x \geq 0; x \neq 9$.

Bài 31. (Trường chuyên tỉnh Nam Định năm 2025 – 2026)

Cho $x, y > 1$ thỏa mãn $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 9xy$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} = \frac{5}{xy+4}$

$$(xy+4)(x+y+2) = 5(x+1)(y+1)$$

$$xy(x+y) + 3 = 3xy + x + y$$

$$(x+y-3)(xy-1) = 0 \quad (1)$$

Với $x, y > 1$ thì $xy-1 > 0$, do đó từ (1) suy ra $x+y=3$.

$$\text{Vậy } A = x^3 + y^3 + 9xy = (x+y)^3 - 3xy(x+y) + 9xy = 3^3 - 3xy \cdot 3 + 9xy = 27$$

Bài 32. (Trường chuyên tỉnh Phú Thọ năm 2025 – 2026)

a) Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn $\frac{2x+y}{3} = \frac{2y+z}{4} = \frac{2z+x}{5}$. Chứng minh rằng $x+y=z$.

b) Cho a, b là các số thực dương khác nhau thỏa mãn $a-b = \sqrt{2025-b^2} - \sqrt{2025-a^2}$. Tính giá trị biểu thức $A = a^2 + b^2$.

Lời giải

a) Từ đề bài, ta thấy tồn tại số thực k để $\frac{2x+y}{3} = \frac{2y+z}{4} = \frac{2z+x}{5} = k$.

$$\text{Suy ra } 2x+y=3k, \quad 2y+z=4k, \quad 2z+x=5k.$$

$$\text{Từ đây ta có } (2x+y) + (2y+z) + (2z+x) = 12k \text{ hay } x+y+z=4k.$$

$$\text{Suy ra } x+y+z=2y+z (=4k) \text{ nên } x=y \text{ và từ đây } 2z+x=5k=x+2(x+y) \text{ nên } x+y=z.$$

b) Ta có $a + \sqrt{2025-a^2} = b + \sqrt{2025-b^2} \quad (1)$

$$\text{Và } a-b = \sqrt{2025-b^2} - \sqrt{2025-a^2}$$

$$a-b = \frac{a^2-b^2}{\sqrt{2025-b^2} + \sqrt{2025-a^2}}$$

$$(a-b) \cdot \left(1 - \frac{a+b}{\sqrt{2025-b^2} + \sqrt{2025-a^2}}\right) = 0$$

Do a, b là hai số thực dương khác nhau nên

$$a+b = \sqrt{2025-b^2} + \sqrt{2025-a^2}$$

$$a - \sqrt{2025-a^2} = \sqrt{2025-b^2} - b \quad (2)$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được $2a = 2\sqrt{2025-b^2}$ hay từ đây $a^2 + b^2 = 2025$.

Bài 33. (Trường chuyên tỉnh Phú Yên năm 2025 – 2026)

a) Cho biểu thức $P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$, với $x > 0, x \neq 1$.

Rút gọn biểu thức P . Tìm tất cả các giá trị thực của x để biểu thức $B = \frac{9}{P}$ nhận giá trị nguyên?

b) Cho a và b là các số thực thỏa mãn các điều kiện sau:

$$2a^2 + 6a + 3 = 0; 3b^2 + 6b + 2 = 0; ab \neq 1.$$

Không tính các giá trị của a và b , hãy tính giá trị của biểu thức $P = \frac{6075b^3}{20ab^2 + (ab+1)^3}$.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 1$, ta có:

$$P = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} + \frac{x^2-x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-x\sqrt{x}}$$

$$P = \frac{(2x+2+\sqrt{x})(1-x) + x^2-x\sqrt{x}+\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}(1-x)} = \frac{-x^2-2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}(1-x)}$$

$$P = \frac{-(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}(1-x)} = \frac{x+2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

Khi đó $0 < \frac{9}{P} = \frac{9\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+1} = \frac{9}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2} \leq \frac{9}{4}$. Mà $\frac{9}{P}$ nguyên nên ta có các trường hợp:

$$\text{TH1: } \frac{9}{P} = 1 \Rightarrow P = 9 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2} \\ \sqrt{x} = \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{47+21\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{47-21\sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{TH2: } \frac{9}{P} = 2 \Rightarrow P = \frac{9}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = \frac{1}{4} \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập các giá trị của x thỏa mãn là $\left\{ \frac{47+21\sqrt{5}}{2}; \frac{47-21\sqrt{5}}{2}; 4; \frac{1}{4} \right\}$.

b) Ta có $3b^2 + 6b + 2 = 0 \Rightarrow \frac{2}{b^2} + \frac{6}{b} + 3 = 0 \Rightarrow \frac{1}{b}$ là nghiệm của phương trình $2x^2 + 5x + 3 = 0$

Mà a cũng là nghiệm của phương trình $2x^2 + 6x + 3 = 0$, nên theo Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{b} + a = -3 \\ \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} ab + 1 = -3b \\ a = \frac{3b}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Thay vào } P \text{ ta được: } P = \frac{6075b^3}{20ab^2 + (ab+1)^3} = \frac{6075b^2}{20 \cdot \frac{3b}{2}b^2 + (-3b)^3} = 2025.$$

Vậy $P = 2025$.

Bài 34. (Trường chuyên tỉnh Quảng Bình năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{3-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{x-6\sqrt{x}+9}$

a) Tìm điều kiện của x để P xác định và rút gọn P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P \leq -2$.

Lời giải

$$\text{a) Điều kiện xác định } \begin{cases} x \geq 0 \\ x-3\sqrt{x} \neq 0 \\ 3-\sqrt{x} \neq 0 \\ x-6\sqrt{x}+9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x}(\sqrt{x}-3) \neq 0 \\ 3-\sqrt{x} \neq 0 \\ (\sqrt{x}-3)^2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 9 \end{cases}$$

$$P = \left(\frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} + \frac{1}{\sqrt{x}-3} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-3)^2} = \frac{3+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-3)^2}{\sqrt{x}+3} = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 9$.

b) Để $P \leq -2$ thì $\frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}} \leq -2$, tức là: $\frac{3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}} \leq 0$ suy ra $\sqrt{x} \leq 1$ (do $\sqrt{x} > 0$ với mọi $x > 0$).

Kết hợp với điều kiện xác định, ta được $0 < x \leq 1$. Vậy để $P \leq -2$ thì $0 < x \leq 1$.

Bài 35. (Trường chuyên Tin tỉnh Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{3}{\sqrt{x}-1} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị của x để $P < -3$.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$, ta có:

$$P = \left[\frac{3\sqrt{x} - 3(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \right] : \left[\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \right]$$

$$= \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} : \frac{x-1-x+4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}{3} = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}.$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 1, x \neq 4$.

b) Để $P < -3$ thì $\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}} < -3$. Suy ra $\sqrt{x}-2 < -3\sqrt{x}$ (vì $\sqrt{x} > 0$) nên $\sqrt{x} < \frac{1}{2}$. Suy ra $x < \frac{1}{4}$.

Kết hợp điều kiện ban đầu ta được: $0 < x < \frac{1}{4}$.

Vậy $0 < x < \frac{1}{4}$ thì $P < -3$

Bài 36. (Trường chuyên Toán tỉnh Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{x-5\sqrt{x}+6}$, với $x \geq 0, x \neq 4$ và $x \neq 9$. Rút gọn biểu thức A và

tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A > -1$.

Lời giải

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)^2 - (\sqrt{x}-3)^2 + 1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \frac{x-4\sqrt{x}+4 - (x-6\sqrt{x}+9) + 1}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-2)} = \frac{2}{\sqrt{x}-3}.$$

Để $A > -1$ thì $\frac{2}{\sqrt{x}-3} > -1$ suy ra $\frac{2}{\sqrt{x}-3} + 1 > 0$ hay $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-3} > 0$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} \sqrt{x}-1 > 0 \\ \sqrt{x}-3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 9 \end{cases}$ suy ra $x > 9$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases} \sqrt{x}-1 < 0 \\ \sqrt{x}-3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x < 1 \\ 0 \leq x < 9 \end{cases}$ suy ra $0 \leq x < 1$ (thỏa mãn).

Vậy $x > 9$ hoặc $0 \leq x < 1$.

Bài 37. (Trường chuyên tỉnh Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực a, b ($a \neq -2, b \neq -2$), thỏa mãn $ab + a + b = 0$.

Tính giá trị biểu thức $A = \frac{(a+1)^2}{a^2 + 2a + b + 2} + \frac{(b+1)^2}{b^2 + 2ab + a + 2}$.

Lời giải

Đặt $x = a+1, y = b+1$ suy ra theo giả thiết $xy = 1$.

$$\text{Ta có: } A = \frac{x^2}{x^2 + y} + \frac{y^2}{y^2 + x} = \frac{x^3 + y^3 + 2x^2y^2}{x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy} = \frac{x^3 + y^3 + 2}{x^3 + y^3 + 2} = 1$$

Vậy $A = 1$.

Bài 38. (Trường chuyên tỉnh Quảng Trị năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\frac{a+1}{4\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \right)$ với $a > 0, a \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Chứng minh $P > \frac{3}{a+\sqrt{a}+1}$ với mọi $a > 0, a \neq 1$.

Lời giải

a) Với $a > 0, a \neq 1$, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \cdot \left(\frac{a+1}{4\sqrt{a}} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{(\sqrt{a}-1)(a-1)} \right) \cdot \left(\frac{a+1-2\sqrt{a}}{4\sqrt{a}} \right) \\
 &= \frac{\sqrt{a}-1+3\sqrt{a}+5}{(\sqrt{a}-1)(a-1)} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} = \frac{4(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)^2}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1) \cdot 4\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}.
 \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{\sqrt{a}}$ với $a > 0, a \neq 1$.

b) Nếu $P > \frac{3}{a+\sqrt{a}+1}$ thì $\frac{3}{a+\sqrt{a}+1} < \frac{1}{\sqrt{a}}$ suy ra $3\sqrt{a} < a + \sqrt{a} + 1$

Hay $0 < (\sqrt{a}-1)^2$ (luôn đúng với mọi $a > 0, a \neq 1$)

Vậy ta có điều phải chứng minh

Bài 39. (Trường chuyên tỉnh Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} + 2\sqrt{y} + x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{2 + \sqrt{xy}}$ với $x \geq 0, y \geq 0$.

Tính giá trị biểu thức A khi $x = 11 - 6\sqrt{2}, y = 3 + 2\sqrt{2}$.

Lời giải

Với $x \geq 0, y \geq 0$, ta có:

$$A = \frac{2(\sqrt{x} + \sqrt{y}) + \sqrt{xy}(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2 + \sqrt{xy}} = \frac{(2 + \sqrt{xy})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{2 + \sqrt{xy}} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$$

Thay $x = 11 - 6\sqrt{2}, y = 3 + 2\sqrt{2}$ vào A ta được:

$$A = \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(3 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1 = 4.$$

Bài 40. (Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$ với $x > 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tính giá trị biểu thức P khi $x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}$.

Lời giải

a) Với $x > 0, x \neq 1$, ta có:

$$P = \left(\frac{x\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} \right) : \frac{2x}{\sqrt{x}+1}$$

$$P = (x + \sqrt{x} + 1 - x + \sqrt{x} - 1) \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{2x} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$$

$$\text{Vậy } P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \text{ với } x > 0, x \neq 1.$$

$$\text{b) Ta có: } x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 3(\sqrt{2}-1) = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2}-1)^2.$$

Thay $x = (\sqrt{2}-1)^2$ vào biểu thức P ta được:

$$P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{2}-1+1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}(\sqrt{2}+1) = 2 + \sqrt{2}.$$

$$\text{Vậy } P = 2 + \sqrt{2} \text{ khi } x = \sqrt{2} - \frac{3}{\sqrt{2}+1}.$$

Bài 41. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $M = \left(\frac{3\sqrt{x}+3}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$ với $0 \leq x \neq 1$.

Lời giải

Với $0 \leq x \neq 1$, ta có:

$$M = \left(\frac{3\sqrt{x}+3}{x-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$$

$$M = \left(\frac{3(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$$

$$M = \left(\frac{3}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{\sqrt{x}+3}{2\sqrt{x}-2}$$

$$M = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-1} : \frac{\sqrt{x}+3}{2(\sqrt{x}-1)} = 2.$$

Vậy $M = 2$ với $0 \leq x \neq 1$.

Bài 42. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Cho x, y là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y} - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x-y} = 0$. Tính $P = \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$.

Lời giải

Với $x, y \neq 0, y \neq 2x$ hệ thức đã cho tương đương với $\frac{x-2y}{xy} = \frac{3}{2x-y}$

$$\text{Suy ra } (x-2y)(2x-y) = 3xy$$

$$x^2 + y^2 = 4xy$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + 2 = 16$$

$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = 14$$

Vậy $P = 14$.

Bài 43. (Trường chuyên tỉnh Thái Bình năm 2025 – 2026)

a) Cho biểu thức $A = \frac{x-3\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}} + \frac{x+5\sqrt{x}+12}{\sqrt{x}+3}$ (điều kiện $x > 0$). Tìm x để $A = 2x$.

b) Cho a, b là các số thực thỏa mãn $a \geq 2025, b \geq 2025$ và $2025(a+b) = ab$.

Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{a-2025} + \sqrt{b-2025} - \frac{1}{45}\sqrt{ab}$.

Lời giải

a) Rút gọn ta được: $A = \sqrt{x} + 3$.

Để $A = 2x$ thì $\sqrt{x} + 3 = 2x$

$$\text{Suy ra } \sqrt{x} = 2x - 3. \text{ Do đó } \begin{cases} x \geq \frac{3}{2} \\ 4x^2 - 13x + 9 = 0 \end{cases} \quad \text{suy ra } x = \frac{9}{4}.$$

Vậy $x = \frac{9}{4}$ là giá trị cần tìm.

b) Có $\sqrt{a-2025} = \sqrt{a - \frac{ab}{a+b}} = \sqrt{\frac{a^2}{a+b}} = \frac{a}{\sqrt{a+b}}$ với $2025(a+b) = ab; a, b \geq 2025$.

$$\text{Tương tự } \sqrt{b-2025} = \frac{b}{\sqrt{a+b}} \quad \frac{1}{45}\sqrt{ab} = \frac{1}{45}\sqrt{2025(a+b)} = \sqrt{a+b}.$$

Suy ra được $P = 0$.

Bài 44. (Trường chuyên tỉnh Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

Cho biểu thức $P = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức P .

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức P nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$P = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{x+2\sqrt{x}-3} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1} = \frac{3x+4\sqrt{x}-7}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+3)} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3} - \frac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}-1}$$

$$P = \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)}$$

$$P = \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 3)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}.$$

Vậy $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 1$, có $P = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = 1 + \frac{2}{\sqrt{x} - 1}$.

Để $P \in \mathbb{Z}$ thì $\frac{2}{\sqrt{x} - 1} \in \mathbb{Z}$ hay $\sqrt{x} - 1 \in U(2) = \{-2; -1; 1; 2\}$.

Kết hợp điều kiện xác định suy ra $x \in \{0; 4; 9\}$

Vậy $x \in \{0; 4; 9\}$ thì P nhận giá trị nguyên.

Bài 45. (Trường chuyên tỉnh Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực khác nhau a, b và $ab + 1 \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} = \frac{2}{1 + ab}$.

Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{1}{a^{2025} + 1} + \frac{1}{b^{2025} + 1}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{a^2 + 1} + \frac{1}{b^2 + 1} = \frac{2}{1 + ab}$ suy ra $(a^2 + b^2 + 2)(1 + ab) = 2(a^2 + 1)(b^2 + 1)$.

Suy ra:

$$(a^2 + b^2 + 2)(1 + ab) = 2(a^2 + 1)(b^2 + 1)$$

$$ab(a^2 + b^2 + 2) = 2a^2b^2 + a^2 + b^2$$

$$(a^2 + b^2)(ab - 1) + 2ab(1 - ab) = 0 \Leftrightarrow (ab - 1)(a - b)^2 = 0$$

Do a, b là hai số thực khác nhau nên $ab = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{b}$. Khi đó:

$$M = \frac{1}{a^{2025} + 1} + \frac{1}{b^{2025} + 1} = \frac{1}{a^{2025} + 1} + \frac{1}{\frac{1}{a^{2025}} + 1} = \frac{1}{a^{2025} + 1} + \frac{a^{2025}}{a^{2025} + 1} = 1.$$

Vậy $M = 1$.

Bài 46. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2025 – 2026)

1) Rút gọn biểu thức $A = \sqrt{\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \frac{3}{2}} - \sqrt{\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \frac{3}{2}}$.

2) Cho biểu $B = \frac{2x+4\sqrt{x}-9}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

a) Rút gọn biểu thức B ;

b) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức B nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \frac{3}{2}} - \sqrt{\sqrt{11-6\sqrt{2}} - \frac{3}{2}} = \sqrt{\sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \frac{3}{2}} - \sqrt{\sqrt{(3-\sqrt{2})^2} - \frac{3}{2}} \\ &= \sqrt{3+\sqrt{2} - \frac{3}{2}} - \sqrt{3-\sqrt{2} - \frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{3-2\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Vậy $A = \sqrt{2}$.

2)

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có:

$$B = \frac{2x+4\sqrt{x}-9}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} + \frac{2}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \frac{2x + 4\sqrt{x} - 9}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{2x + 4\sqrt{x} - 9 - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) + 2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{2x + 4\sqrt{x} - 9 - x + 4 + 2\sqrt{x} - 2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{2x + 4\sqrt{x} - 9}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} - \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x} - 1} + \frac{2}{\sqrt{x} + 2}$$

$$= \frac{2x + 4\sqrt{x} - 9 - (\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2) + 2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)}$$

$$= \frac{x + 6\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{(\sqrt{x} + 7)(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2)} = \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 2}.$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 2}$ với $x \geq 0, x \neq 1$.

b) $B = \frac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} + 2} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x} + 2}$

Do x là số nguyên nên điều kiện cần để B nhận giá trị nguyên là $\sqrt{x} + 2$ thuộc tập ước nguyên dương của 5.

Mặt khác với $x \geq 0, x \neq 1$, ta có $\begin{cases} \sqrt{x} + 2 \geq 2 \\ \sqrt{x} + 2 \neq 3 \end{cases}$.

Do đó B nhận giá trị nguyên khi $\sqrt{x} + 2 = 5$ hay $x = 9$ (thoả mãn)

Vậy với $x = 9$ thì B nhận giá trị nguyên.

Bài 47. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Rút gọn biểu thức $A = \frac{(2\sqrt{3}-1)\sqrt{13+4\sqrt{3}}}{\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}}.$

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{13+4\sqrt{3}} = \sqrt{12+4\sqrt{3}+1} = 2\sqrt{3}+1;$$

$$\sqrt{29+12\sqrt{5}} = \sqrt{20+12\sqrt{5}+9} = 2\sqrt{5}+3.$$

$$\text{Do đó } A = \frac{(2\sqrt{3}-1)\sqrt{13+4\sqrt{3}}}{\sqrt{29+12\sqrt{5}}-2\sqrt{5}} = \frac{(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{5}+3-2\sqrt{5}} = \frac{12-1}{3} = \frac{11}{3}.$$

$$\text{Vậy } A = \frac{11}{3}$$

Bài 48. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{x+\sqrt{x}-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}-2}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}.$

c) Tìm số nguyên dương x lớn nhất để $\frac{A}{B} < \frac{1}{2}. X = 3.$

Lời giải

a) Thay $x = 9$ (thoả mãn điều kiện) vào biểu thức A ta có:

$$A = \frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-2} = \frac{\sqrt{3^2}+2}{\sqrt{3^2}-2} = \frac{3+2}{3-2} = 5$$

Vậy $A = 5$ khi $x = 9$

b) Với $x > 0, x \neq 4$, ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x + \sqrt{x} - 4}{x - 2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{x + \sqrt{x} - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} - 4 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{x - 4}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2)} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Vậy $B = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

c) Ta có $x > 0$ nên $\frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} > 0$. Khi đó

$$\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} : \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 2} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} \quad (\text{điều kiện } x > 0, x \neq 4)$$

Để $\frac{A}{B} < \frac{1}{2}$ thì $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} < \frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 2} - \frac{1}{2} < 0$ hay $\frac{\sqrt{x} + 2}{2(\sqrt{x} - 2)} < 0$

Vì $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $2(\sqrt{x} - 2) < 0$, suy ra $x < 4$

Kết hợp điều kiện ta có: $0 < x < 4$.

Vậy số nguyên dương lớn nhất thỏa mãn điều kiện $\frac{A}{B} < \frac{1}{2}$ là 3.