

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2x + 4 = 10y & (1) \\ x^2 y^2 + 4xy + 16 = 28y^2 & (2) \end{cases}.$$

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3xy + x - y \\ 3\sqrt{x-1} = y + 4 \end{cases}.$$

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + (x-1)(y+1) = 2y^2 - 1 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 & (2) \end{cases}.$$

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x = \frac{x^2 + 1}{y^2} \\ 2y = \frac{y^2 + 1}{x^2} \end{cases}.$$

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ y^2 + yz + z^2 = 19 & (2) \\ z^2 + zx + x^2 = 13 & (3) \end{cases}.$$

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = x^2 + y \end{cases}.$$

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy + y\sqrt{y} - x\sqrt{x-1} - \sqrt{xy-y} = 0 \\ x^2 - 4xy + 2x + 4y = \sqrt{x-2y-1} + 3 \end{cases}.$$

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y = 1 \end{cases}.$$

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 35 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y = 0 \end{cases}.$$

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 - xy + 10y) = y(-x^2 + 9x + 10\sqrt{y}) \\ 2x^3 - 16y + 6\sqrt{y} - 1 = 4xy(3 - 2x)\sqrt{2 - 2x} \end{cases}.$$

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 5xy - 5x - 3y = 4 & (1) \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{2x^2 + 10x - 11} = 2x + y & (2) \end{cases}.$$

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y(y-x) = 2x^2 + 3x + 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y+7} = 7y - 3x^2 + 1 & (2) \end{cases}.$$

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - y + 4\sqrt{y} = 8 \end{cases}.$$

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + 2xy - 3 = \sqrt{x+y+1} \end{cases}.$$

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases}.$$

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 11x^2 - 12x + 1 \\ xy + x = x^2 - 1 \end{cases}.$$

Câu 17. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ 1 + 12(x + y) = 7y^3 + 6xy(y + 3 - xy) \end{cases}.$$

Câu 18. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y + \sqrt{(2x-1)(2-y)} = 5 \\ \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{y^2 - x^2 - 3y + 19} \end{cases}.$$

Câu 19. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y & (1) \\ 4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)y & (2) \end{cases}.$$

Câu 20. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+1) = (y-1)(y-2) \\ 4x^2 - 3y + 6 = 4x\sqrt{4-y} + 2\sqrt{x-y} \end{cases}.$$

Câu 21. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+2y-3) = y \\ 2y(x+2y-2) = 2x+5y \end{cases}.$$

Câu 22. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + x^2 - xy^2 = 2\sqrt{(x-y^2)^3} \\ 56x^2 + 20(x^2 - y^2) = \sqrt[3]{4x(8x+1)} - 2 \end{cases}.$$

Câu 23. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases}.$$

Câu 24. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^3 - x^2y + 2x = -3y^2 + 4xy^2 - 3y \\ x^2 - y^2 = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Câu 25. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}.$$

Câu 26. (Trường chuyên Nam Định năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(x - y) + (y - 1)^2 = 0 \\ 4x^3 - 9x^2 + 7x + 3y^2 - 10y + 5 = 0 \end{cases}.$$

Câu 27. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 - 9y = 18x - 5y^3 \\ x^2 + 4 = 5(y^2 - 1) \end{cases}.$$

Câu 28. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{2y+3}{1-y} = 4 \end{cases}.$$

Câu 29. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}.$$

Câu 30. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \end{cases}.$$

Câu 31. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy^2 + x^2 - y^3 - yx + y^2 + x = 0 \\ \sqrt{8x - y^2} = 3y - 2x - 6 \end{cases}.$$

Câu 32. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y = \frac{4}{x^2} \\ 3x + y = \frac{4}{y^2} \end{cases}.$$

Câu 33. (Trường chuyên Sơn La năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + \frac{2y-1}{y-2} = 5 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = \frac{13}{6} \end{cases}.$$

Câu 34. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 + y = 6 \\ (y-1)^2 + x^2 + x = 11 \end{cases}.$$

Câu 35. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + y = xy + 2 \\ 2x + \sqrt{3y-8} + \sqrt{y+1} = 5 \end{cases}.$$

Câu 36. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 = 2(x+y) \\ xy(x^2 + y^2 - 2) - x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}.$$

Câu 37. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(2x-3y) = -4 \\ y^3 + 16 = 6xy^2 \end{cases}.$$

Câu 38. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 8y^2 = 12 \\ x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \end{cases}.$$

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + 2x + 4 = 10y & (1) \\ x^2y^2 + 4xy + 16 = 28y^2 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình (1) ta có $xy + 4 = 10y - 2x$ nên $(xy + 4)^2 = (10y - 2x)^2$.

Kết hợp với phương trình (2) ta được

$$(xy + 4)^2 - (x^2y^2 + 4xy + 16) = (10y - 2x)^2 - 28y^2,$$

Hay $x^2 - 11xy + 18y^2 = 0$, từ đây có $(x - 2y)(x - 9y) = 0$. Ta xét hai trường hợp

Nếu $x - 2y = 0$ thì $x = 2y$, thay trở lại (1) được $y^2 - 3y + 2 = 0$. Giải tìm được $(x, y) \in \{(2; 1); (4; 2)\}$.

Nếu $x - 9y = 0$ thì $x = 9y$, thay trở lại (1) được $9y^2 + 8y + 4 = 0$, phương trình này có

$\Delta' = 4^2 - 9 \cdot 4 < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x, y) \in \{(2; 1); (4; 2)\}$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3xy + x - y \\ 3\sqrt{x-1} = y + 4 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

Phương trình thứ nhất cho ta

$$(x - y)(x - 2y) = x - y \text{ hay } (x - y)(x - 2y - 1) = 0.$$

Trường hợp 1: $x = y$. Thay vào phương trình thứ hai ta có

$$3\sqrt{x-1} = x + 4$$

$$9(x-1) = (x+4)^2$$

$x^2 - x + 25 = 0$. Phương trình này vô nghiệm.

Trường hợp 2: $x = 2y + 1$. Thay vào phương trình thứ hai ta có

$$3\sqrt{2y} = y + 4$$

$$18y = (y + 4)^2$$

$$y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$(y - 2)(y - 8) = 0$$

$$\text{Suy ra } y \in \{2; 8\}$$

Với $y = 2$ thì $x = 5$. Với $y = 8$ thì $x = 17$. Thử lại ta đều thấy thỏa mãn.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(5; 2); (17; 8)\}$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + (x-1)(y+1) = 2y^2 - 1 & (1) \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Xét phương trình (1):

$$x^2 + xy + (x - y) - 1 = 2y^2 - 1$$

$$x^2 + xy - 2y^2 + x - y = 0$$

$$(x - y)(x + 2y) + (x - y) = 0$$

$$(x - y)(x + 2y + 1) = 0$$

Suy ra: $x = y$ hoặc $x = -2y - 1$.

Trường hợp 1: $x = y$ thay vào phương trình (2) ta có $x^2 + x^2 - 10 = 0$.

$$\text{Suy ra } x^2 = 5 \text{ nên } \begin{cases} x = \sqrt{5} \Rightarrow y = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Trường hợp 2: $x = -2y - 1$ thay vào phương trình (2) ta có $(-2y - 1)^2 + y^2 - 10 = 0$,

$$\text{Hay } 5y^2 + 4y - 9 = 0, \text{ suy ra } \begin{cases} y = \frac{9}{5} \Rightarrow x = \frac{13}{5} \\ y = 1 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \left\{ (\sqrt{5}; \sqrt{5}); (-\sqrt{5}; -\sqrt{5}); (-3; 1); \left(\frac{13}{5}; \frac{9}{5}\right) \right\}$.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x = \frac{x^2 + 1}{y^2} \\ 2y = \frac{y^2 + 1}{x^2} \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x, y \neq 0$.

Viết lại hệ phương trình thành
$$\begin{cases} 2xy^2 = x^2 + 1 \\ 2x^2y = y^2 + 1 \end{cases}.$$

Trừ vế với vế ta có: $(x - y)(2xy + x + y) = 0$ suy ra
$$\begin{cases} x = y \\ 2xy + x + y = 0 \end{cases}.$$

Trường hợp 1: $2xy + x + y = 0$ vô nghiệm vì

$$\begin{cases} 2x = \frac{x^2 + 1}{y^2} > 0 \\ 2y = \frac{y^2 + 1}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0, y > 0 \Rightarrow 2xy + x + y > 0.$$

TH2: $x = y$, thế vào một phương trình trong hệ, ta có:

$$2x^3 - x^2 - 1 = 0 \text{ hay } (x - 1)(2x^2 + x + 1) = 0 \text{ suy ra } x = 1 \text{ (do } 2x^2 + x + 1 > 0 \text{)}. \text{ Suy ra } y = 1.$$

Vậy hệ có duy nhất một nghiệm là $(1; 1)$.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 & (1) \\ y^2 + yz + z^2 = 19 & (2) \\ z^2 + zx + x^2 = 13 & (3) \end{cases}.$$

Lời giải

Lấy phương trình (1) trừ (2) và lấy (3) trừ (2) thì ta được

$$\begin{cases} (x - z)(x + y + z) = -12 \\ (x - y)(x + y + z) = -6 \end{cases} \text{ suy ra } x - z = 2x - 2y \text{ hay } x + z = 2y.$$

Thay $2y = x + z$ vào phương trình (1) và (2) ta có

$$\begin{cases} 4x^2 + 2x(x+z) + (x+z)^2 = 28 \\ (x+z)^2 + 2z(x+z) + 4z^2 = 76 \\ x^2 + xz + z^2 = 13 \end{cases}$$

Từ đây ta có được $\begin{cases} 2x^2 + xz = 5 & (*) \\ 2z^2 + xz = 21 \end{cases}$ suy ra $z^2 = x^2 + 8$.

Từ (*) ta có $z = \frac{5 - 2x^2}{x}$

Suy ra $x^2 + 8 = z^2 = \left(\frac{5 - 2x^2}{x}\right)^2$

$$3x^4 - 28x^2 + 25 = 0$$

$$(x^2 - 1)(3x^2 - 25) = 0$$

Từ đây ta tìm được $(x, y, z) \in \left\{ (1, 2, 3); (-1, -2, -3); \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-7}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{-5}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{\sqrt{3}}\right) \right\}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y, z) \in \left\{ (1, 2, 3); (-1, -2, -3); \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-7}{\sqrt{3}}\right); \left(\frac{-5}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{7}{\sqrt{3}}\right) \right\}$.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình với $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} \\ y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = x^2 + y \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x > 0, y > 0$

Từ phương trình thứ nhất ta có:

$$x - y + \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right) = 0$$

$$x - y + \frac{x - y}{xy} = 0$$

$$(x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0$$

Vì $x, y > 0$ nên $1+\frac{1}{xy} > 0$

Do đó $x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình thứ hai ta được

$$x\sqrt{x}+x\sqrt{x}=x^2+x$$

$$x^2-2x\sqrt{x}+x=0$$

$$x(\sqrt{x}-1)^2=0$$

Suy ra $\begin{cases} x=0(l) \\ x=1 \Rightarrow y=1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y)=(1; 1)$.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy+y\sqrt{y}-x\sqrt{x-1}-\sqrt{xy-y}=0 \\ x^2-4xy+2x+4y=\sqrt{x-2y-1}+3 \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện: $x \geq 1, y \geq 0, x \geq 2y+1$. Từ phương trình thức nhất ta có:

$$xy+y\sqrt{y}-x\sqrt{x-1}-\sqrt{xy-y}=0$$

$$(x+\sqrt{y})(y-\sqrt{x-1})=0.$$

Từ điều kiện ta có $x+\sqrt{y} > 0$ nên phải có $y=\sqrt{x-1}$ hay $y^2=x-1$.

Thay $y^2=x-1$ vào phương trình thứ hai và thu gọn ta được:

$$y^4-4y^3+4y^2=\sqrt{y^2-2y} \text{ hay } \sqrt{y(y-2)}\left[\sqrt{[y(y-2)]^3}-1\right]=0.$$

Từ đó ta giải được $y \in \{0; 2; 1+\sqrt{2}\}$, và suy ra x .

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(1; 0), (5; 2), (4+2\sqrt{2}; 1+\sqrt{2})\}$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y = 1 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} x + y = -1 \\ x^2 + y^2 + 4x + 4y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + (-1 - x)^2 + 4x + 4(-1 - x) = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + x - 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(1; -2); (-2; 1)\}$.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 35 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} x^3 - y^3 - 35 = 0 \\ 2x^2 + 3y^2 - 4x + 9y = 0 \end{cases} \quad \text{suy ra} \quad \begin{cases} x^3 - y^3 - 35 = 0 \quad (1) \\ 6x^2 + 9y^2 - 12x + 27y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Trừ vế theo vế (1) và (2), ta được

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - (y^3 + 9y^2 + 27y + 27) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = y^3 + 9y^2 + 27y + 27$$

$$(x - 2)^3 = (y + 3)^3$$

$$x - 2 = y + 3$$

Suy ra $y = x - 5$, thay vào (2) ta được

$$2x^2 + 3(x - 5)^2 - 4x + 9(x - 5) = 0$$

$$5x^2 - 25x + 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Với } x = 3 \Rightarrow y = -2$$

$$\text{Với } x = 2 \Rightarrow y = -3$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(x; y)$ là $(3; -2)$ và $(2; -3)$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x^2 - xy + 10y) = y(-x^2 + 9x + 10\sqrt{y}) \\ 2x^3 - 16y + 6\sqrt{y} - 1 = 4xy(3 - 2x)\sqrt{2 - 2x} \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \leq 1, y \geq 0$.

Ta viết lại phương trình thứ nhất của hệ phương trình thành

$$x^3 + xy = 10y\sqrt{y} \text{ hay } (x - 2\sqrt{y})(x^2 + 2x\sqrt{y} + 5y) = 0.$$

Nếu $x^2 + 2x\sqrt{y} + 5y = 0$ thì $(x + \sqrt{y})^2 + 4y = 0$ ta được $x = y = 0$ (không thỏa)

Xét trường hợp chính $x = 2\sqrt{y}$, thay vào phương trình thứ hai của hệ ban đầu ta được

$$2x^3 - 4x^2 + 3x - 1 = x^3(3 - 2x)\sqrt{2 - 2x}.$$

Hiển nhiên $x = 0$ không phải nghiệm phương trình.

Xét $x \neq 0$ chia cả hai vế cho x^3 ta được

$$2 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{x^3} = (3 - 2x)\sqrt{2 - 2x}$$

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{x}\right) = (\sqrt{2 - 2x})^3 + \sqrt{2 - 2x}.$$

Nếu $1 - \frac{1}{x} < \sqrt{2 - 2x}$ thì vế trái nhỏ hơn vế phải.

Nếu $1 - \frac{1}{x} > \sqrt{2 - 2x}$ thì vế trái lớn hơn vế phải.

Vậy ta có $1 - \frac{1}{x} = \sqrt{2 - 2x}$.

Từ điều kiện xác định và phương trình $x = 2\sqrt{y}$ ta có $0 < x \leq 1$. Do đó $1 - \frac{1}{x} \leq 0 \leq \sqrt{2 - 2x}$.

Dấu "=" xảy ra khi $x = 1; y = \frac{1}{4}$ (thỏa mãn).

Vậy $(x; y) = \left(1; \frac{1}{4}\right)$ là nghiệm duy nhất của hệ phương trình.

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 6x^2 + y^2 + 5xy - 5x - 3y = 4 & (1) \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{2x^2 + 10x - 11} = 2x + y & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq \frac{-5 + \sqrt{47}}{2}, y \in \mathbb{R}$.

Phương trình (1) viết lại thành:

$$(2x + y + 1)(3x + y - 4) = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} 2x + y = -1 \\ 3x + y = 4 \end{cases}.$$

Với $2x + y = -1$. Phương trình (2) trở thành:

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x^2 + 10x - 11} = -1$$

Ta thấy vế trái lớn hơn 0 còn vế phải nhỏ hơn 0 nên phương trình này vô nghiệm.

$\Rightarrow$ Hệ phương trình vô nghiệm.

Với $3x + y = 4$ hay $2x + y = 4 - x$. Phương trình (2) trở thành:

$$\sqrt{5x-1} + \sqrt{2x^2 + 10x - 11} = 4 - x$$

$$(\sqrt{5x-1} - 2) + (\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + x - 2) = 0$$

$$\frac{5(x-1)}{\sqrt{5x-1} + 2} + \frac{(x-1)(x+15)}{\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + 2 - x} = 0$$

$$(x-1) \left(\frac{5}{\sqrt{5x-1} + 2} + \frac{x+15}{\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + 2 - x} \right) = 0$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x = 1 \\ \frac{5}{\sqrt{5x-1} + 2} + \frac{x+15}{\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + 2 - x} = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Xét phương trình (*)

Ta có:

$$\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + 2 - x = \frac{2x^2 + 10x - 11 - x^2}{\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + x} + 2 = \frac{x^2 + 10x - 11}{\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + x} + 2$$

Nếu $x \leq 1 \Rightarrow \sqrt{2x^2 + 10x - 11} + 2 - x = \frac{(x-1)(x+11)}{\sqrt{2x^2 + 10x - 11} + x} + 2 > 0$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-1}+2} + \frac{x+15}{\sqrt{2x^2+10x-11}+2-x} > 0 \Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm}$$

Tóm lại thì trong cả hai trường hợp (*) vô nghiệm.

Với $x=1$ thì $y=1$

Thử lại $(x,y)=(1,1)$ thỏa mãn hệ

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x,y)=(1,1)$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} y(y-x) = 2x^2 + 3x + 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y+7} = 7y - 3x^2 + 1 & (2) \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x+y \geq 0 \\ x-y+7 \geq 0 \end{cases}$$

Từ phương trình (1) của hệ ta có:

$$2x^2 + xy - y^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(x+y)(2x-y) + (x+y) + (2x-y) + 1 = 0$$

$$(x+y+1)(2x-y+1) = 0$$

$$y = 2x+1 \text{ (vì } x+y \geq 0 \text{ nên } x+y+1 > 0).$$

Thay vào phương trình (2), ta được:

$$\sqrt{x+2x+1} - \sqrt{x-2x-1+7} = 14x+7-3x^2+1$$

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0 \text{ (điều kiện: } -\frac{1}{3} \leq x \leq 5)$$

$$(\sqrt{3x+1}-4) - (\sqrt{6-x}-1) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$$

$$\frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4} - \frac{6-x-1}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) = 0$$

$$(x-5) \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 \right) = 0$$

Vì $x \geq -\frac{1}{3}$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0$

Do đó $x = 5 \Rightarrow y = 11$ (thỏa mãn).

Vậy $(x, y) = (5; 11)$.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{y^2+4} + \sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - y + 4\sqrt{y} = 8 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x \geq -1 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Ta viết lại hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{y} - 2 = 2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{y^2+4} & (1) \\ 2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - (\sqrt{y} - 2)^2 = 4 & (2) \end{cases}$$

Thế (1) vào (2) ta được:

$$2\sqrt{xy^2+4x+y^2+4} - (2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{y^2+4})^2 = 4$$

$$2\sqrt{(x+1)(y^2+4)} - [4 - 4\sqrt{x+1} - 4\sqrt{y^2+4} + 2\sqrt{(x+1)(y^2+4)} + (x+1) + (y^2+4)] = 4$$

$$(x+1) - 4\sqrt{x+1} + 4 + (y^2+4) - 4\sqrt{y^2+4} + 4 = 0$$

$$(\sqrt{x+1} - 2)^2 + (\sqrt{y^2+4} - 2)^2 = 0$$

Suy ra
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} - 2 = 0 \\ \sqrt{y^2+4} - 2 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (3; 0)$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + y^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + 2xy - 3 = \sqrt{x + y + 1} \end{cases}.$$

Lời giải

Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ, ta được

$$y(x + y) - 2(x + y) = 0$$

$$(x + y)(y - 2) = 0$$

$$x = -y \text{ hoặc } y = 2.$$

Nếu $x = -y$ thay vào phương trình thứ hai ta được

$$-y^2 - 3 = 1 \text{ hay } y^2 + 4 = 0.$$

Phương trình trên vô nghiệm vì $y^2 + 4 > 0$ với mọi y .

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases}.$$

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 3x + xy + y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + 4y = 1 \\ 6x + 2xy + 2y = 6 \end{cases}.$$

Cộng vế với vế hai phương trình ta được

$$(x + y)^2 + 6(x + y) = 7,$$

Hay

$$(x + y - 1)(x + y + 7) = 0$$

Với
$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Với
$$\begin{cases} x + y = -7 \\ x^2 + y^2 + 4y = 1 \end{cases} \text{ (vô nghiệm).}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm $(1; 0); (2; -1)$.

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 11x^2 - 12x + 1 \\ xy + x = x^2 - 1 \end{cases}.$$

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} x^2(y+1)(x+y+1) = 11x^2 - 12x + 1 \\ xy + x = x^2 - 1 \end{cases}$$

Suy ra
$$\begin{cases} (xy+x)(x^2+xy+x) = 11x^2 - 12x + 1 & (1) \\ xy = x^2 - x - 1 & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) ta được:

$$(x^2 - 1)(2x^2 - 1) = (x - 1)(11x - 1)$$

$$(x - 1)[(x + 1)(2x^2 - 1) - 11x + 1] = 0$$

$$(x - 1)(2x^3 + 2x^2 - 12x) = 0$$

$$2x(x - 1)(x^2 + x - 6) = 0$$

$$x(x - 1)(x - 2)(x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Với $x = 0$ thay vào phương trình (2) ta được $0 = -1$ (vô lý);

Với $x = -3$ thay vào phương trình (2) ta được $-3y = 11 \Rightarrow y = -\frac{11}{3}$;

Với $x = 1$ thay vào phương trình (2) ta được $y = -1$;

Với $x = 2$ thay vào phương trình (2) ta được $2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$.

Vậy hệ phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt

$$(x; y) \in \left\{ \left(-3; -\frac{11}{3} \right); (1; -1); \left(2; \frac{1}{2} \right) \right\}.$$

Câu 17. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 \\ 1 + 12(x + y) = 7y^3 + 6xy(y + 3 - xy) \end{cases}$$

Lời giải

Thay $3 = x + y + xy$ và $4 = (x+1)(y+1)$ vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$7y^3 + 6xy(y + 3 - xy) = 7y^3 + 6xy(y + x + y + xy - xy) = 7y^3 + 6x^2y + 12xy^2$$

Nên ta có:

$$1 + 12(x + y) = 7y^3 + 6x^2y + 12xy^2$$

$$x^3 + y^3 + 1 + 3(x+1)(y+1)(x+y) = (2x+y)^3$$

$$(x+y+1)^2 = (2x+y)^3$$

Suy ra: $x=1, y=1$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x=y=1$.

Câu 18. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x + 2y + \sqrt{(2x-1)(2-y)} = 5 \\ \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{y^2 - x^2 - 3y + 19} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq 2 \geq y; y^2 - x^2 - 3y + 19 \geq 0$.

Ta có:
$$\begin{cases} 2x + 2y + \sqrt{(2x-1)(2-y)} = 5 & (1) \\ \sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{y^2 - x^2 - 3y + 19} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) ta có: $(2x-1) + \sqrt{(2x-1)(2-y)} - 2(2-y) = 0$.

Suy ra $(\sqrt{2x-1} - \sqrt{2-y})(\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2-y}) = 0$.

Ta thấy $\sqrt{2x-1} + 2\sqrt{2-y} > 0$. Khi đó $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2-y}$ suy ra $y = 3 - 2x$.

Thay $y = 3 - 2x$ vào (2) ta có:

$$\sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{(3-2x)^2 - x^2 - 3(3-2x) + 19}$$

$$\sqrt{x^2 + x - 6} + 3\sqrt{x-1} = \sqrt{3x^2 - 6x + 19}$$

Ta bình phương hai vế của phương trình

$$x^2 + 10x - 15 + 6\sqrt{(x^2 + x - 6)(x - 1)} = 3x^2 - 6x + 19$$

$$3\sqrt{(x - 2)(x + 3)(x - 1)} = x^2 - 8x + 17$$

$$3\sqrt{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)} = x^2 + 2x - 3 - 10(x - 2)$$

$$(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - 5\sqrt{x - 2})(\sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2\sqrt{x - 2}) = 0$$

$$\text{Ta thấy } \sqrt{x^2 + 2x - 3} + 2\sqrt{x - 2} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 2x - 3} = 5\sqrt{x - 2}.$$

Ta bình phương hai vế của phương trình trên

$$x^2 + 2x - 3 = 25(x - 2)$$

$$x^2 - 23x + 47 = 0$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{2}.$$

$$\text{Như vậy } x = \frac{23 + \sqrt{341}}{2}, y = -20 - \sqrt{341}. \text{ Hoặc } x = \frac{23 - \sqrt{341}}{2}, y = -20 + \sqrt{341}.$$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta thử lại thấy 2 bộ trên thoả mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là

$$x = \frac{23 + \sqrt{341}}{2}, y = -20 - \sqrt{341} \text{ hoặc } x = \frac{23 - \sqrt{341}}{2}, y = -20 + \sqrt{341}.$$

Câu 19. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025-2026)

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y & (1) \\ 4x + 6\sqrt{x - 1} + 7 = (4x - 1)y & (2) \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \geq 1$.

Viết lại phương trình (1) ta có:

$$(x + 1)^3 + (x + 1) = y^3 + y$$

$$(x + 1 - y)[(x + 1)^2 - y(x + 1) + y^2 + 1] = 0.$$

Do $(x + 1)^2 - y(x + 1) + y^2 + 1 > 0$ nên $x + 1 - y = 0$ hay $y = x + 1$.

Thay $y = x + 1$ vào (2) ta được:

$$4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = (4x-1)(x+1)$$

$$4x + 6\sqrt{x-1} + 7 = 4x^2 + 3x - 1$$

$$6\sqrt{x-1} = 4x^2 - x - 8$$

$$6\sqrt{x-1} - 6 = 4x^2 - x - 14$$

$$\frac{6(x-2)}{\sqrt{x-1}+1} = (x-2)(4x+7)$$

$$(x-2)\left(4x+7 - \frac{6}{\sqrt{x-1}+1}\right) = 0$$

Mà $x \geq 1$ nên $4x+7 \geq 11 > 6 > \frac{6}{\sqrt{x-1}+1}$ nên $4x+7 - \frac{6}{\sqrt{x-1}+1} > 0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow y=3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, 3)$.

Câu 20. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x(x+1) = (y-1)(y-2) \\ 4x^2 - 3y + 6 = 4x\sqrt{4-y} + 2\sqrt{x-y} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $y \leq 4$ và $x - y \geq 0$.

Viết lại phương trình thứ nhất của hệ: $(x+y-1)(x-y+2) = 0$.

Trường hợp 1: $y = 1 - x$, thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho ta được

$$4x^2 + 3x + 3 = 4x\sqrt{x+3} + 2\sqrt{2x-1}$$

$$(2x - \sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{2x-1} - 1)^2 = 0$$

$$2x - \sqrt{x+3} = \sqrt{2x-1} - 1 = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 0.$$

Trường hợp 2. $y = x + 2$ nên $x - y = -2 < 0$, vô lý do mâu thuẫn với điều kiện xác định.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 0)$.

Câu 21. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+2y-3) = y \\ 2y(x+2y-2) = 2x+5y \end{cases}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} x(x+2y-3) = y \\ 2y(x+2y-2) = 2x+5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2y)-3x = y \\ 2y(x+2y)-4y = 2x+5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+2y) = y+3x \\ 2y(x+2y) = 2x+9y \end{cases} \quad (1)$$

Cộng vế với vế hai phương trình trên ta được:

$$x(x+2y) + 2y(x+2y) = 5x + 10y$$

$$(x+2y)^2 = 5(x+2y)$$

$$(x+2y)(x+2y-5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y = 0 \\ x+2y = 5 \end{cases}$$

TH1: $x+2y=0$. Thay vào (1) ta được:
$$\begin{cases} 3x+y=0 \\ 2x+9y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

TH2: $x+2y=5$. Thay vào (1) ta được:
$$\begin{cases} 5x=y+3x \\ 10y=2x+9y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ x+2y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) \in \{(0, 0); (1, 2)\}$.**Câu 22. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025-2026)**

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + x^2 - xy^2 = 2\sqrt{(x-y^2)^3} \\ 56x^2 + 20(x^2 - y^2) = \sqrt[3]{4x(8x+1)} - 2 \end{cases}$$

Lời giải

$$\begin{cases} x^3 + x^2 - xy^2 = 2\sqrt{(x-y^2)^3} & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 56x^2 + 20(x^2 - y^2) = \sqrt[3]{4x(8x+1)} - 2 & (2) \end{cases}$$

Điều kiện xác định: $x \geq y^2 \geq 0$.

Từ phương trình (1) ta có: $x^3 + x(x-y)^2 - 2\sqrt{(x-y^2)^3} = 0$.

Đặt $\sqrt{x-y^2} = u$ ($u \geq 0$), phương trình (1) thành $x^3 + xu^2 - 2u^3 = 0$ suy ra $x = u$.

Do đó $y^2 = x - x^2$ (*). Thay vào (2) ta được :

$$96x^2 - 20x + 2 = \sqrt[3]{32x^2 + 4x} = \sqrt[3]{1.1.(32x^2 + 4x)} \leq \frac{32x^2 + 4x + 2}{3}$$

Suy ra $3(96x^3 - 20x + 2) \leq 32x^3 + 4x + 2$ hay $(16x - 2)^2 \leq 0$. Suy ra $x = \frac{1}{8}$.

Thay vào (*) ta được $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{8}$ (thỏa mãn)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{1}{8}; \frac{\sqrt{7}}{8} \right); \left(\frac{1}{8}; -\frac{\sqrt{7}}{8} \right) \right\}$.

Câu 23. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq 0, y \neq 0$.

Ta có:

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(y + \frac{1}{y}\right) = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy + \frac{1}{xy} + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} = 5 \\ \left(xy + \frac{1}{xy}\right)\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{25}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(xy + \frac{1}{xy}\right) = \frac{5}{2} \\ \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2y^2 - 5xy + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy \end{cases}$$

Trường hợp 1:

$$\begin{cases} xy = 2 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ (x+y)^2 = 5 + 2 \cdot 2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x+y = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy = 2 \\ x+y = -3 \end{cases}$$

Suy ra $(x; y) \in \{(1; 2); (2; 1); (-1; -2); (-2; -1)\}$

Trường hợp 2:

$$\begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \frac{1}{2} \\ (x+y)^2 = \frac{5}{4} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2 \\ x+y = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} xy = 2 \\ x+y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } (x; y) \in \left\{ \left(1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right); \left(-1; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -1\right) \right\}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

$$(x; y) \in \left\{ (1; 2); (2; 1); (-1; -2); (-2; -1); \left(1; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 1\right); \left(-1; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -1\right) \right\}.$$

Câu 24. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025-2026)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 2x^3 - x^2y + 2x = -3y^2 + 4xy^2 - 3y \\ x^2 - y^2 = \frac{4}{5} \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định : $x, y \in \mathbb{R}$.

Với điều kiện đó, viết lại phương trình thứ nhất của hệ đã cho, ta có:

$$(2x^3 - 4x^2y + 2xy^2 + 2x) + (3y^3 - 6y^2 + 3x^2y + 3y) = 0$$

$$2x(x^2 - 2xy + y^2 + 1) + 3y(y^2 - 2xy + x^2 + 1) = 0$$

$$(2x + 3y)[(x - y)^2 + 1] = 0$$

$$2x + 3y = 0 \text{ (do } (x - y)^2 + 1 > 0 \text{)}$$

$x = -\frac{3}{2}y$, thay vào phương trình thứ hai của hệ đã cho, ta được:

$$\frac{9}{4}y^2 - y^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{5}{4}y^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{4}{5} \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \\ y = -\frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) = \left(-\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right)$ và $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

Câu 25. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 \\ x^2 - y^2 = 3 \end{cases}.$$

Lời giải

Ta có:
$$\begin{cases} 2x^2 + xy = y^2 - 3y + 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = 3 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) có:

$$2x^2 + xy - y^2 + 3y - 2 = 0$$

$$(2x - y + 2)(x + y - 1) = 0$$

Trường hợp 1 : $2x - y + 2 = 0$ hay $y = 2x + 2$

Thay vào (2) ta được: $x^2 - (2x + 2)^2 = 3$ hay $-3x^2 - 8x - 7 = 0$

Dễ thấy phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2 : $x + y - 1 = 0$ hay $y = 1 - x$

Thay vào (2) ta được:

$$x^2 - (1 - x)^2 = 3$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x, y) = (2, -1)$.

Câu 26. (Trường chuyên Nam Định năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(x - y) + (y - 1)^2 = 0 \\ 4x^3 - 9x^2 + 7x + 3y^2 - 10y + 5 = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$y^2 - (x^2 + 2)y + x^3 + 1 = 0 \text{ suy ra } \begin{cases} y = x + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases}$$

Nếu $y = x^2 - x + 1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được

$$4x^3 - 9x^2 + 7x + 3(x^2 - x + 1)^2 - 10(x^2 - x + 1) + 5 = 0$$

$$3x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 11x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1)(3x^2-5x+1)=0$$

$$\text{Suy ra } x \in \left\{-2; 1; \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6}\right\}$$

Tìm được các nghiệm

$$(x; y) \in \left\{(-2; 7); (1; 1); \left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}; \frac{11+\sqrt{13}}{9}\right); \left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}; \frac{11-\sqrt{13}}{9}\right)\right\}$$

Nếu $y = x+1$, thay vào phương trình thứ hai của hệ thu được

$$4x^3 - 9x^2 + 7x + 3(x+1)^2 - 10(x+1) + 7x + 5 = 0$$

$$4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 3$$

$$(2x-1)^3 = 3$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{1 + \sqrt[3]{3}}{2}$$

$$\text{Tìm được nghiệm } (x; y) = \left(\frac{1 + \sqrt[3]{3}}{2}; \frac{3 + \sqrt[3]{3}}{2}\right).$$

Vậy hệ cho có đúng 5 bộ nghiệm $(x; y)$ là

$$(-2; 7); (1; 1); \left(\frac{5+\sqrt{13}}{6}; \frac{11+\sqrt{13}}{9}\right); \left(\frac{5-\sqrt{13}}{6}; \frac{11-\sqrt{13}}{9}\right); \left(\frac{1+\sqrt[3]{3}}{2}; \frac{3+\sqrt[3]{3}}{2}\right).$$

Câu 27. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025-2026)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} x^3 - 9y = 18x - 5y^3 \\ x^2 + 4 = 5(y^2 - 1) \end{cases}.$$

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ có $x^2 = 5y^2 - 9$.

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$x^3 - 18x + 5y^3 - 9y = 0 \Leftrightarrow x^3 - 18x + x^2y = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + xy - 18) = 0.$$

$$\text{Trường hợp 1: } x = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

Trường hợp 2: $x^2 + xy = 18$ suy ra $2(5y^2 - x^2) = 18 = x^2 + xy$

Hay $3x^2 + xy - 10y^2 = 0$ hay $(x + 2y)(3x - 5y) = 0$.

Nếu $x = -2y \Rightarrow 9 = 5y^2 - x^2 = y^2$. Suy ra $\begin{cases} x = -6, y = 3 \\ x = 6, y = -3 \end{cases}$.

Nếu $3x = 5y \Rightarrow 9 = 5y^2 - \frac{25}{9}y^2 = \frac{20}{9}y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{81}{20}$. Suy ra $\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{5}}{2}, y = \frac{9\sqrt{5}}{10} \\ x = -\frac{3\sqrt{5}}{2}, y = -\frac{9\sqrt{5}}{10} \end{cases}$.

Vậy hệ có các nghiệm là $\left(0, \frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(0, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{3\sqrt{5}}{2}, \frac{9\sqrt{5}}{10}\right), \left(-\frac{3\sqrt{5}}{2}, -\frac{9\sqrt{5}}{10}\right), (-6, 3), (6, -3)$.

Câu 28. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{2y+3}{1-y} = 4 \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq -1, y \neq 1$

Ta có: $\begin{cases} \frac{x+2}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} - \frac{2y+3}{1-y} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \\ \frac{3}{x+1} + 2 + \frac{5}{y-1} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 0 \\ \frac{3}{x+1} + \frac{5}{y-1} = 2 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} a = \frac{1}{x+1} \\ b = \frac{1}{y-1} \end{cases}$. Ta được: $\begin{cases} a + b = 0 \\ 3a + 5b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2a = 2 \\ b = -a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$

Khi đó $\begin{cases} \frac{1}{x+1} = -1 \\ \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+1 = -1 \\ y-1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $x = -2; y = 2$.

Câu 29. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y+1 \geq 0 \end{cases}.$$

Khi đó
$$\begin{cases} 3\sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 5 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x} = 2 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y+1} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{y+1} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y+1 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \text{ (thoả mãn).}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (1; 3)$.

Câu 30. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 3xy + y^2 + 2x - 10y - 1 = 0 \\ (3xy + y^2)(2x - 1) - 21y^2 = 0 \end{cases}.$$

Lời giải

Xét $y = 0$: Hệ phương trình có nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Xét $y \neq 0$: Viết lại hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} (3xy + y^2) + (2x - 1) = 10y \\ (3xy + y^2)(2x - 1) = 21y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3xy + y^2}{y} + \frac{2x - 1}{y} = 10 \\ \left(\frac{3xy + y^2}{y}\right)\left(\frac{2x - 1}{y}\right) = 21 \end{cases}$$

Đặt $a = \frac{3xy + y^2}{y}, b = \frac{2x - 1}{y}$, hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ ab = 21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases}$$

Với $\begin{cases} a = 7 \\ b = 3 \end{cases}$, ta có
$$\begin{cases} \frac{3xy + y^2}{y} = 7 \\ \frac{2x - 1}{y} = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy + y^2 = 7y \\ 2x - 1 = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\text{Với } \begin{cases} a=3 \\ b=7 \end{cases}, \text{ ta có } \begin{cases} \frac{3xy+y^2}{y}=3 \\ \frac{2x-1}{y}=7 \end{cases} \quad \begin{cases} 3xy+y^2=3y \\ 2x-1=7y \end{cases} \quad \begin{cases} 3x+y=3 \\ 2x-7y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{22}{23} \\ y=\frac{3}{23} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 3 nghiệm: $(x; y) \in \left\{ \left(\frac{1}{2}; 0 \right); (2; 1); \left(\frac{22}{23}; \frac{3}{23} \right) \right\}$.

Câu 31. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025-2026)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} xy^2 + x^2 - y^3 - yx + y^2 + x = 0 \\ \sqrt{8x - y^2} = 3y - 2x - 6 \end{cases}.$$

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } 8x - y^2 \geq 0, 3y - 2x - 6 \geq 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} xy^2 + x^2 - y^3 - yx + y^2 + x = 0 & (1) \\ \sqrt{8x - y^2} = 3y - 2x - 6 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1) ta có: } (x + y^2)(x - y + 1) = 0$$

$$\text{Trường hợp 1: } x + y^2 = 0 \Rightarrow 8x - y^2 = -9y^2 \leq 0 \text{ suy ra } x = y = 0.$$

Thử lại thì không thoả mãn (*)

$$\text{Trường hợp 2: } x - y + 1 = 0 \text{ hay } x = y - 1.$$

$$\text{Thay vào (2) ta có: } \sqrt{8y - 8 - y^2} = y - 4 \quad (**)$$

Ta bình phương hai vế thu được:

$$8y - 8 - y^2 = (y - 4)^2$$

$$2y^2 - 16y + 24 = 0$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

Do khi $y = 2$ thì thay vào (*) sẽ vô lý.

Nên $y = 6$ thì $x = 5$ thử lại thoả mãn (*) và (**).

Như vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(5; 6)$.

Câu 32. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x + 3y = \frac{4}{x^2} \\ 3x + y = \frac{4}{y^2} \end{cases}.$$

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$$

Viết lại hệ phương trình ta có

$$\begin{cases} x^3 + 3x^2y = 4 & (1) \\ 3xy^2 + y^3 = 4 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) cộng (2), ta được

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = 8 \text{ hay } (x + y)^3 = 8.$$

Suy ra $x + y = 2$

Thay $y = 2 - x$ vào (1), ta được

$$x^3 + 3x^2(2 - x) = 4$$

$$x^3 - 3x^2 + 2 = 0$$

$$(x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0$$

Suy ra $x = 1$ hoặc $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Suy ra $x = 1$ hoặc $x = 1 + \sqrt{3}$ hoặc $x = 1 - \sqrt{3}$

Với $x = 1$ suy ra $y = 1$

Với $x = 1 + \sqrt{3}$ suy ra $y = 1 - \sqrt{3}$

Với $x = 1 - \sqrt{3}$ suy ra $y = 1 + \sqrt{3}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1; 1), (1 + \sqrt{3}; 1 - \sqrt{3}), (1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3})$.

Câu 33. (Trường chuyên Sơn La năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{x+1}{x-1} + \frac{2y-1}{y-2} = 5 \\ \frac{3}{x-1} + \frac{2}{y-2} = \frac{13}{6} \end{cases}$$

Lời giải

Điều kiện xác định: $x \neq 1, y \neq 2$

Đặt $\frac{1}{x-1} = a, \frac{1}{y-2} = b$. Khi đó ta có

$$5 = \frac{x+1}{x-1} + \frac{2y-1}{y-2} = 1 + \frac{2}{x-1} + 2 + \frac{3}{y-2} \Rightarrow 2 = 2a + 3b \quad (1) \quad \text{và} \quad 3a + 2b = \frac{13}{6} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{3}$

Do đó $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}, \frac{1}{y-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3, y = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 3, y = 5$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Câu 34. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (x+1)^2 + y^2 + y = 6 \\ (y-1)^2 + x^2 + x = 11 \end{cases}$$

Lời giải

Viết lại hệ phương trình ta có:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + y - 5 = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + x - 2y - 10 = 0 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được $x + 3y + 5 = 0$ hay $x = -3y - 5$

Thay $x = -3y - 5$ vào (1): $(-3y - 5)^2 + y^2 + 2(-3y - 5) + y - 5 = 0$

Tìm được $y = -2; y = -\frac{1}{2}$. Tìm được 2 nghiệm $(x, y) = (1; -2); (x, y) = \left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x, y) \in \left\{ (1; -2); \left(-\frac{7}{2}; -\frac{1}{2}\right) \right\}$.

Câu 35. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + x + y = xy + 2 \\ 2x + \sqrt{3y-8} + \sqrt{y+1} = 5 \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$(x^2 - 1) + (x - xy) + (y - 1) = 0$$

$$(x-1)(x+1) - x(y-1) + (y-1) = 0$$

$$(x-1)(x-y+2) = 0$$

Suy ra $x = 1$ hoặc $x = y - 2$

Nếu $x = 1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có

$$\sqrt{3y-8} + \sqrt{y+1} = 3$$

$$(\sqrt{3y-8} - 1) + (\sqrt{y+1} - 2) = 0$$

$$(y-3) \left(\frac{3}{\sqrt{3y-8}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+1}+2} \right) = 0$$

Suy ra $y = 3$ (do $\frac{3}{\sqrt{3y-8}+1} + \frac{1}{\sqrt{y+1}+2} > 0$ với mọi y)

Nếu $x = y - 2$ ta có $\sqrt{3y-8} + \sqrt{y+1} = 5 - 2x = 9 - 2y$

$$\text{Đặt } \sqrt{3y-8} = a, \sqrt{y+1} = b \Rightarrow b^2 - a^2 = 9 - 2y \quad (a, b \geq 0)$$

$$\Rightarrow a + b = b^2 - a^2 \text{ hay } a + b = (b+a)(b-a) \Rightarrow a + b = 0 \text{ hoặc } b - a = 1$$

$$\text{Nếu } a + b = 0 \text{ mà } a, b \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

Dẫn đến loại vì xảy ra đồng thời 2 giá trị của y khác nhau

$$\text{Nếu } b - a = 1 \Rightarrow \sqrt{y+1} = \sqrt{3y-8} + 1$$

$$y+1 = 3y-7+2\sqrt{3y-8}$$

$$8-2y = 2\sqrt{3y-8}$$

$$4 - y = \sqrt{3y - 8}$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} y \leq 4 \\ 3y - 8 = y^2 - 8y + 16 \end{cases} \quad \begin{cases} y \leq 4 \\ y^2 - 11y + 24 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } y = 3 \Rightarrow x = 1$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 3)$.

Câu 36. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025-2026)

$$\text{Giải hệ phương trình } \begin{cases} 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3 = 2(x + y) \\ xy(x^2 + y^2 - 2) - x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Từ phương trình thứ hai của hệ ta có: $(xy - 1)(x^2 + y^2 - 2) = 0$.

Trường hợp 1: $xy = 1$. Ta thấy y khác 0, khi đó phương trình thứ nhất trở thành

$$5x - 4y + 3y^3 = 2(x + y)$$

$$3y^3 - 6y + 3x = 0$$

$$3y^3 - 6y + \frac{3}{y} = 0$$

$$\frac{3(y^2 - 1)^2}{y} = 0$$

$$\text{Suy ra } y^2 = 1. \text{ Do đó } \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$$

Trường hợp 2: $x^2 + y^2 = 2$. Từ phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$(x^2 + y^2)(x + y) = 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3$$

$$x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y = 5x^2y - 4xy^2 + 3y^3$$

$$x^3 - 2y^3 + 5xy^2 - 4x^2y = 0$$

$$(x - 2y)(x - y)^2 = 0$$

$$\text{Nếu } x = y \text{ thì } x^2 = 1. \text{ Suy ra } \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = -1 \end{cases}$$

Nếu $x = 2y$ thì $2 = 5y^2 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{10}}{5}$. Suy ra

$$\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{10}}{5}, y = \frac{\sqrt{10}}{5} \\ x = -\frac{2\sqrt{10}}{5}, y = -\frac{\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là $(1;1), (-1;-1), \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}; \frac{\sqrt{10}}{5}\right), \left(-\frac{2\sqrt{10}}{5}; -\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$.

Câu 37. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2(2x-3y) = -4 \\ y^3 + 16 = 6xy^2 \end{cases}$$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases} x^2(2x-3y) = -4 \\ y^3 + 16 = 6xy^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x^3 - 3x^2y = -4 \\ y^3 - 16xy^2 = -16 \end{cases} \quad \begin{cases} 8x^3 - 12x^2y = -16 \\ y^3 - 16xy^2 = -16 \end{cases}$$

Suy ra $8x^3 - 12x^2y = y^3 - 16xy^2$

$$8x^3 - 12x^2y + 16xy^2 - y^3 = 0$$

$$(2x - y)^3 = 0$$

$$2x - y = 0$$

$$y = 2x$$

Thay $y = 2x$ vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$x^2(2x - 3 \cdot 2x) = -4$$

$$-4x^3 = -4$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

Do đó $y = 2x = 2 \cdot 1 = 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 38. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025-2026)

Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 8y^2 = 12 \\ x^3 + 2xy^2 + 12y = 0 \end{cases}$$

Lời giải

Thế $12 = x^2 + 8y^2$ vào phương trình thứ hai trong hệ ta thu được phương trình

$$x^3 + 2xy^2 + 12y = 0$$

$$x^3 + 2xy^2 + (x^2 + 8y^2)y = 0$$

$$x^3 + x^2y + 2xy^2 + 8y^3 = 0 \quad (1).$$

Với $y = 0$ ta nhận thấy không thỏa hệ. Với $y \neq 0$ ta biến đổi phương trình (1) ta có:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3 + \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right) + 8 = 0$$

Đặt $\frac{x}{y} = t$ ta được phương trình $t^3 + t^2 + 2t + 8 = 0$ hay $(t+2)(t^2 - t + 4) = 0$

Nhận xét: $t^2 - t + 4 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0$.

Do đó $t = -2$ hay $x = -2y$.

Thế $x = -2y$ vào phương trình thứ nhất trong hệ ta có $12y^2 = 12 \Rightarrow y = \pm 1$.

Với $y = 1$ thì $x = -2$.

Với $y = -1$ thì $x = 2$.

Vậy hệ phương trình đã cho có tập nghiệm $S = \{(-2; 1); (2; -1)\}$.