

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025-2026)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 6 = 0$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 + 6x - m^2 + 6m = 0$ (1) (m là tham số).

- a) Tìm các giá trị m nguyên để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1x_2 > 5$.
- b) Tìm các giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - 8x_1 = x_2$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 + m = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^4 + 8x_1 = x_2^2(2mx_2 - m^2 - m) + 8x_2$.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025-2026)

Biết phương trình $x^3 + x - 3 = 0$ có nghiệm $x = a$ và phương trình $3x^3 + 8x^2 + 7x + 1 = 0$ có nghiệm $x = b$. Chứng minh rằng $ab + a = 1$.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025-2026)

Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 82$.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2025-2026)

Cho phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 và $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Sóc Trăng năm 2025-2026)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 - 3x + 4m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 12$.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $T = x_1^2(x_1^2 - 2x_2^2) - 7x_2 - 12$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m - 4 = 0$ (1), với m là tham số.

(1) Giải phương trình (1) với $m = 1$.

(2) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - mx_1 + m)(x_2^2 - mx_2 + m) = 2.$$

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025-2026)

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} = 4$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025-2026)

Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = 2(x-1)\sqrt{x+2}$.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025-2026)

Giải phương trình $\sqrt{x^2+12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2+5}$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025-2026)

Giải phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025-2026)

Giải phương trình: $2x^2 + (x+2)\sqrt{x+2} = 2 - 3x$ ($x \in \mathbb{R}$).

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025-2026)

Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} + 5 = 4\sqrt{(x+3)(2-x)}$.

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025-2026)

Giải phương trình $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$.

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025-2026)

Giải phương trình $(x+3)\sqrt{-x^2-8x+48} = x-24$.

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025-2026)

Giải phương trình $8x^2+16x-7 = (8x+3)\sqrt{5x-1}$.

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025-2026)

Giải phương trình $x^2+3x+4 = 2(x+1)\sqrt{x+3}$.

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025-2026)

Giải phương trình $\sqrt{x^3+1} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2025-2026)

Tính tổng bình phương của các nghiệm của phương trình sau:

$$x^2+x-1 = (x+2)\sqrt{x^2-2x+2}.$$

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2025-2026)

Giải phương trình: $x - \sqrt{x-2} = 4$.

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2025-2026)

Giải phương trình $x - 3\sqrt{x-3} - 1 = 0$.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025-2026)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 6 = 0$.

Lời giải

Phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 2) = 2m + 3 > 0 \text{ hay } m > -\frac{3}{2}.$$

Theo định lý Viète ta có $x_1 + x_2 = 2(m+1)$ và $x_1x_2 = m^2 - 2$.

$$\text{Do đó } x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 5x_1x_2 = 4(m+1)^2 - 5(m^2 - 2) = -m^2 + 8m + 14.$$

$$\text{Suy ra } x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 + 6 = 0$$

$$-m^2 + 8m + 20 = 0$$

$$(m+2)(m-10) = 0$$

Suy ra $m \in \{-2; 10\}$. Kết hợp $m > -\frac{3}{2}$ thì $m = 10$ (thỏa mãn).

Vậy $m = 10$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 + 6x - m^2 + 6m = 0$ (1) (m là tham số).

a) Tìm các giá trị m nguyên để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện $x_1x_2 > 5$.

b) Tìm các giá trị m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 - 8x_1 = x_2$.

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } \Delta' = (m-3)^2$$

Để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta' > 0$ suy ra $m \neq 3$.

Theo định lý Viète ta có $x_1x_2 = -m^2 + 6m$.

Khi đó $x_1x_2 > 5$ thì $-m^2 + 6m > 5$ hay $(m-1)(m-5) < 0$.

Suy ra $m \in \{2; 4\}$ (thỏa mãn).

Vậy $m \in \{2; 4\}$ là các giá trị cần tìm.

b) Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi $m \neq 3$

Áp dụng hệ thức Viète, ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -6 & (2) \\ x_1 x_2 = 6m - m^2 & (3) \end{cases}$$

Ta lại có: $x_1^2 - 8x_1 = x_2$ (4)

Cộng theo vế của (2) và (4) ta được:

$$x_1^2 - 7x_1 = -6$$

$$x_1^2 - 7x_1 + 6 = 0$$

Suy ra
$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 = 6 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -7 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 6m - 7 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 7 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Với $\begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -12 \end{cases} \Rightarrow m^2 - 6m - 72 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 12 \\ m = -6 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Vậy $m \in \{-6; -1; 7; 12\}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 - 2mx + m^2 + m = 0$, (m là tham số). Tìm m để phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^4 + 8x_1 = x_2^2(2mx_2 - m^2 - m) + 8x_2$.

Lời giải

Trước tiên ta tìm điều kiện để phương trình có hai nghiệm phân biệt, ta cần $\Delta > 0$ suy ra $m < 0$.

Theo định lý Viète
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m^2 + m \end{cases}$$

Hơn nữa vì x_2 là nghiệm của phương trình nên $x_2^2 = 2mx_2 - m^2 - m$

Ta viết lại yêu cầu bài toán thành:

$$x_1^4 + 8x_1 = x_2^2(2mx_2 - m^2 - m) + 8x_2$$

$$x_1^4 + 8x_1 = x_2^2 \cdot x_2^2 + 8x_2$$

$$(x_1^4 - x_2^4) + 8(x_1 - x_2) = 0$$

$$(x_1 - x_2) \left[(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + 8 \right] = 0$$

Mà x_1, x_2 phân biệt nên

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2) + 8 = 0$$

$$2m \left[4m^2 - 2(m^2 + m) \right] + 8 = 0$$

$$(m+1)(m^2 - 2m + 2) = 0$$

$$m = -1 \text{ (thoả mãn) (do } m^2 - 2m + 2 > 0 \text{)}$$

Vậy $m = -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025-2026)

Biết phương trình $x^3 + x - 3 = 0$ có nghiệm $x = a$ và phương trình $3x^3 + 8x^2 + 7x + 1 = 0$ có nghiệm $x = b$. Chứng minh rằng $ab + a = 1$.

Lời giải

Để ý rằng $a(b+1) = 1$ suy ra $a = \frac{1}{b+1}$ nên ta có lời giải như sau:

Ta có b là nghiệm của phương trình $3x^3 + 8x^2 + 7x + 1 = 0$

Do đó $b+1$ là nghiệm của phương trình

$$3(x-1)^3 + 8(x-1)^2 + 7(x-1) + 1 = 0$$

$$\text{Hay } 3x^3 - x^2 - 1 = 0$$

Để ý hệ số tự do của đa thức $3x^3 - x^2 - 1$ là $-1 \neq 0 \Rightarrow b+1 \neq 0$

Vậy nên $\frac{1}{b+1}$ là nghiệm của phương trình $\frac{3}{x^3} - \frac{1}{x^2} - 1 = 0$

và cũng chính là nghiệm của phương trình $x^3 + x - 3 = 0$

Từ đây đặt $\frac{1}{b+1} = z$ thì ta có ngay

$$\begin{cases} z^3 + z - 3 = 0 \\ a^3 + a - 3 = 0 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế hai phương trình trên, ta có:

$$(z-a)(z^2 + za + a^2 + 1) = 0$$

Để ý rằng $z^2 + za + a^2 + 1 = \left(z + \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^2}{4} + 1 > 0 \Rightarrow a = z = \frac{1}{b+1}$

Do đó $a(b+1)=1$.

Hay $ab+a=1$.

Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025-2026)

Giải phương trình: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 82$.

Lời giải

Đặt $x+4=t$. Khi đó phương trình trở thành:

$$(t-1)^4 + (t+1)^4 = 82$$

$$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 + t^4 + 4t^3 + 6t^2 + 4t + 1 = 82$$

$$t^4 + 6t^2 - 40 = 0$$

$$(t^2 + 10)(t^2 - 4) = 0$$

$$t^2 = 4 \text{ (vì } t^2 + 10 > 0 \text{)}$$

Suy ra $\begin{cases} t = 2 \Rightarrow x = -2 \\ t = -2 \Rightarrow x = -6 \end{cases}$.

Vậy phương trình có tập nghiệm $S = \{-2; -6\}$.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2025-2026)

Cho phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ và

$A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Điều kiện để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ là $\Delta' \geq 0$.

$$\text{Suy ra } (m+1)^2 - 2(m^2 + 4m + 3) \geq 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 6m + 5 \leq 0 \Rightarrow -5 \leq m \leq -1.$$

Theo hệ thức Viète ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -m - 1 \\ x_1x_2 = m^2 + 4m + 3 \end{cases}$

Theo đề bài ta có :

$$A = |x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)| = |m^2 + 4m + 3 + 2(m+1)| = |m^2 + 6m + 5|$$

$$\text{Vì } -5 \leq m \leq -1 \Rightarrow A = -m^2 - 6m - 5 = -(m+3)^2 + 4 \leq 4$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = -3$ (tm).

Vậy $m = -3$ là giá trị cần tìm để A đạt giá trị lớn nhất bằng 4.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Sóc Trăng năm 2025-2026)

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - 2x - m + 3 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $A = x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Phương trình có hai nghiệm khi và chỉ khi $\Delta' \geq 0$ hay $m \geq 2$.

Theo định lý Viète, ta có $x_1 + x_2 = 2$ và $x_1 x_2 = -m + 3$. Khi đó:

$$A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2^2 - 2(-m + 3) = 2m - 2 \geq 2 \cdot 2 - 2 = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi $m = 2$

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 2 khi $m = 2$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 - 3x + 4m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 12$.

Lời giải

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $\Delta = 9 - 4(4m + 1) = 5 - 16m > 0 \Rightarrow m < \frac{5}{16}$.

Theo định lý Viète thì $x_1 + x_2 = 3$ và $x_1 x_2 = 4m + 1$.

$$\text{Ta có: } |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 5 - 16m$$

$$\text{Mặt khác } 12^2 = |x_1 - x_2|^2 \cdot |x_1 + x_2|^2 = 9(5 - 16m) \Rightarrow m = \frac{-11}{16} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -\frac{11}{16}$ là giá trị cần tìm.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Tiền Giang năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 + x - 3 = 0$ có hai nghiệm là x_1 và x_2 . Không giải phương trình, hãy tính giá trị biểu thức $T = x_1^2(x_1^2 - 2x_2^2) - 7x_2 - 12$.

Lời giải

Nhận thấy $1 \cdot (-3) = -3 < 0$ nên phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 x_2 = -3 \end{cases}$

Vì x_1, x_2 là nghiệm của phương trình đã cho nên $x_1^2 + x_1 - 3 = 0$ (1); $x_2^2 + x_2 - 3 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $x_1^2 = 3 - x_1$; $x_2^2 = 3 - x_2$

Và

$$\begin{aligned} & x_1^2 - 2x_2^2 \\ &= 3 - x_1 - 2(3 - x_2) \\ &= 3 - x_1 + 2x_2 - 6 \\ &= -x_1 + 2x_2 - 3 \end{aligned}$$

Khi đó:

$$\begin{aligned} T &= x_1^2(x_1^2 - 2x_2^2) - 7x_2 - 12 \\ &= (3 - x_1)(-x_1 + 2x_2 - 3) - 7x_2 - 12 \\ &= 6x_2 - 2x_1x_2 + x_1^2 - 9 - 7x_2 - 12 \\ &= 6x_2 - 2x_1x_2 + 3 - x_1 - 9 - 7x_2 - 12 \\ &= -(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 18 \\ &= -(-1) - 2 \cdot (-3) - 18 = -11 \end{aligned}$$

Vậy $T = -11$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Tuyên Quang năm 2025-2026)

Cho phương trình $x^2 - (m+1)x + m - 4 = 0$ (1), với m là tham số.

(1) Giải phương trình (1) với $m = 1$.

(2) Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$(x_1^2 - mx_1 + m)(x_2^2 - mx_2 + m) = 2.$$

Lời giải

(1) Với $m = 1$ thì (1) trở thành

$$x^2 - (1+1)x + 1 - 4 = 0$$

hay

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Suy ra $x = -1$ hoặc $x = 3$.

Vậy với $m = 1$ thì phương trình có tập nghiệm $S = \{-1; 3\}$.

(2) Phương trình (1) là phương trình bậc hai có

$$\Delta = (m-1)^2 - 4(m-4) = m^2 - 6m + 17 = (m-3)^2 + 8 > 0.$$

Suy ra (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Ta có:

$$x^2 - (m+1)x + m - 4 = 0$$

$$x^2 - mx - x + m - 4$$

$$x^2 - mx + m = x + 4.$$

Do x_1, x_2 là nghiệm của (1) nên $\begin{cases} x_1^2 - mx_1 + m = x_1 + 4 \\ x_2^2 - mx_2 + m = x_2 + 4 \end{cases}$.

Thay lại yêu cầu bài toán ta được

$$(x_1 + 4)(x_2 + 4) = 2$$

$$x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 16 = 2$$

$$x_1x_2 + 4(x_1 + x_2) + 14 = 0 \quad (2)$$

Theo định lí Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 1 \\ x_1x_2 = m - 4 \end{cases}$.

Thay vào (2) ta được:

$$m - 4 + 4(m + 1) + 14 = 0 \text{ suy ra } m = \frac{-14}{5}.$$

$$\text{Vậy } m = \frac{-14}{5}.$$

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025-2026)

Giải phương trình $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} = 4$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{5}{9}$.

Xét các trường hợp

Nếu $x > 1$ thì $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} > \sqrt{3.1+1} + \sqrt{9.1-5} = 4$ hay VT > VP nên phương trình vô nghiệm.

Nếu $\frac{5}{9} \leq x < 1$ thì $\sqrt{3x+1} + \sqrt{9x-5} < \sqrt{3.1+1} + \sqrt{9.1-5} = 4$ hay VT < VP nên phương trình vô nghiệm.

Xét $x=1$ thấy thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=1$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025-2026)

Giải phương trình $x^2 + 2x - 3 = 2(x-1)\sqrt{x+2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $x \geq -2$.

$$x^2 + 2x - 3 = 2(x-1)\sqrt{x+2}$$

$$(x-1)(x+3) = 2(x-1)\sqrt{x+2}$$

$$(x-1)(x+3-2\sqrt{x+2}) = 0.$$

Trường hợp 1: $x=1$, thỏa mãn.

Trường hợp 2:

$$x+3 = 2\sqrt{x+2}$$

$$(x+3)^2 = 4(x+2)$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$(x+1)^2 = 0$$

$$x = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm $x \in \{-1; 1\}$.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025-2026)

Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$.

Lời giải

Ta có:

$$\sqrt{x^2 + 12} + 5 = 3x + \sqrt{x^2 + 5}$$

$$\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 5.$$

Nhận thấy $\sqrt{x^2 + 12} - \sqrt{x^2 + 5} > 0 \Rightarrow 3x - 5 > 0$ hay $x > \frac{5}{3}$.

Viết lại phương trình:

$$\sqrt{x^2 + 12} - 4 + 3 - \sqrt{x^2 + 5} = 3x - 6$$

$$\frac{x^2 - 4}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} + \frac{4 - x^2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} - 3(x - 2) = 0$$

$$(x - 2) \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 12} + 4} - \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} - 3 \right) = 0$$

Ta có: $4 + \sqrt{x^2 + 12} > 3 + \sqrt{x^2 + 5}$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} < \frac{1}{3 + \sqrt{x^2 + 5}}$$

$$\frac{x + 2}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} < \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} \quad \left(\text{vì } x > \frac{5}{3} \right)$$

$$\frac{x + 2}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} - \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} < 0$$

$$\frac{x + 2}{4 + \sqrt{x^2 + 12}} - \frac{x + 2}{3 + \sqrt{x^2 + 5}} - 3 < 0$$

Suy ra $x - 2 = 0$ hay $x = 2$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có duy nhất một nghiệm $x = 2$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025-2026)Giải phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$.**Lời giải**Điều kiện xác định : $x \geq \frac{7}{2}$.

$$\sqrt{x-3} - \sqrt{2x-7} = 2x-8$$

$$\frac{4-x}{\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-7}} = 2(x-4)$$

$$(4-x) \left(\frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-7}} + 2 \right) = 0$$

Suy ra $x = 4$, do $\frac{1}{\sqrt{x-3} + \sqrt{2x-7}} + 2 > 0$ Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 4$.**Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025-2026)**Giải phương trình: $2x^2 + (x+2)\sqrt{x+2} = 2-3x$ ($x \in \mathbb{R}$).**Lời giải**Điều kiện xác định: $x \geq -2$

$$2x^2 + (x+2)\sqrt{x+2} = 2-3x$$

$$(2x^2 + 3x - 2) + (x+2)\sqrt{x+2} = 0$$

$$(x+2)(2x-1) + (x+2)\sqrt{x+2} = 0$$

$$(x+2)(2x-1+\sqrt{x+2}) = 0$$

Trường hợp 1: $x = -2$ (thoả mãn)Trường hợp 2: $\sqrt{x+2} = 1-2x$ (điều kiện: $x \leq \frac{1}{2}$)

$$x+2 = (1-2x)^2$$

$$4x^2 - 5x - 1 = 0$$

Suy ra $x = \frac{5-\sqrt{41}}{8}$ (thoả mãn) hoặc $x = \frac{5+\sqrt{41}}{8}$ (không thoả mãn)Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \left\{ -2; \frac{5-\sqrt{41}}{8} \right\}$.

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025-2026)

Giải phương trình: $\sqrt{x+3} + \sqrt{2-x} + 5 = 4\sqrt{(x+3)(2-x)}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $-3 \leq x \leq 2$.

Đặt $t = \sqrt{x+3} + \sqrt{2-x}$, ($t \geq 0$).

Khi đó ta viết lại phương trình thành

$$t + 5 = 2(t^2 - 5) \text{ suy ra } t = 3.$$

Với $t = 3$ ta dễ dàng giải ra được: $x = 1$; $x = -2$.

Vậy phương trình có nghiệm $x = 1$; $x = -2$.

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025-2026)

Giải phương trình $3x^2 + 2x = 2\sqrt{x^2 + x} + 1 - x$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^2 + x \geq 0$, với điều kiện đó, phương trình viết lại $3(x^2 + x) - 2\sqrt{x^2 + x} - 1 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2 + x}$, với $t \geq 0$, phương trình trở thành: $3t^2 - 2t - 1 = 0$ suy ra $\begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases}$.

Với $t = 1$ thì $\sqrt{x^2 + x} = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$ suy ra $\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy phương trình có hai nghiệm $x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ và $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Câu 18. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025-2026)

Giải phương trình $(x+3)\sqrt{-x^2 - 8x + 48} = x - 24$.

Lời giải

Đặt $\begin{cases} u = x + 3 \\ v = \sqrt{-x^2 - 8x + 48} \end{cases}$ (điều kiện: $u \geq 0$)

$$\Rightarrow \begin{cases} u^2 = x^2 + 6x + 9 \\ v^2 = -x^2 - 8x + 48 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = -2x + 57 \\ 2uv = 2x - 48 \end{cases} \Rightarrow (u+v)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} u+v = 3 \\ u+v = -3 \end{cases}$$

TH1: $u + v = 3$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = -x \text{ suy ra } \begin{cases} x \leq 0 \\ 2x^2 + 8x - 48 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } x = -2 - 2\sqrt{7}$$

TH2: $u + v = -3$

$$\Rightarrow \sqrt{-x^2 - 8x + 48} = -x - 6 \text{ suy ra } \begin{cases} x \leq -6 \\ 2x^2 + 20x - 12 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } x = -5 - \sqrt{31}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{-2 - 2\sqrt{7}; -5 - \sqrt{31}\}$.

Câu 19. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025-2026)

Giải phương trình $8x^2 + 16x - 7 = (8x + 3)\sqrt{5x - 1}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{1}{5}$.

Ta có:

$$8x^2 + 16x - 7 = (8x + 3)\sqrt{5x - 1}$$

$$5x - 10 = (8x + 3)(\sqrt{5x - 1} - x - 1)$$

$$5(x - 2) = \frac{(8x + 3)[5x - 1 - (x + 1)^2]}{\sqrt{5x - 1} + x + 1}$$

$$(x - 2) \left[5 + \frac{(8x + 3)(x - 1)}{\sqrt{5x - 1} + x + 1} \right] = 0$$

$$\text{Với mọi } x \geq \frac{1}{5} \text{ ta có } 5 + \frac{(8x + 3)(x - 1)}{\sqrt{5x - 1} + x + 1} = \frac{8x^2 + 2 + 5\sqrt{5x - 1}}{\sqrt{5x - 1} + x + 1} > 0$$

Suy ra $x - 2 = 0$ hay $x = 2$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 20. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025-2026)

Giải phương trình $x^2 + 3x + 4 = 2(x + 1)\sqrt{x + 3}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq -3$

Ta có:

$$x^2 + 3x + 4 = 2(x + 1)\sqrt{x + 3}$$

$$(x+1)^2 - 2(x+1)\sqrt{x+3} + x+3 = 0$$

$$(x+1 - \sqrt{x+3})^2 = 0$$

$$x+1 = \sqrt{x+3}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} (x+1)^2 = x+3 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

Suy ra $x = 1$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

Câu 21. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025-2026)

Giải phương trình $\sqrt{x^3+1} + x^2 - 3x - 1 = 0$.

Lời giải

Điều kiện: $x^3 + 1 \geq 0$ hay $x \geq -1$.

Ta có:

$$\sqrt{x^3+1} + x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} + (x^2-x+1) - 2(x+1) = 0.$$

Đặt $u = \sqrt{x+1}$; $v = \sqrt{x^2-x+1}$; $u \geq 0$, $v > 0$.

Phương trình đã cho trở thành:

$$uv + v^2 - 2u^2 = 0$$

$$(u-v)(2u+v) = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} u-v=0 \\ 2u+v=0 \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} u=v \\ 2u=-v \end{cases}$$

Với $u = v$ ta được $\sqrt{x^2-x+1} = \sqrt{x+1}$ suy ra $x^2 - 2x = 0$ suy ra $\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Với $2u = -v$ ta được $2\sqrt{x+1} = -\sqrt{x^2-x+1}$ (vô nghiệm).

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = 0$ và $x = 2$.

Câu 22. (Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2025-2026)

Tính tổng bình phương của các nghiệm của phương trình sau:

$$x^2 + x - 1 = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

Lời giải

Ta có : $x^2 + x - 1 = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}$

Suy ra $(x^2 - 2x + 2) + 3(x + 2) - 9 = (x + 2)\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$

Đặt $a = \sqrt{x^2 - 2x + 2} \geq 1, b = x + 2$, Khi đó phương trình trở thành:

$$a^2 + 3b - 9 = ab \Rightarrow (a - 3)(a + 3 - b) = 0$$

Trường hợp 1: $a - 3 = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} = 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 7 = 0$ có $\Delta' = 8 > 0 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4$

Trường hợp 2: $a + 3 - b = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} = x + 2 - 3 \Rightarrow \sqrt{x^2 - 2x + 2} = x - 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 1 = 0 \end{cases} \text{ (không thỏa mãn)}$$

Vậy tổng bình phương các nghiệm là 4.

Câu 23. (Trường chuyên tỉnh Sơn La năm 2025-2026)

Giải phương trình: $x - \sqrt{x - 2} = 4.$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq 4$

Ta có: $x - 4 = \sqrt{x - 2}.$

Ta bình phương hai vế ta có:

$$(x - 4)^2 = x - 2$$

$$x^2 - 9x + 18 = 0$$

Suy ra: $x = 3$ hoặc $x = 6$

Đối chiếu với điều kiện thì $x = 6$ là nghiệm duy nhất thỏa mãn

Vậy $x = 6$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Câu 24. (Trường chuyên tỉnh Tây Ninh năm 2025-2026)

Giải phương trình $x - 3\sqrt{x-3} - 1 = 0$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq 3$.

Đặt $t = \sqrt{x-3}, t \geq 0$ phương trình đã cho trở thành

$$t^2 - 3t + 2 = 0, \text{ suy ra } \begin{cases} t = 1 \\ t = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Với $t=1$ thì tìm được $x=4$ (thỏa mãn)

Với $t=2$ thì tìm được $x=7$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có nghiệm $x=4, x=7$.