TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC VÀ CỰC TRỊ TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

Bài 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

a) Chứng minh rằng: $6\sqrt{x-1}+x\sqrt{5-x^2}\le 8$ với $1\le x\le\sqrt{5}$.

b) Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$$

Bài 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Xét các số thực dương a,b,c thay đổi và thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng $abc\le 1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab+c}{a^4+b^4+c}+\frac{bc+a}{b^4+c^4+a}+\frac{ca+b}{c^4+a^4+b}-\frac{3}{abc}.$$

Bài 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c dương thỏa $abc(a+b+c)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{a^6}{a^4+3b^4}+\frac{b^6}{b^4+3c^4}+\frac{c^6}{c^4+3a^4}.$$

Bài 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025 – 2026)

Cho $x,\ y>0$ thỏa mãn $x+y<1$. Chứng minh $\dfrac{x^2}{1-x}+\dfrac{y^2}{1-y}+\dfrac{1}{x+y}+x+y\ge\dfrac{5}{2}$.

Bài 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực a,b lớn hơn $\dfrac{1}{3}$ và thoả mãn $\dfrac{1}{a^2(3b-1)}+\dfrac{1}{b^2(3a-1)}\ge\sqrt[3]{ab}$. Chứng minh rằng

$$1+a+b\ge 3ab.$$

Bài 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025 – 2026)

Cho năm số thực dương a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 thỏa mãn $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2)}{a_1a_2a_3a_4a_5}.$$

Bài 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \geq 1$. Chứng minh rằng $\left(x+2y+\dfrac{2}{x+1}\right)\left(y+2x+\dfrac{2}{y+1}\right) \geq 16$.

Bài 8. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c là các số thực dương không nhỏ hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leq \frac{a+b+c}{4}.$$

Bài 9. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{ab}+1 \leq 2\sqrt{b}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{\sqrt{ab}}{2024a+2025b}+\frac{2009a}{b}.$$

Bài 10. (Trường chuyên tỉnh Đăk Lăk năm 2025 – 2026)

Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực dương.

Biết $P(1)=12$ và $P(2)=16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\frac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}.$$

Bài 11. (Trường chuyên tỉnh Đăk Nông năm 2025 – 2026)

Cho a, b là 2 số thực dương.

a) Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1+\sqrt{ab}$.

b) Cho $a+b=ab$ thỏa mãn $a^2+3a-b \geq 0$ và $b^2+3b-a \geq 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \dfrac{1}{a^2+3a-b}+\dfrac{1}{b^2+3b-a}+\sqrt{\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)}$.

Bài 12. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc \geq 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2+1+bc}+\frac{1}{b^2+1+ac}+\frac{1}{ab(c^3+1)+1}.$$

Bài 13. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

a) Cho các số thực dương a, b. Chứng minh $a^3+b^3 \ge a^2b+b^2a$.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca \ge 3$. Chứng minh

$$2(a^3+b^3+c^3)+3abc \ge 9.$$

Bài 14. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \ge \sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+\sqrt{\frac{b^4+1}{2b^2}}+\sqrt{\frac{c^4+1}{2c^2}}.$$

Bài 15. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Với các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2b+b^2c+c^2a+16=ab^2+bc^2+ca^2$:

1) Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=16$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Bài 16. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1<x,y,z<2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8z^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}\right) \ge \frac{3xy}{z^2+8xy}+\frac{3yz}{x^2+8yz}+\frac{3zx}{y^2+8zx}.$$

Bài 17. (Trường chuyên Tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

Với a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn $a+b+c=12$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(a-\frac{4}{a}\right)^2+\left(b-\frac{4}{b}\right)^2+\left(c-\frac{4}{c}\right)^2.$$

Bài 18. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Cho các số x,y,z thoả mãn $0<x,y,z<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{z}\right)}+3(x-1)(y-1)(z-1).$$

Bài 19. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2025 – 2026)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{2x-1}{x^2+2}+\frac{2y-1}{y^2+2}+\frac{2z-1}{z^2+2}\ge\frac{-3}{2}.$$

Bài 20. (Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Cho x, y, z là các số thưc dương thỏa mãn $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\ge 1.$$

Bài 21. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Cho hai số dương a, b thay đổi thoả mãn $a + b + 4ab = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của của biểu thức

$$M=\frac{ab}{2}-\frac{1}{\sqrt{a+b+2}}.$$

Bài 22. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=xy+yz+zx$.

a) Chứng minh $x + y + z \ge 3$.

b) Chứng minh $\dfrac{1}{x^2+y^2+z}+\dfrac{1}{y^2+z^2+x}+\dfrac{1}{z^2+x^2+y}\le 1.$

Bài 23. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương x, y, z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y}+\frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z}+\frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x}.$$

Bài 24. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả số thực $k > 0$ sao cho $\dfrac{x}{xy+2}\le\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{2}{y}\right)$ luôn đúng với mọi $x, y > 0$.

b) Cho $a,b,c,x,y,z > 0$ thỏa mãn $x+y+z=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=4$.

Chứng minh: $\dfrac{x}{ax+2}+\dfrac{y}{by+2}+\dfrac{z}{cz+2}\le 1$.

Bài 25. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Cho ba số thực x, y, z, thỏa mãn: $(x-y)(y-z)(z-x) \geq 2$. Chứng minh rằng, $x^2+y^2+z^2 \geq 2$.

Bài 26. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B=\frac{yz}{x^3(z+2y)}+\frac{zx}{y^3(x+2z)}+\frac{xy}{z^3(y+2x)}.$$

Bài 27. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

a) Cho các số thực $a, b, c>0$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3 \geq 24$.

b) Cho các số thực $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2026$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=a^{2025}b+b^{2025}c+c^{2025}a$.

Bài 28. (Trường chuyên Long An năm 2025 – 2026)

Cho a, b là các số thực dương sao cho $\dfrac{a-b}{3a+b}=\dfrac{b^2}{a^2+b^2+ab}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+2ab+a+2}{2b+a+1}$.

Bài 29. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx \leq xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q=xy^2+yz^2+zx^2-18(x+y+z).$$

Bài 30. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực a và b thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $a<b \leq 420$.

ii) Với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b,\ a \leq z \leq b$, ta luôn có

$$(x+y+z-420)^2 \leq \frac{1}{105}xyz$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T=b-a$.

Bài 31. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a.b=1$. Chứng minh rằng: $(1+a)^2(1+b)^4>\dfrac{1024}{27}$.

Bài 32. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực x, y thoả mãn $0 < x < y \le 13$ và $2xy \le 13x + 9y$.

Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \le 250$.

Bài 33. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho ba số dương x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{1+y-x} + \frac{y^2}{1+z-y} + \frac{z^2}{1+x-z} \ge 1.$$

Bài 34. (Trường chuyên toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn $\frac{x-1}{x+3} + \frac{y-1}{y+4} \ge \frac{6}{z+5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = (2x+2)(2y+3)(2z+4).$$

Bài 35. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+2b} + \sqrt[3]{b+2c} + \sqrt[3]{c+2a} \le 3.$$

Bài 36. (Trường chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \ge 1.$$

Bài 37. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+2y+3z=2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{1}{x^2+4y^2+9z^2} + \frac{3}{8xy} + \frac{1}{8yz} + \frac{1}{4zx}.$$

Bài 38. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca = 3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \frac{c+a}{c^2+ca+a^2}.$$

Bài 39. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\le 6$.

a) Chứng minh rằng: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{2025}{a+b+c}$.

Bài 40. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $2xy=x+y$. Chứng minh rằng

a) $xy\ge 1$;

b) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}\ge\sqrt{(x-y)^2+8}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

a) Chứng minh rằng: $6\sqrt{x-1}+x\sqrt{5-x^2}\le 8$ với $1\le x\le\sqrt{5}$.

b) Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 3. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{4}{a+b}+\frac{4}{b+c}+\frac{4}{c+a}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}.$$

Lời giải

a) Theo bất đẳng thức Cauchy ta có: $6\sqrt{x-1}+x\sqrt{5-x^2}\le 6.\frac{(x-1)+1}{2}+x.\frac{\left(5-x^2\right)+1}{2}=\frac{12x-x^3}{2}$.

Ta chứng minh $\frac{12x-x^3}{2}\le 8$, hay $(x-2)^2(x+4)\ge 0$ (luôn đúng với $1\le x\le\sqrt{5}$).

Đẳng thức xảy ra khi $x=2$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Từ giả thiết có $a<b+c$, $b<c+a$, $c<a+b$ nên $2a<3$, $2b<3$, $2c<3$. Suy ra $0<a,b,c<\frac{3}{2}$.

Ta viết lại biểu thức $T=\left(\frac{4}{3-a}-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{4}{3-b}-\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{4}{3-c}-\frac{1}{c}\right)$

Ta chứng minh $\left(\frac{4}{3-a}-\frac{1}{a}\right)\le 2(a-1)+1$, hay $\frac{(a-1)^2(2a-3)}{a(3-a)}\le 0$ (luôn đúng do $0<a,b,c<\frac{3}{2}$)

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là 3 khi $a=b=c=1$.

Bài 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Xét các số thực dương a,b,c thay đổi và thỏa mãn $ab+bc+ca+abc=4$. Chứng minh rằng $abc\le 1$ và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{ab+c}{a^4+b^4+c}+\frac{bc+a}{b^4+c^4+a}+\frac{ca+b}{c^4+a^4+b}-\frac{3}{abc}.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có $4=ab+bc+ca+abc\ge 4\sqrt[4]{a^3b^3c^3}$ suy ra $abc\le 1$.

Ta có bất đẳng thức quen thuộc $a^4+b^4\ge ab\left(a^2+b^2\right)$ và để ý rằng $c=c\cdot 1\ge abc^2$ nên

$$a^4+b^4+c\ge ab\left(a^2+b^2\right)+abc^2=ab\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Tương tự $b^4+c^4+a\ge bc\left(a^2+b^2+c^2\right), c^4+a^4+b\ge ca\left(a^2+b^2+c^2\right)$ nên

$$P\le \frac{1}{a^2+b^2+c^2}\left(\frac{ab+c}{ab}+\frac{bc+a}{bc}+\frac{ca+b}{ca}\right)-\frac{3}{abc}=\frac{a^2+b^2+c^2+3abc}{abc\left(a^2+b^2+c^2\right)}-\frac{3}{abc}.$$

Do $abc\le 1$ nên $\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge abc$ do đó $a^2+b^2+c^2\ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\ge 3abc$.

Suy ra $\dfrac{a^2+b^2+c^2+3abc}{a^2+b^2+c^2}=1+\dfrac{3abc}{a^2+b^2+c^2}\le 2$ dẫn tới $P\le \dfrac{2}{abc}-\dfrac{3}{abc}=-\dfrac{1}{abc}\le -1$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn của của P là -1 khi $a=b=c=1$.

Bài 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c dương thỏa $abc\left(a+b+c\right)=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S=\frac{a^6}{a^4+3b^4}+\frac{b^6}{b^4+3c^4}+\frac{c^6}{c^4+3a^4}.$$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{a^6}{a^4+3b^4}=\dfrac{a^2(a^4+3b^4)-3a^2b^4}{a^4+3b^4}=a^2-\dfrac{3a^2b^4}{a^4+3b^4}\ge a^2-\dfrac{3}{4}ab \quad (1)$

(do $a^4+b^4+b^4+b^4\ge 4\sqrt[4]{a^4.b^4.b^4.b^4}=4ab^3 \Rightarrow -\dfrac{3a^2b^4}{a^4+3b^4}\ge -\dfrac{3a^2b^4}{4ab^3}=-\dfrac{3}{4}ab$)

Chứng minh tương tự: $\dfrac{b^6}{b^4+3c^4}\ge b^2-\dfrac{3}{4}bc$ (2); $\dfrac{c^6}{c^4+3a^4}\ge c^2-\dfrac{3}{4}ca$ (3)

Cộng theo vế các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có:

$$S\ge a^2+b^2+c^2-\frac{3}{4}(ab+bc+ca)\ge ab+bc+ca-\frac{3}{4}(ab+bc+ca)=\frac{ab+bc+ca}{4}$$

Nhận xét: $\left(ab+bc+ca\right)^2\ge 3\left(ab^2c+bc^2a+a^2bc\right)=3abc\left(b+c+a\right)=3$.

Suy ra $ab+bc+ca\ge\sqrt{3}$.

Do đó $S\ge\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

Bài 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025 – 2026)

Cho $x,\ y>0$ thỏa mãn $x+y<1$. Chứng minh $\dfrac{x^2}{1-x}+\dfrac{y^2}{1-y}+\dfrac{1}{x+y}+x+y\ge \dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{x^2}{1-x}=\dfrac{1}{1-x}-x-1,\ \ \dfrac{y^2}{1-y}=\dfrac{1}{1-y}-y-1$.

Bất đẳng thức trở thành: $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{x+y}-2\ge\dfrac{5}{2}$ hay $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{x+y}\ge\dfrac{9}{2}$.

Chứng minh bất đẳng thức: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$ với $a,\ b,\ c>0$ (*).

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$, $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{abc}}$.

$\Rightarrow (a+b+c)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge 9$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Áp dụng bất đẳng thức (*), ta có:

$$(1-x+1-y+x+y)\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\right)\ge 9 \text{ suy ra } \frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}+\frac{1}{x+y}\ge\frac{9}{2}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $1-x=1-y=x+y$ suy ra $x=y=\dfrac{1}{3}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực a,b lớn hơn $\dfrac{1}{3}$ và thoả mãn $\dfrac{1}{a^2(3b-1)}+\dfrac{1}{b^2(3a-1)}\ge\sqrt[3]{ab}$. Chứng minh rằng

$$1+a+b\ge 3ab.$$

Lời giải

Nếu $ab\le 1$, áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $1+a+b\ge 3\sqrt[3]{a\cdot b\cdot 1}\ge 3ab$ (điều phải chứng minh).

Xét $ab>1$, ta chứng minh bằng phản chứng.

Giả sử tồn tại a,b sao cho $1+a+b<3ab$ suy ra $\dfrac{1}{a^2(3b-1)}=\dfrac{1}{a(3ab-a)}<\dfrac{1}{a(1+b)}$.

Tương tự ta có $\dfrac{1}{b^2(3a-1)} < \dfrac{1}{b(a+1)}$.

Suy ra $\dfrac{1}{ab+a} + \dfrac{1}{ab+b} > \sqrt[3]{ab} > 1$.

Để ý $\dfrac{1}{ab+a} < \dfrac{1}{a+1}$, $\dfrac{1}{ab+b} < \dfrac{1}{b+1}$.

Vậy $\dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{b+1} > 1$ suy ra $a+b+2 > ab+a+b+1$ hay $ab < 1$ (vô lí).

Do đó ta có điều phải chứng minh, dấu bằng xảy ra khi $a = b = 1$.

Bài 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025 – 2026)

Cho năm số thực dương a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 thỏa mãn $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2)}{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}.$$

Lời giải

Đối với 2 số thực dương x, y ta có bất đẳng thức sau:

$$xy \le \frac{(x+y)^2}{4}.$$

Sử dụng bất đẳng thức trên một cách liên tục để đánh giá phần mẫu số của biểu thức P, ta được

$$a_1a_2a_3a_4a_5 \le \frac{(a_1+a_2)^2}{4} a_3a_4a_5 = \frac{a_1+a_2}{4}(a_1+a_2)a_3a_4a_5$$

$$\le \frac{(a_1+a_2)}{4} \cdot \frac{(a_1+a_2+a_3)^2}{4} \cdot a_4a_5 = \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}{16}(a_1+a_2+a_3) \cdot a_4a_5$$

$$\le \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)}{16} \cdot \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4)^2}{4} \cdot a_5$$

$$\le \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{64} \cdot (a_1+a_2+a_3+a_4) \cdot a_5$$

$$\le \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4)}{64} \cdot \frac{(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)^2}{4}$$

$$\le \frac{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2+a_3+a_4) \cdot 2024^2}{256}.$$

Do đó: $P \ge \frac{256}{2024^2} = \frac{4}{64009}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi: $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 2024 \\ a_1 = a_2 \\ a_1 + a_2 = a_3 \\ a_1 + a_2 + a_3 = a_4 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_5 \end{cases}$ suy ra $\begin{cases} a_1 = a_2 = \frac{253}{2} \\ a_3 = 253 \\ a_4 = 506 \\ a_5 = 1012 \end{cases}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{64009}$, đạt được tại $a_1 = a_2 = \frac{253}{2}$, $a_3 = 253$, $a_4 = 506$, $a_5 = 1012$.

Bài 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực $x, y > 0$ thỏa mãn $xy \ge 1$. Chứng minh rằng $\left(x + 2y + \frac{2}{x+1}\right)\left(y + 2x + \frac{2}{y+1}\right) \ge 16$.

Lời giải

a) Cách 1: Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$x + 2y + \frac{2}{x+1} = \left(\frac{x+1}{2} + \frac{2}{x+1}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) + \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} \ge 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{3y}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3y}{2} + \frac{5}{2}$$

Một cách tương tự ta cũng có: $y + 2x + \frac{2}{y+1} \ge \frac{3x}{2} + \frac{5}{2}$.

Khi đó: $\text{VT} \ge \left(\frac{3y}{2} + \frac{5}{2}\right) \cdot \left(\frac{3x}{2} + \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} + \frac{15}{4}(x+y) + \frac{9xy}{4} \ge 16$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Cách 2: Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương:

$$5xy + 2\left(x^2 + y^2\right) + \frac{2x}{y+1} + \frac{2y}{x+1} + \frac{4x}{x+1} + \frac{4y}{y+1} + \frac{4}{(x+1)(y+1)} \ge 16$$

Vì $x^2 + y^2 \ge 4xy \ge 4$ nên ta chỉ cần chứng minh:

$$\frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} + \frac{2x}{x+1} + \frac{2y}{y+1} + \frac{2}{(x+1)(y+1)} \ge \frac{7}{2}$$

Quy đồng và rút gọn, bất đẳng thức trên trở thành:

$$x^2 + y^2 + \frac{1}{2}xy \ge \frac{1}{2} \cdot (x+y) + \frac{3}{2}$$

Ta có: $x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}$ và $xy\ge 1$ nên ta sẽ chứng minh:

$$\frac{(x+y)^2}{2}\ge\frac{1}{2}\cdot(x+y)+1\Leftrightarrow(x+y-2)(x+y+1)\ge 0$$

Tuy nhiên bất đẳng thức cuối cùng là đúng do $x+y\ge 2\sqrt{xy}\ge 2$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 8. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c là các số thực dương không nhỏ hơn 1. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c}+\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a}+\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\frac{a+b+c}{4}.$$

Lời giải

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $b+c\ge 2\sqrt{bc}$.

Suy ra $\dfrac{\sqrt{ab-1}}{b+c}\le\dfrac{\sqrt{ab-1}}{2\sqrt{bc}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{ab-1}{bc}}$. Mà $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{ab-1}{bc}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(a-\dfrac{1}{b}\right)\dfrac{1}{c}}\le\dfrac{1}{4}\left(a-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$

Suy ra $\dfrac{\sqrt{ab-1}}{b+c}\le\dfrac{1}{4}\left(a-\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ (1)

Tương tự, ta có $\dfrac{\sqrt{bc-1}}{c+a}\le\dfrac{1}{4}\left(b-\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$ (2) và $\dfrac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\le\dfrac{1}{4}\left(c-\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$(3)

Cộng vế theo vế (1), (2) và (3), ta được điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=\sqrt{2}$.

Bài 9. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương a, b thỏa mãn $\sqrt{ab}+1\le 2\sqrt{b}$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T=\frac{\sqrt{ab}}{2024a+2025b}+\frac{2009a}{b}.$$

Lời giải

Đặt $\sqrt{a}=x,\dfrac{1}{\sqrt{b}}=y\ (x,y>0)$.

Ta thu được ngay $x+y\le 2$.

Viết lại biểu thức T theo x, y ta có:

$$T=\frac{xy}{2024x^2y^2+2025}+2009x^2y^2.$$

Đặt $c=xy$, theo bất đẳng thức Cauchy thì $2\sqrt{xy}\le x+y\Rightarrow c\le 1$

Ta có: $\frac{c}{2024c^2+2025}-\frac{1}{4049}=\frac{4049c-2024c^2-2025}{4049\left(2024c^2+2025\right)}=\frac{(1-c)(2024c-2025)}{4049\left(2024c^2+2005\right)}\le 0$;

Và $2009c^2\le 2009$.

Suy ra $T\le\frac{1}{4049}+2009$. Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của T là $2009+\frac{1}{4049}$ khi $a=b=1$.

Bài 10. (Trường chuyên tỉnh Đăk Lăk năm 2025 – 2026)

Cho đa thức bậc hai $P(x)=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các số thực dương.

Biết $P(1)=12$ và $P(2)=16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A=\frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\frac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}.$$

Lời giải

Đặt $t=\frac{a}{b}>0$ và $B=t^2+t+\frac{3}{t}$.

Khi đó:

$$A=\frac{a^3+a^2b+3b^3}{ab^2}+\frac{ab^2}{a^3+a^2b+3b^3}$$

$$A=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+\frac{3}{\frac{a}{b}}+\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2+\frac{a}{b}+\frac{3}{\frac{a}{b}}}$$

$$A=t^2+t+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2+t+\frac{3}{t}}=B+\frac{1}{B}$$

Để ý rằng theo bất đẳng thức AM – GM, ta có

$$B=t^2+t+\frac{3}{t}=(t-1)^2+3t+\frac{3}{t}-1\ge 3.2.\sqrt{t.\frac{1}{t}}-1=5$$

Tiếp tục sử dụng AM – GM, ta có:

$$A=B+\frac{1}{B}=\frac{24}{25}B+\frac{1}{25}B+\frac{1}{B}\ge\frac{24}{25}\cdot 5+2.\sqrt{\frac{1}{25}\cdot B\cdot\frac{1}{B}}=\frac{26}{5}$$

Dấu bằng xảy ra khi $t=1$ hay $a=b$.

Để ý $P(1)=12$, $P(2)=16$ nên $a+b+c=12$, $4a+2b+c=16$. Do đó $a=b=1$, $c=10$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A=\frac{26}{5}$ khi $a=b=1$, $c=10$.

Bài 11. (Trường chuyên tỉnh Đăk Nông năm 2025 – 2026)

Cho a,b là 2 số thực dương.

a) Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}$.

b) Cho $a+b=ab$ thỏa mãn $a^2+3a-b\ge 0$ và $b^2+3b-a\ge 0$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a^2+3a-b}+\frac{1}{b^2+3b-a}+\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$.

Lời giải

a) Với $a,b>0$, ta có:

$\sqrt{(1+a)(1+b)}\ge 1+\sqrt{ab}$

$1+a+b+ab\ge 1+ab+2\sqrt{ab}$

$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$ (luôn đúng với mọi $a,b>0$)

Dấu bằng xảy ra khi $a=b$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Áp dụng bất đẳng thức $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}$, ta có:

$$\frac{1}{a^2+3a-b}+\frac{1}{b^2+3b-a}\ge\frac{4}{(a^2+3a-b)+(b^2+3b-a)}=\frac{4}{a^2+b^2+2(a+b)}$$

$$\frac{1}{a^2+3a-b}+\frac{1}{b^2+3b-a}\ge\frac{4}{a^2+b^2+2ab}=\frac{4}{(a+b)^2}\text{ (vì } a+b=ab\text{)}$$

Mặt khác $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}\ge 1+ab=1+(a+b)$ (theo ý a)

Suy ra $P\ge\frac{4}{(a+b)^2}+1+(a+b)=\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{16}+\frac{a+b}{16}+\frac{7(a+b)}{8}+1$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\frac{4}{(a+b)^2}+\frac{a+b}{16}+\frac{a+b}{16}\ge 3\sqrt[3]{\frac{4}{(a+b)^2}\cdot\frac{a+b}{16}\cdot\frac{a+b}{16}}=\frac{3}{4}\ (1)$$

Ta có: $a+b=ab\le\frac{(a+b)^2}{4}$ suy ra $(a+b)^2-4(a+b)\ge 0$

Hay $(a+b)(a+b-4)\ge 0$ suy ra $a+b\ge 4$ (vì $a,b>0$ nên $a+b>0$)

$\Rightarrow\frac{7(a+b)}{8}\ge\frac{7}{2}$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $P\ge\frac{3}{4}+\frac{7}{2}+1=\frac{21}{4}$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $P=\frac{21}{4}$ khi $a=b=2$.

Bài 12. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c là ba số thực dương thỏa mãn điều kiện $abc\ge 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a^2+1+bc}+\frac{1}{b^2+1+ac}+\frac{1}{ab(c^3+1)+1}.$$

Lời giải

$$P=\frac{a}{a^3+a+abc}+\frac{b}{b^3+b+abc}+\frac{c}{abc(c^3+1)+c}\le\frac{a}{a^3+a+1}+\frac{b}{b^3+b+1}+\frac{c}{c^3+c+1}$$

Với mọi $x>0$, ta luôn có $(x-1)^2(x+1)\ge 0$ hay $x^3-x^2-x+1\ge 0$

$\Rightarrow x^3+x+1\ge x^2+2x\Rightarrow\frac{x}{x^3+x+1}\le\frac{1}{x+2}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=1$.

Suy ra $\dfrac{a}{a^3+a+1}+\dfrac{b}{b^3+b+1}+\dfrac{c}{c^3+c+1}\le\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}$

Ta sẽ chứng minh $\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{b+2}+\dfrac{1}{c+2}\le 1$ (*)

Thật vậy, $(*)\Rightarrow(a+2)(b+2)+(b+2)(c+2)+(a+2)(c+2)\le(a+2)(b+2)(c+2)$

Hay $ab+bc+ca+abc\ge 4$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $ab+bc+ac\ge 3\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ca}\ge 3$

Mặt khác $abc\ge 1\Rightarrow ab+bc+ca+abc\ge 4$ nên (*) đúng, suy ra $P\le 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 1 khi $a=b=c=1$.

Bài 13. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

a) Cho các số thực dương a, b. Chứng minh $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$.

b) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab+bc+ca\ge 3$. Chứng minh

$$2(a^3+b^3+c^3)+3abc\ge 9.$$

Lời giải

a) Xét hiệu:

$a^3+b^3-a^2b-b^2a=(a+b)(a^2-ab+b^2)-ab(a+b)$

$=(a+b)(a^2-2ab+b^2)=(a+b)(a-b)^2$ (*)

Vì $(a-b)^2\ge 0$ và $a+b>0$ (do a, b dương) nên $(a+b)(a-b)^2\ge 0$

Từ (*) ta được $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a$ (điều phải chứng minh).

b) Áp dụng ý a) ta có

$2(a^3+b^3+c^3)+3abc=(a^3+b^3)+(b^3+c^3)+(c^3+a^3)+3abc$

$\ge(a^2b+ab^2)+(b^2c+bc^2)+(c^2a+ca^2)+3abc$

$=(a^2b+ab^2+abc)+(b^2c+bc^2+abc)+(c^2a+ca^2+abc)$

$=ab(a+b+c)+bc(a+b+c)+ca(a+b+c)$

$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$

Ta có: $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)\ge 9$ do đó $a+b+c\ge 3$

Suy ra $2(a^3+b^3+c^3)+3abc\ge 3\cdot 3=9$ (điều phải chứng minh).

Bài 14. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+\sqrt{\frac{b^4+1}{2b^2}}+\sqrt{\frac{c^4+1}{2c^2}}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\left(\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}-1\right)^2\ge0\Rightarrow\frac{a^4+1}{2a^2}-2\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+1\ge0\Rightarrow\left(\frac{a^4+1}{a^2}-\frac{a^4+1}{2a^2}\right)-2\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+1\ge0$$

$$\Rightarrow\frac{a^4+1}{a^2}+2\ge\frac{a^4+1}{2a^2}+2\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+1\Rightarrow\frac{a^4+2a^2+1}{a^2}\ge\frac{a^4+1}{2a^2}+2\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+1$$

$$\Rightarrow\frac{\left(a^2+1\right)^2}{a^2}\ge\left(\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+1\right)^2\Rightarrow\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\ge\left(\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+1\right)^2\Rightarrow a+\frac{1}{a}\ge\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+1\quad(1)$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=1$. Tương tự ta có :

$b+\frac{1}{b}\ge\sqrt{\frac{b^4+1}{2b^2}}+1\;\;(2)$ và dấu bằng xảy ra khi $b=1$;

$c+\frac{1}{c}\ge\sqrt{\frac{c^4+1}{2c^2}}+1\;\;(3)$ và dấu bằng xảy ra khi $c=1$.

Cộng vế theo vế của các bất đẳng thức $(1),(2),(3)$ ta được:

$$a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+\sqrt{\frac{b^4+1}{2b^2}}+\sqrt{\frac{c^4+1}{2c^2}}+3$$

$$3+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+\sqrt{\frac{b^4+1}{2b^2}}+\sqrt{\frac{c^4+1}{2c^2}}+3\;\;(\text{do } a+b+c=3)$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\sqrt{\frac{a^4+1}{2a^2}}+\sqrt{\frac{b^4+1}{2b^2}}+\sqrt{\frac{c^4+1}{2c^2}}.$$

Vậy bất đẳng thức được chứng minh.

Bài 15. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Với các số thực a,b,c thỏa mãn $a^2b+b^2c+c^2a+16=ab^2+bc^2+ca^2$:

1) Chứng minh $(a-b)(b-c)(c-a)=16$.

2) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

1) Ta có:

$a^2b+b^2c+c^2a+16=ab^2+bc^2+ca^2$

$(a^2b-ab^2)+(b^2c-bc^2)+(c^2a-ca^2)=-16$

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=-16$

$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-b+b-a)=-16$

$ab(a-b)+bc(b-c)-ca(b-c)-ca(a-b)=-16$

$[ab(a-b)-ca(a-b)]+[bc(b-c)-ca(b-c)]=-16$

$a(a-b)(b-c)+c(b-c)(b-a)=-16$

$(a-b)(b-c)(c-a)=16$ (điều phải chứng minh).

2) Ta trình bày hai cách

CÁCH 1. Ta có $16=(a-b)(b-c)(c-a)>0$. Không mất tính tổng quát giả sử $a=\max\{a,b,c\}$.

Nếu $a\ge b\ge c$ thì $(a-b)(b-c)(c-a)\le 0$ vô lí. Do đó $a\ge c\ge b$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$16=(a-b)(b-c)(c-a)=(a-b)(c-b)(a-c)\le(a-b)\cdot\left(\frac{c-b+a-c}{2}\right)^2=\frac{(a-b)^3}{4}.$$

Suy ra $(a-b)^3\ge 64$ hay $a-b\ge 4$.

Có $P=a^2+b^2+c^2\ge a^2+b^2\ge\dfrac{(a-b)^2}{2}\ge 8$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=2,b=-2,c=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 8 khi $a=2,b=-2,c=0$.

CÁCH 2. Giả sử $c=\min\{a,b,c\}$ thì $(a-c)(b-c)\ge 0$. Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{(a+b+c)^2+2(a-b)^2+(a-c)(b-c)+(a-c)(b-c)}{3}$$

$$\ge\frac{0+3\sqrt[3]{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}}{3}=8$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=2,b=-2,c=0$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 8 khi $a=2,b=-2,c=0$.

Bài 16. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $1<x,y,z<2$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\right)\left(\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8z^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}\right)\ge\frac{3xy}{z^2+8xy}+\frac{3yz}{x^2+8yz}+\frac{3zx}{y^2+8zx}.$$

Lời giải

Đặt vế trái của bất đẳng thức là A. Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có;

$$\frac{x^3}{x^3+8z^3}+\frac{y^3}{y^3+8z^3}+\frac{z^3}{z^3+8y^3}\ge\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{x^6+y^6+z^6+8(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)}$$

$$=\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{(x^3+y^3+z^3)^2+6(x^3y^3+y^3z^3+z^3x^3)}\ge\frac{(x^3+y^3+z^3)^2}{(x^3+y^3+z^3)^2+2(x^3+y^3+z^3)^2}=\frac{1}{3}.$$

Kết hợp với $\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}\ge 3$ ta có $A\ge 1$.

Đặt vế phải của bất đẳng thức là B. Ta có:

$$\frac{8}{3}B=\frac{8xy}{z^2+8xy}+\frac{8yz}{x^2+8yz}+\frac{8zx}{y^2+8zx}$$

Suy ra:

$$3-\frac{8}{3}B=\frac{z^2}{z^2+8xy}+\frac{x^2}{x^2+8yz}+\frac{y^2}{y^2+8zx}\ge\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+8(xy+yz+zx)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2+6(xy+yz+zx)}\ge\frac{(x+y+z)^2}{3(x+y+z)^2}=\frac{1}{3}.$$

Từ đó ta có $B\le 1$. Kết hợp hai bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh.

Dấu bằng xảy ra tại $x=y=z=1$.

Bài 17. (Trường chuyên Tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

Với a,b,c là các số nguyên dương thỏa mãn $a+b+c=12$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(a-\frac{4}{a}\right)^2+\left(b-\frac{4}{b}\right)^2+\left(c-\frac{4}{c}\right)^2.$$

Lời giải

Để ý rằng $1\le a,b,c\le 10$. Kiểm tra trực tiếp, ta có:

$$\frac{231x-6}{25}\ge\left(x-\frac{4}{x}\right)^2\ge\frac{15x-42}{2} \text{ với mọi } x\ \ 0<x\le 10.$$

Do đó:

$$\frac{231(a+b+c)-18}{25}\ge P\ge\frac{15(a+b+c)-126}{2}.$$

Suy ra $\frac{2754}{25}\ge P\ge 27$. Dấu đẳng thức thứ nhất xảy ra khi (a,b,c) là hoán vị của $(10;1;1)$, dấu đẳng thức thứ hai xảy ra khi $(a;b;c)=(4;4;4)$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{2754}{25}$, giá trị nhỏ nhất của P là 27 .

Bài 18. (Trường chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Cho các số x,y,z thoả mãn $0<x,y,z<1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{4}{\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{z}\right)}+3(x-1)(y-1)(z-1).$$

Lời giải

Ta có:

$$\left(\sqrt{x}+2\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}+2\sqrt{z}\right)\le\frac{\left(2\sqrt{x}+2\sqrt{y}+2\sqrt{z}\right)^2}{4}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2.$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\right)^2\le 3(x+y+z).$$

Khi đó ta có:

$$P \geq \frac{4}{3(x+y+z)} + 3(x-1)(y-1)(z-1) = \frac{4}{3(x+y+z)} - 3(1-x)(1-y)(1-z).$$

Theo bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$(1-x)(1-y)(1-z) \leq \frac{(3-x-y-z)^3}{27}$$

Đặt $t = x+y+z$. Khi đó: $P \geq \frac{4}{3t} + \frac{(t-3)^3}{9}$.

Ta sẽ chứng minh $\frac{4}{3t} + \frac{(t-3)^3}{9} \geq \frac{4}{9}$, thật vậy

$$\begin{aligned}
&\frac{4}{3t} + \frac{(t-3)^3}{9} \geq \frac{4}{9}\\
&\frac{12 + t(t-3)^2 - 4t}{9t} \geq 0\\
&\frac{t^4 - 6t^2 + 5t + 12}{9t} \geq 0\\
&\frac{(t+1)(t-3)(t-4)}{9t} \geq 0
\end{aligned}.$$

Bất đẳng thức cuối đúng do $0 < t = x+y+z < 3$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{4}{9}$ khi $x = y = z = \frac{1}{3}$.

Bài 19. (Trường chuyên tỉnh Hải Dương năm 2025 – 2026)

Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn điều kiện $x+y+z=0$. Chứng minh rằng

$$\frac{2x-1}{x^2+2} + \frac{2y-1}{y^2+2} + \frac{2z-1}{z^2+2} \geq \frac{-3}{2}.$$

Lời giải

Cộng từng số hạng bên vế trái của bất đẳng thức với 1 ta thu được bất đẳng thức mới như sau:

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+2} + \frac{(y+1)^2}{y^2+2} + \frac{(z+1)^2}{z^2+2} \geq \frac{3}{2}$$

Theo nguyên lí Dirichlet trong 3 số x, y, z luôn tồn tại 2 số cùng dấu.

Ta có thể giả sử 2 số đó là y và z.

Áp dụng bất dẳng thức Cauchy – Schuarz ta có: $\dfrac{(y+1)^2}{y^2+2}+\dfrac{(z+1)^2}{z^2+2}\geq\dfrac{(y+z+2)^2}{y^2+z^2+4}$.

Do $yz\geq 0$ nên $y^2+z^2+4\leq y^2+2yz+z^2+4=(y+z)^2+4\Rightarrow\dfrac{(y+z+2)^2}{y^2+z^2+4}\geq\dfrac{(y+z+2)^2}{(y+z)^2+4}$.

Khi đó ta chỉ cần chứng minh: $\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2}+\dfrac{(y+z+2)^2}{(y+z)^2+4}\geq\dfrac{3}{2}$.

$$\frac{(x+1)^2}{x^2+2}+\frac{(2-x)^2}{x^2+4}\geq\frac{3}{2}$$
$$\frac{(x-2)^2}{x^2+4}\geq\frac{3}{2}-\frac{(x+1)^2}{x^2+2}$$
$$\frac{(x-2)^2}{x^2+4}\geq\frac{(x-2)^2}{2\left(x^2+2\right)}$$
$$(x-2)^2\cdot\left(\frac{1}{x^2+4}-\frac{1}{2\left(x^2+2\right)}\right)\geq 0$$
$$\frac{(x-2)^2x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}\geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi $(x,y,z)=(0,0,0)$ hoặc $(x,y,z)=(2,-1,-1)$ và các hoán vị của nó.

Ta có điều phải chứng minh.

Bài 20. (Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Cho x,y,z là các số thưc dương thỏa mãn $xyz=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\geq 1.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, ta có:

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^3+8}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^3+8}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^3+8}}\geq\frac{(x+y+z)^2}{\sqrt{x^3+8}+\sqrt{y^3+8}+\sqrt{z^3+8}}.$$

Do do, ta cần chứng minh

$$(x+y+z)^2\geq\sqrt{x^3+8}+\sqrt{y^3+8}+\sqrt{z^3+8}.$$

Thật vậy, áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta có:

$$\sqrt{x^3+8}=\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}\le\frac{x^2-x+6}{2}.$$

Bằng cách chứng minh hoàn toàn tương tự, ta cũng có

$$\sqrt{y^3+8}\le\frac{y^2-y+6}{2},\ \sqrt{z^3+8}\le\frac{z^2-z+6}{2}.$$

Do đó cộng dọc các bất đẳng thức cùng chiều, ta thu được

$$\sqrt{x^3+8}+\sqrt{y^3+8}+\sqrt{z^3+8}\le\frac{x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18}{2}.$$

Như vậy, ta cần chứng minh bất đẳng thức chặt hơn như sau

$$2(x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2-(x+y+z)+18$$

$$x^2+y^2+z^2+4(xy+yz+zx)+x+y+z\ge 18$$

Bất đẳng thức cuối cùng luôn đúng do

$x^2+y^2+z^2\ \ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=3$

$x+y+z\ \ge 3\sqrt[3]{xyz}=3$

$4(xy+yz+zx)\ \ge 4\cdot 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}=12$

Hoàn tất chứng minh.

Bài 21. (Trường chuyên tỉnh Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Cho hai số dương a,b thay đổi thoả mãn $a+b+4ab=6$. Tìm giá trị lớn nhất của của biểu thức

$$M=\frac{ab}{2}-\frac{1}{\sqrt{a+b+2}}.$$

Lời giải

Đặt $t=a+b\ (t>0)$. Theo giả thiết ta có:

$$6=a+b+4ab\le a+b+(a+b)^2=t+t^2\Rightarrow t^2+t-6\ge 0\Rightarrow(t-2)(t+3)\ge 0\Rightarrow t\ge 2.$$

Mặt khác cũng từ giả thiết ta rút ra $ab=\frac{6-t}{4}$.

Khi đó: $M=\frac{6-t}{8}-\frac{1}{\sqrt{t+2}}=\frac{3}{4}-\frac{t}{8}-\frac{1}{\sqrt{t+2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho ba số thực dương ta có:

$$\frac{t+2}{8}+\frac{1}{\sqrt{t+2}}+\frac{1}{\sqrt{t+2}}\geq 3\sqrt[3]{\frac{t+2}{8}\cdot\frac{1}{\sqrt{t+2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t+2}}}=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{8}+\frac{1}{\sqrt{t+2}}\geq\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{t+2}}\geq\frac{3}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{\sqrt{2+2}}=\frac{3}{4}$$

Suy ra: $M\leq\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=0$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của M là 0 khi $a=b=1$.

Bài 22. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+y+z=xy+yz+zx$.

a) Chứng minh $x+y+z\geq 3$.

b) Chứng minh $\frac{1}{x^2+y^2+z}+\frac{1}{y^2+z^2+x}+\frac{1}{z^2+x^2+y}\leq 1$.

Lời giải

a) Ta có $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(x+y+z)^2\leq(1+1+1)(x^2+y^2+z^2)$$

$$=3[(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)]$$

$$6(x+y+z)^2\leq 2(x+y+z)^2$$

$$(x+y+z)^2\geq 3(x+y+z)$$

Vì $x,y,z>0$ nên $x+y+z>0$ suy ra $x+y+z\geq 3$

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$. Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Ta kí hiệu vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh là S.

Theo bất dẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$(x+y+z)^2\leq(x^2+y^2+z)(1+1+z)=(x^2+y^2+z^2)(z+2)$$

Suy ra: $\frac{1}{x^2+y^2+z}\leq\frac{z+2}{(x+y+z)^2}$

Bằng cách chứng minh tương tự ta cũng có

$$\frac{1}{y^2+z^2+x}\le\frac{x+2}{(x+y+z)^2};\frac{1}{z^2+x^2+y}\le\frac{y+2}{(x+y+z)^2}.$$

Khi đó ta cộng vế theo về thu được $S\le\frac{x+y+z+6}{(x+y+z)^2}$.

Như vậy ta cần chứng minh $\frac{x+y+z+6}{(x+y+z)^2}\le 1$

Hay $x+y+z+6\le(x+y+z)^2$

Hay $(x+y+z-3)(x+y+z-2)\ge 0$

Theo ý a ta có được bất đẳng thức trên đúng.

Do đó $S\le 1$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z=2$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 23. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương x,y,z. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y}+\frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z}+\frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x}.$$

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{2x^2+2xy+y^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(x-y)^2+(3x+2y)^2}\ge\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{(3x+2y)^2}=\frac{1}{\sqrt{5}}(3x+2y)$$

Suy ra $\frac{\sqrt{2x^2+2xy+y^2}}{x+2y}\ge\frac{3x+2y}{\sqrt{5}(x+2y)}$ (1)

Tương tự ta có : $\frac{\sqrt{2y^2+2yz+z^2}}{y+2z}\ge\frac{3y+2z}{\sqrt{5}(y+2z)}(2)$; $\frac{\sqrt{2z^2+2zx+x^2}}{z+2x}\ge\frac{3z+2x}{\sqrt{5}(z+2x)}(3)$

Cộng từng vế của $(1),(2),(3)$ ta được

$$P\ge\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{3x+2y}{x+2y}+\frac{3y+2z}{y+2z}+\frac{3z+2x}{z+2x}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(3+\frac{2x}{x+2y}+\frac{2y}{y+2z}+\frac{2z}{z+2x}\right).$$

Ta có: $\dfrac{2x}{x+2y}+\dfrac{2y}{y+2z}+\dfrac{2z}{z+2x}=2\left(\dfrac{x^2}{x^2+2xy}+\dfrac{y^2}{y^2+2yz}+\dfrac{z^2}{z^2+2zx}\right)$

$\geq 2\cdot\dfrac{(x+y+z)^2}{x^2+2xy+y^2+2yz+z^2+2xz}=2\cdot\dfrac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2}=2$

Suy ra $P\geq\dfrac{1}{\sqrt{5}}(3+2)=\sqrt{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\sqrt{5}$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z>0$.

Bài 24. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả số thực $k>0$ sao cho $\dfrac{x}{xy+2}\leq\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{2}{y}\right)$ luôn đúng với mọi $x,y>0$.

b) Cho $a,b,c,x,y,z>0$ thỏa mãn $x+y+z=2\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=4$.

Chứng minh: $\dfrac{x}{ax+2}+\dfrac{y}{by+2}+\dfrac{z}{cz+2}\leq 1$.

Lời giải

a) Ta có: $\dfrac{(xy+2)^2}{xy}=\dfrac{x^2y^2+4xy+4}{xy}=xy+\dfrac{4}{xy}+4\geq 2\sqrt{4}+4=8$ (AM – GM).

Dấu bằng xảy ra khi $xy=2$.

Do đó: $\dfrac{x}{xy+2}\leq\dfrac{1}{8}\left(\dfrac{xy+2}{y}\right)=\dfrac{1}{8}\left(x+\dfrac{2}{y}\right)$ với mọi $x,y>0$.

Vì $\dfrac{x}{xy+2}\leq\dfrac{1}{k}\left(x+\dfrac{2}{y}\right)$ luôn đúng với mọi $x,y>0$ nên $0<k\leq 8$.

Vậy $0<k\leq 8$.

b) $\dfrac{x}{ax+2}+\dfrac{y}{by+2}+\dfrac{z}{cz+2}\leq\dfrac{1}{8}\left(x+\dfrac{2}{a}+y+\dfrac{2}{b}+z+\dfrac{2}{c}\right)=\dfrac{1}{8}(4+4)=1$.

Dấu bằng xảy ra khi $ax=by=cz=2$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 25. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Cho ba số thực x, y, z, thỏa mãn: $(x-y)(y-z)(z-x) \geq 2$. Chứng minh rằng, $x^2+y^2+z^2 \geq 2$.

Lời giải

Do tính đối xứng vòng quanh của các biểu thức nằm ở vế trái của các bất đẳng thức đã nêu ở để bài, đối với x, y, z, nên không mất tổng quát, giả sử $x = \max\{x, y, z\}$.

Khi đó, $x \geq y$ suy ra $x-y \geq 0$. Do đó, từ giả thiết của bài ra, ta có:

$$2 \leq (x-y) \cdot \frac{((y-z)+(z-x))^2}{4} = \frac{(x-y)^3}{4}.$$

Suy ra $x-y \geq 2$; vì vậy: $x^2+y^2+z^2 \geq x^2+y^2 = x^2+(-y)^2 \geq \frac{(x-y)^2}{2} \geq \frac{2^2}{2} = 2$.

Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Bài 26. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x+y+z=3xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$B = \frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)}.$$

Lời giải

Đặt $x = \frac{1}{a}; y = \frac{1}{b}; z = \frac{1}{c}$ $(a,b,c>0)$ và $ab+bc+ca=3$.

Khi đó $B = \frac{yz}{x^3(z+2y)} + \frac{zx}{y^3(x+2z)} + \frac{xy}{z^3(y+2x)} = \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}$.

Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\frac{a^3}{b+2c} + \frac{a(b+2c)}{9} \geq \frac{2}{3}a^2; \frac{b^3}{c+2a} + \frac{b(c+2a)}{9} \geq \frac{2}{3}b^2; \frac{c^3}{a+2b} + \frac{c(a+2b)}{9} \geq \frac{2}{3}c^2.$$

Cộng vế với vế ta được

$$B + \frac{ab+bc+ca}{3} \geq \frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{2}{3}(ab+bc+ca).$$

$$\Rightarrow B \geq \frac{1}{3}(ab+bc+ca) = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$ suy ra $x=y=z=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là 1 khi $x=y=z=1$.

Bài 27. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

a) Cho các số thực $a,b,c>0$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=6$. Chứng minh $a^3+b^3+c^3\geq 24$.

b) Cho các số thực $a\geq 0,b\geq 0,c\geq 0$ và thỏa mãn điều kiện $a+b+c=2026$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M=a^{2025}b+b^{2025}c+c^{2025}a$.

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có

$$a^3+8+8\geq 3\sqrt[3]{a^3\cdot 8\cdot 8}=12a.$$

Tương tự $b^3+16\geq 12b,\ c^3+16\geq 12c$. Do đó

$$a^3+b^3+c^3+48\geq 12(a+b+c)\Rightarrow a^3+b^3+c^3\geq 24.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Giả sử $a=\max\{a,b,c\}$, tức $a\geq b,a\geq c$. Khi đó:

$$M\ =a^{2025}b+b^{2005}c+c^{2005}a\leq a^{2005}b+ba^{2004}c+\frac{c^{2005}a}{2}+\frac{c^{2005}a}{2}$$

$$\leq a^{2005}b+ba^{2004}c+\frac{a^{2005}c}{2}+\frac{c^2a^{2004}}{2}=a^{2004}\left(ab+bc+\frac{ac}{2}+\frac{c^2}{2}\right)=a^{2004}(a+c)\left(b+\frac{c}{2}\right)$$

Khi đó: $\dfrac{M}{2025^{2025}}\leq\dfrac{a}{2025}\cdot\dfrac{a}{2025}\cdots\cdots\dfrac{a}{2025}\cdot\dfrac{a+c}{2025}\cdot\left(b+\dfrac{c}{2}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2026 số, ta được:

$$\frac{M}{20255^{2005}}\leq\left(\frac{\underbrace{\frac{a}{2025}+\frac{a}{2025}+\cdots+\frac{a}{2025}}_{2024\text{ sh havs}}+\frac{a+c}{2025}+b+\frac{c}{2}}{2026}\right)^{2026}=\left(\frac{a+b+\frac{2027}{4050}c}{2026}\right)^{2006}.$$

Suy ra $\dfrac{M}{2025^{2005}}\leq\left(\dfrac{a+b+c}{2026}\right)^{2026}=1$.

Do do $M\leq 2025^{2005}$, với $a=\max\{a,b,c\}$ thì dấu bằng xảy ra khi $a=2025,b=\ 1,\ c=0$ hoặc các hoán vị.

Bài 28. (Trường chuyên Long An năm 2025 – 2026)

Cho a,b là các số thực dương sao cho $\dfrac{a-b}{3a+b}=\dfrac{b^2}{a^2+b^2+ab}$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{a^2+2ab+a+2}{2b+a+1}$.

Lời giải

Từ giả thiết ta có :

$$\frac{a-b}{3a+b}=\frac{b^2}{a^2+b^2+ab}$$
$$(a-b)(a^2+b^2+ab)=b^2(3a+b)$$
$$a^3-b^3=3ab^2+b^3$$
$$a^3-2b^3-3ab^2=0$$
$$(a^3+b^3)-(3b^3+3ab^2)=0$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)-3b^2(a+b)=0$$
$$(a+b)(a^2-ab-2b^2)=0$$
$$(a+b)(a^2-b^2-ab-b^2)=0$$
$$(a+b)\left[(a+b)(a-b)-b(a+b)\right]=0$$
$$(a+b)^2(a-2b)=0$$

Suy ra $a-2b=0$ (do $a,b>0$), suy ra $a=2b$.

Với $a=2b$ thì

$$P=\frac{a^2+2ab+a+2}{2b+a+1}=\frac{4b^2+4b^2+2b+2}{2b+2b+1}=\frac{8b^2+2b+2}{4b+1}=2b+\frac{2}{4b+1}=2b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2b+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 2 số dương $2b+\dfrac{1}{2}$ và $\dfrac{1}{2b+\frac{1}{2}}$ ta được

$$2b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2b+\frac{1}{2}}\ge 2\sqrt{\left(2b+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2b+\frac{1}{2}}}=2.$$

Suy ra $P \geq 2 - \frac{1}{2}$ hay $P \geq \frac{3}{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} 2b + \frac{1}{2} = 1 \\ a = 2b \end{cases}$ hay $\begin{cases} b = \frac{1}{4} \\ a = \frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$ tại $(a;b) = \left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$

Bài 29. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

Xét x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $xy + yz + zx \leq xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$Q = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 18(x + y + z).$$

Lời giải

Từ giả thiết có $1 \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Dùng bất đẳng thức Cauchy – Schwarz có

$$xy^2 + yz^2 + zx^2 \geq \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)\left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right) \geq (y + z + x)^2.$$

Suy ra $Q \geq (x + y + z)^2 - 18(x + y + z) = (x + y + z - 9)^2 - 81 \geq -81$

Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 3$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q bằng -81 tại $x = y = z = 3$.

Bài 30. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực a và b thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $a < b \leq 420$.

ii) Với mọi số thực x, y, z thỏa mãn $a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b,\ a \leq z \leq b$, ta luôn có

$$(x + y + z - 420)^2 \leq \frac{1}{105}xyz$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = b - a$.

Lời giải

Đặt $x = 105x_1,\ y = 105y_1,\ z = 105z_1$, với $a_1 \leq x_1, y_1, z_1 \leq b_1$ trong đó $a = 105a_1,\ b = 105b_1$.

Khi đó $a_1b_1 \leq 4$ và $\left(x_1 + y_1 + z_1 - 4\right)^2 \leq x_1y_1z_1 \quad (1)$

Đặt $x_1 = 2 + x_2,\ y_1 = 2 + y_2,\ z_1 = 2 + z_2$.

Khi đó (1) trở thành

$$\left(x_2+y_2+z_2+2\right)^2\le\left(x_2+2\right)\left(y_2+2\right)\left(z_2+2\right)$$

$$x_2^2+y_2^2+z_2^2\le x_2y_2z_2+4\quad(2)$$

Với $m=a_1-2\le x_2,y_2,z_2\le b_1-2=n$.

Ta chọn $x_2=y_2=z_2=m$ thay vào (2) thì

$$3m^2\le m^3+4 \text{ hay } (m+1)(m-2)^2\ge 0 \text{ suy ra } m\ge -1.$$

Ta chọn $x_2=y_2=n,\ z_2=m$ thay vào (2) và chú ý $2-m\ge 0$ thì có

$$2n^2+m^2\le mn^2+4 \text{ hay } \left(n^2-m-2\right)\left(m-2\right)\ge 0 \text{ suy ra } n^2\le m+2.$$

Nếu $n\ge 1$ thì $n\le n^2\Rightarrow b_1-a_1=n-m\le n^2-m\le 2$.

Nếu $n\le 1$ và có $m\ge -1$ suy ra $b_1-a_1=n-m\le 2$.

Vậy giá trị lớn nhất của b_1-a_1 là 2 khi $m=-1,n=1$.

Hay giá trị lớn nhất của $b-a$ là 210.

Khi $m=-1,n=1$ thì $a=105a_1=105\left(m+2\right)=105,b=105b_1=105\left(n+2\right)=315$.

Vậy giá trị lớn nhất T là 210 và dấu bằng xảy ra khi $a=105,b=315$.

Bài 31. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực dương a,b thỏa mãn $a.b=1$. Chứng minh rằng: $(1+a)^2(1+b)^4>\dfrac{1024}{27}$.

Lời giải

Ta có:

$$(1+a)^2=\left(1+\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2\ge\left(3\sqrt[3]{1\frac{a}{2}\frac{a}{2}}\right)^2=9.\sqrt[3]{\frac{a^4}{16}};$$

$$(1+b)^4=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+b\right)^4\ge\left(3\sqrt[3]{\frac{1}{2}\frac{1}{2}b}\right)^4=81.\sqrt[3]{\frac{b^4}{256}}.$$

Suy ra $(1+a)^2(1+b)^4\ge 9.\sqrt[3]{\dfrac{a^4}{4^2}}.81.\sqrt[3]{\dfrac{b^4}{4^4}}=\dfrac{729}{16}\sqrt[3]{a^4b^4}=\dfrac{729}{16}>\dfrac{1024}{27}$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 32. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho hai số thực x, y thoả mãn $0 < x < y \le 13$ và $2xy \le 13x + 9y$. Chứng minh rằng $x^2 + y^2 \le 250$.

Lời giải

Sử dụng khi triển Abel ta có:

$$250 = \frac{169}{y^2}\cdot y^2 + \frac{81}{x^2}\cdot x^2 = \left(y^2 - x^2\right)\cdot\frac{169}{y^2} + x^2\left(\frac{169}{y^2} + \frac{81}{x^2}\right) \ge y^2 - x^2 + x^2\cdot\frac{169x^2 + 81y^2}{x^2y^2}$$

$$\ge y^2 - x^2 + \frac{(13x+9y)^2}{2y^2} \ge y^2 - x^2 + \frac{(2xy)^2}{2y^2} = x^2 + y^2$$

(do $13 \ge y > x > 0,\ 2xy \le 13x + 9y$).

Vậy $250 \ge x^2 + y^2$. Dấu bằng xảy ra khi $y = 13, x = 9$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Bài 33. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho ba số dương x, y, z thoả mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2}{1+y-x} + \frac{y^2}{1+z-y} + \frac{z^2}{1+x-z} \ge 1.$$

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < z < 1$.

Ta có: $\dfrac{x^2}{1+y-x} \ge \dfrac{x^2\left[1-(y-x)^2\right]}{1+y-x} = \dfrac{x^2(1-y+x)(1+y-x)}{1+y-x} = x^2(1-y+x) = x^2 - x^2y + x^3$

(vì $1 \ge 1-(y-x)^2$)

Tương tự: $\dfrac{y^2}{1+z-y} \ge y^2 - y^2z + y^3$; $\dfrac{z^2}{1+x-z} \ge z^2 - z^2x + z^3$.

Do đó: $\dfrac{x^2}{1+y-x} + \dfrac{y^2}{1+z-y} + \dfrac{z^2}{1+x-z} \ge x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - y^2z - z^2x + 1$ $\left(\text{vì } x^2 + y^2 + z^2 = 1\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số dương, ta có: $x^3 + x^3 + y^3 \ge 3\sqrt[3]{x^3x^3y^3} = 3x^2y$

Tương tự: $y^3 + y^3 + z^3 \ge 3y^2z$; $z^3 + z^3 + x^3 \ge 3z^2x$.

Suy ra $3x^3 + 3y^3 + 3z^3 \ge 3x^2y + 3y^2z + 3z^2x$

$x^3+y^3+z^3 \ge x^2y+y^2z+z^2x$

$x^3+y^3+z^3-x^2y-y^2z-z^2x \ge 0$

Vậy $\dfrac{x^2}{1+y-x}+\dfrac{y^2}{1+z-y}+\dfrac{z^2}{1+x-z} \ge 1$. Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Bài 34. (Trường chuyên toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho ba số thực dương x,y,z thỏa mãn $\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{y-1}{y+4} \ge \dfrac{6}{z+5}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(2x+2)(2y+3)(2z+4).$$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$\frac{x-1}{x+3}+\frac{y-1}{y+4}-\frac{6}{z+5} \ge 0$$

$$1-\frac{4}{x+3}+1-\frac{5}{y+4}-\frac{6}{z+5} \ge 0$$

$$\frac{4}{x+3}+\frac{5}{y+4}+\frac{6}{z+5} \le 2$$

Ta có: $\dfrac{2x+2}{x+3}=2-\dfrac{4}{x+3} \ge \dfrac{5}{y+4}+\dfrac{6}{z+5} \ge 2\sqrt{\dfrac{5}{y+4}\cdot\dfrac{6}{z+5}}$ (1)

(Bất đẳng thức $a+b \ge 2\sqrt{ab}$ cho hai số a,b không âm)

Tương tự ta có:

$$\frac{2y+3}{y+4}=2-\frac{5}{y+4} \ge \frac{4}{x+3}+\frac{6}{z+5} \ge 2\sqrt{\frac{4}{x+3}\cdot\frac{6}{z+5}} \quad (2)$$

$$\frac{2z+4}{z+5}=2-\frac{6}{z+5} \ge \frac{4}{x+3}+\frac{5}{y+4} \ge 2\sqrt{\frac{4}{x+3}\cdot\frac{5}{y+4}} \quad (3)$$

Nhân (1), (2) và (3) vế theo vế, ta được: $\dfrac{2x+2}{x+3}\cdot\dfrac{2y+3}{y+4}\cdot\dfrac{2z+4}{z+5} \ge 8\cdot\dfrac{4\cdot5\cdot6}{(x+3)(y+4)(z+5)}$

Suy ra $(2x+2)(2y+3)(2z+4) \ge 960$ hay $P \ge 960$.

Dấu bằng xảy ra khi $x=3;\ y=3{,}5;\ z=4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 960 khi $x=3;\ y=3{,}5;\ z=4$.

Bài 35. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le 3.$$

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có:

$$\sqrt[3]{(a+2b).1.1}\le \frac{a+2b+2}{3};$$

$$\sqrt[3]{(b+2c).1.1}\le \frac{b+2c+2}{3};$$

$$\sqrt[3]{(c+2a).1.1}\le \frac{c+2a+2}{3}.$$

Khi đó $\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le \dfrac{3a+3b+3c+6}{3}=3$ (điều phải chứng minh).

Bài 36. (Trường chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3$. Chứng minh rằng

$$x^2+y^2+z^2-2xyz\ge 1.$$

Lời giải

Ta có bất đẳng thức quen thuộc sau: $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx=3xyz$

Mặt khác $3=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{1}{xyz}}$

Suy ra $\sqrt[3]{xyz}\ge 1$ nên $xyz\ge 1$

Khi đó: $x^2+y^2+z^2-2xyz\ge xyz\ge 1$

Ta hoàn tất chứng minh

Như vậy dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=1$.

Bài 37. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x+2y+3z=2024$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M=\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{3}{8xy}+\frac{1}{8yz}+\frac{1}{4zx}.$$

Lời giải

$$M=\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{3}{8xy}+\frac{1}{8yz}+\frac{1}{4zx}$$

$$M=\frac{1}{x^2+4y^2+9z^2}+\frac{1}{6xy}+\frac{1}{18yz}+\frac{1}{9zx}+\frac{5}{12}\left(\frac{1}{2xy}+\frac{1}{6yz}+\frac{1}{3zx}\right)$$

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có:

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\geq 16$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\geq \frac{16}{a+b+c+d}$$

Tương tự $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq \frac{9}{a+b+c}$

Ta có: $M\geq \frac{16}{x^2+4y^2+9z^2+6xy+18yz+9zx}+\frac{5}{12}\left(\frac{9}{2xy+6yz+3zx}\right)$

$$=\frac{16}{(x+2y+3z)^2+2xy+6yz+3zx}+\frac{15}{4(2xy+6yz+3zx)}$$

Mặt khác $ab+bc+ca\leq \frac{(a+b+c)^2}{3}$

$$\Rightarrow M\geq \frac{16}{(x+2y+3z)^2+\frac{(x+2y+3z)^2}{3}}+\frac{15}{4\cdot\frac{(x+2y+3z)^2}{3}}=\frac{16}{2024^2+\frac{2024^2}{3}}+\frac{45}{4\cdot 2024^2}=\frac{93}{4.2024^2}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{93}{4\cdot 2024^2}$ khi $x=2y=3z=\frac{2024}{3}$.

Bài 38. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $ab+bc+ca=3abc$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\frac{c+a}{c^2+ca+a^2}.$$

Lời giải

Với $a,b,c>0$, ta có: $ab+bc+ac=3abc\Rightarrow \frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=3$

$P=\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b+c}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{a+c}{a^2+ac+c^2}$

Xét $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}=\dfrac{a+b}{(a-b)^2+3ab}\le\dfrac{a+b}{3ab}=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a}\right)$

Chứng minh tương tự: $\dfrac{b+c}{b^2+bc+c^2}\le\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{b}\right)$; $\dfrac{a+c}{a^2+ac+c^2}\le\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)$.

$\Rightarrow P\le\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)=\dfrac{2}{3}\cdot 3=2$.

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 2 khi $a=b=c=1$.

Bài 39. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Cho a,b,c là các số thực dương thỏa mãn $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\le 6$.

a) Chứng minh rằng: $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}\ge a+b+c$;

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{2025}{a+b+c}$.

Lời giải

a) Trước hết, ta chứng minh bổ đề $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$ với mọi x,y,z.

Thật vậy, ta có: $x^2+y^2+z^2\ge xy+yz+zx$

$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$ (luôn đúng).

Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z$.

Áp dụng bổ đề trên cho các số thực dương a,b,c, ta được

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\ge a^2bc+b^2ac+c^2ab=abc\left(a+b+c\right)$$

Hay

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\ge a+b+c.$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.

b) Đặt $k = a+b+c$.

Từ giả thiết và ý a), ta được $0 < k \le 6$.

Ta có:

$$T = \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+\frac{2025}{a+b+c} \ge a+b+c+\frac{2025}{a+b+c} = k+\frac{2025}{k} = k+\frac{36}{k}+\frac{1989}{k}$$

$$\ge 2\sqrt{k\cdot\frac{36}{k}}+\frac{1989}{k} = 12+\frac{1989}{k} \ge 12+\frac{1989}{6} = \frac{687}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=2$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T bằng $\frac{687}{2}$ khi $a=b=c=2$.

Bài 40. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn $2xy = x+y$. Chứng minh rằng

a) $xy \ge 1$;

b) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1} \ge \sqrt{(x-y)^2+8}$.

Lời giải

a) Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $2xy = x+y \ge 2\sqrt{xy}$.

Vì $x, y > 0$ nên $\sqrt{xy} \ge 1$ suy ra $xy \ge 1$ (điều phải chứng minh).

b) Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$x^2+y^2+2+2\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)} \ge (x-y)^2+8 \text{ hay } 2\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1} \ge 6-2xy$$

Nếu $6-2xy<0$ thì bất đẳng thức đúng, ngược lại thì

$x^2y^2+x^2+y^2+1 \ge (3-xy)^2$

$x^2+y^2+6xy-8 \ge 0$

$(x+y)^2+4xy-8 \ge 0$

$(xy)^2+xy-2 \ge 0$

$(xy-1)(xy+2) \ge 0$, luôn đúng vì $xy \ge 1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh.