

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN HÀM SỐ TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

Câu 1. (Toán chuyên Bình Định năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 3m + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (P) , (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1^2 - y_2^2 = 2024(x_1^2 - x_2^2)$.

Câu 2. (Toán chuyên Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$ (m là tham số)

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Câu 3. (Toán chuyên Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: y = 2mx - 4m + 5$, (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$. Tìm tất cả giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O .

Câu 4. (Toán chuyên Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx - k + 5$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định M và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số k .

b) Cho điểm $C(1; 2)$, tìm tất cả giá trị của k để các tam giác MAC và MBC có diện tích bằng nhau.

Câu 5. (Toán chuyên Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ với m là tham số. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Câu 6. (Toán chuyên Hà Giang năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = bx - 1$ (với a, b là các tham số). Tìm các số hữu tỉ a, b để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Câu 7. (Toán chuyên Điện Biên năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d) có phương trình $y = 3$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A, B sao cho $S_{AOB} = 12$ (đvdt). Tính giá trị của hệ số a (Kết quả được làm tròn đến độ chính xác 0,005).

Câu 8. (Toán chuyên Hà Nam năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{-1}{2}x^2$. Xét hai điểm A, B thay đổi thuộc (P) có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 = -4$. Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB .

Câu 9. (Toán chuyên Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Tìm m để đường thẳng $(d): y = 2x + m$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{4}$.

Câu 10. (Toán chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = 6x + m + 4$ có đồ thị là (d) . Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Câu 11. (Toán chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = x + m$ và parabol $(P): y = 2x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $(2x_1^2 - x_2 - m)^2 + (2x_2^2 - x_1 - m)^2 = 4$.

Câu 12. (Toán chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho độ dài AB ngắn nhất.

Câu 13. (Toán chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Trên cùng mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + 3m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 + |x_1x_2| = 10$.

Câu 14. (Toán chuyên Toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = -x^2$ và điểm A thuộc (P) có hoành độ bằng -2 . Đường thẳng (d) đi qua điểm $B(0; -3)$, song song với OA (O là gốc tọa độ) và cắt (P) tại hai điểm M, N . Tìm tọa độ của M và N , biết M có hoành độ âm.

Câu 15. (Toán chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2(m+2)x - 2m - 3$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.

- Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; -3)$.
- Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (Toán chuyên Bình Định năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2x - 3m + 1$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (P) , (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1^2 - y_2^2 = 2024(x_1^2 - x_2^2)$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = 2x - 3m + 1$$

Hay

$$x^2 - 2x + 3m - 1 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) có $\Delta' = 2 - 3m$

Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm thực x_1, x_2 phân biệt, tức là: $\Delta' = 2 - 3m > 0$ hay $m < \frac{2}{3}$

Với $m < \frac{2}{3}$ theo định lý Viète ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 3m - 1 \end{cases}$

Vì $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in (P)$ nên $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

Khi đó biểu thức đang xét trở thành

$$x_1^4 - x_2^4 = 2024(x_1^2 - x_2^2)$$

$$(x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2) = 2024(x_1^2 - x_2^2)$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2024) = 0$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2024 = 0 \quad (\text{vì } x_1 + x_2 = 2 \neq 0; x_1 \neq x_2)$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2024 = 0$$

$$2^2 - 2(3m - 1) - 2024 = 0$$

$$6m = -2018$$

$$m = \frac{-1009}{3} \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $m = \frac{-1009}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. (Toán chuyên Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$ (m là tham số)

a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Lời giải

a) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - mx - 4 = 0$ (1).

Do $\Delta = m^2 + 16 > 0$ nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt trái dấu với mọi m , do đó (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m .

b) Theo định lý Viète ta có: $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = -4$. Khi đó:

$$M = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{2(x_1 + x_2) + 7}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2} = \frac{2m + 7}{m^2 + 8}.$$

$$\text{Suy ra } M - 1 = \frac{-m^2 + 2m - 1}{m^2 + 8} = -\frac{(m-1)^2}{m^2 + 8} \leq 0 \text{ với mọi } m.$$

Suy ra $M \leq 1$ với mọi m , do đó giá trị lớn nhất của M bằng 1 khi $m = 1$.

Câu 3. (Toán chuyên Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng Oxy , cho đường thẳng $d: y = 2mx - 4m + 5$, (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.

Tìm tất cả giá trị của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho ba điểm O, A, B tạo thành tam giác vuông tại O .

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d

$$x^2 = 2mx - 4m + 5 \text{ hay } x^2 - 2mx + 4m - 5 = 0$$

Đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt sao cho ba điểm O, A, B lập thành tam giác khi và chỉ khi $\Delta' = m^2 - 4m + 5 > 0$ và $x_1 x_2 \neq 0$

$$\text{Hay } \begin{cases} m^2 - 4m + 5 > 0 \\ 4m - 5 \neq 0 \end{cases} \text{ suy ra } m \neq \frac{5}{4}$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

Đường thẳng đi qua O, A có dạng $y = ax$, trong đó $a = \frac{y_1}{x_1}$ là hệ số góc của đường thẳng OA .

Tương tự hệ số góc của đường thẳng OB là $a' = \frac{y_2}{x_2}$

Điều kiện để tam giác OAB vuông tại O là $\frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1$

$$\Rightarrow \frac{x_1^2}{x_1} \cdot \frac{x_2^2}{x_2} = -1 \text{ hay } x_1 x_2 = -1.$$

Theo định lý Viète ta suy ra $4m - 5 = -1$ hay $m = 1$ (thỏa mãn)

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. (Toán chuyên Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Trên cùng một mặt phẳng tọa độ, cho Parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = kx - k + 5$.

- Chứng minh rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định M và cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số k .
- Cho điểm $C(1; 2)$, tìm tất cả giá trị của k để các tam giác MAC và MBC có diện tích bằng nhau.

Lời giải

a) Dễ thấy (d) luôn đi qua điểm $M(1; 5)$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d)

$$x^2 = kx - k + 5 \text{ hay } x^2 - kx + k - 5 = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x , ta có

$$\Delta = k^2 - 4(k - 5) = k^2 - 4k + 20 = (k - 2)^2 + 16 \geq 16 > 0 \text{ với mọi } k$$

Do đó phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, hay đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi giá trị của tham số k .

b) Chú ý rằng ba điểm M, A, B thẳng hàng vì cùng thuộc đường thẳng (d) , nên hai tam giác MAC và MBC có diện tích bằng nhau khi và chỉ khi $MA = MB$.

Do hai tam giác này có chung độ dài chiều cao là khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng (d) .

Điều này dẫn đến M là trung điểm của A, B do A, B là hai điểm phân biệt.

Gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ do hoành độ của A, B là nghiệm của phương trình (1) nên theo định lý Viète,

$$\text{ta có: } \begin{cases} x_1 + x_2 = k \\ x_1 x_2 = k - 5 \end{cases}$$

Vì $M(1; 5)$ là trung điểm của A, B nên ta được: $\frac{x_1 + x_2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{k}{2} = 1$ hay $k = 2$.

Vậy $k = 2$ là giá trị cần tìm để các tam giác MAC và MBC có diện tích bằng nhau.

Câu 5. (Toán chuyên Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$ với m là tham số. Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho $|x_1 - x_2| = 2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$\frac{1}{2}x^2 = mx - \frac{1}{2}m^2 + m + 1$$

Hay

$$x^2 - 2mx + m^2 - 2m - 2 = 0 \quad (1).$$

Ta có:

$$\Delta' = b'^2 - ac = (-m)^2 - 1(m^2 - 2m - 2) = 2m + 2.$$

Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khi

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 \neq 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \text{ hay } m > -1.$$

Với $m > -1$ có 2 nghiệm phân biệt. Áp dụng hệ thức Viète, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = m^2 - 2m - 2 \end{cases}.$$

Ta có:

$$|x_1 - x_2| = 2$$

$$(x_1 - x_2)^2 = 4$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$$

$$(2m)^2 - 4(m^2 - 2m - 2) = 4$$

$$2m + 2 = 1.$$

$$m = -\frac{1}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = -\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Câu 6. (Toán chuyên Hà Giang năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = bx - 1$ (với a, b là các tham số). Tìm các số hữu tỉ a, b để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt sao cho hoành độ một điểm là $x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})(\sqrt{5} - \sqrt{3})} = 4 - \sqrt{15}.$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $ax^2 - bx + 1 = 0$ (*).

Điều kiện để đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt: $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4a > 0 \end{cases}$

(*) có nghiệm $x = 4 - \sqrt{15}$ nên $a(4 - \sqrt{15})^2 - b(4 - \sqrt{15}) + 1 = 0$ hay $\sqrt{15}(-8a + b) + 31a - 4b + 1 = 0$.

Vì $a, b \in \mathbb{Q}$ nên $(-8a + b), (31a - 4b + 1) \in \mathbb{Q}$.

Nếu $8a - b \neq 0$ thì $\sqrt{15} = \frac{31a - 4b + 1}{8a - b} \in \mathbb{Q}$ (vô lí).

Suy ra $\begin{cases} 8a - b = 0 \\ 31a - 4b + 1 = 0 \end{cases}$ hay $\begin{cases} a = 1 \\ b = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn). Vậy $a = 1, b = 8$.

Câu 7. (Toán chuyên Điện Biên năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng (d) có phương trình $y = 3$. Đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm A, B sao cho $S_{AOB} = 12$ (đvdt).

Tính giá trị của hệ số a (Kết quả được làm tròn đến độ chính xác 0,005).

Lời giải

Để $(d): y = 3$ cắt $(P): y = ax^2$ (a khác 0) tại hai điểm phân biệt thì $a > 0$.

$$\text{Khi đó } x_1 = \sqrt{\frac{3}{a}}; x_2 = -\sqrt{\frac{3}{a}} \Rightarrow AB = 2\sqrt{\frac{3}{a}}.$$

$$\text{Mà } S_{OAB} = \frac{1}{2} y_A \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2\sqrt{\frac{3}{a}} = 3\sqrt{\frac{3}{a}}.$$

$$\text{Theo giả thiết } S_{OAB} = 12 \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{a}} = 4 \Rightarrow a = \frac{3}{16} = 0,1875 \approx 0,188.$$

Vậy $a = 0,188$.

Câu 8. (Toán chuyên Hà Nam năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng Oxy , cho parabol (P) có phương trình $y = \frac{-1}{2}x^2$. Xét hai điểm A, B thay đổi thuộc (P) có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 = -4$. Tính diện tích nhỏ nhất của tam giác OAB .

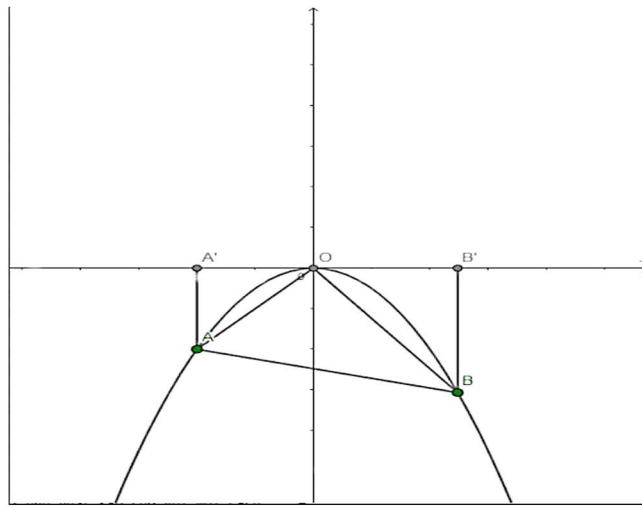
Lời giải

Do $x_1x_2 = -4$ và $-4 < 0$ nên x_1 và x_2 trái dấu.

Không mất tính tổng quát, giả sử $x_1 < 0 < x_2$.

Suy ra A nằm bên trái trục tung; B nằm bên phải trục tung (hoành độ A âm, hoành độ B dương).

Hạ AA', BB' vuông góc với Ox tại A', B' .



Khi đó:

$$S_{OAB} = S_{AA'BB'} - S_{OAA'} - S_{OBB'}$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} [A'B' (A'A + BB') - OA' \cdot AA' - BB' \cdot OB']$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \left[\left(\left| \frac{-1}{2}x_1^2 \right| + \left| \frac{-1}{2}x_2^2 \right| \right) (|x_2| + |x_1|) - |x_1| \left| \frac{-1}{2}x_1^2 \right| - |x_2| \left| \frac{-1}{2}x_2^2 \right| \right]$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) (x_2 - x_1) + \frac{1}{2} x_1^3 - \frac{1}{2} x_2^3 \right]$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{4} (x_2 - x_1) \left[(x_1^2 + x_2^2) - (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) \right]$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{4} (-x_1x_2) (x_2 - x_1)$$

$$S_{OAB} = \frac{1}{4}[-(-4)]\left(\frac{-4}{x_1} - x_1\right)$$

$$S_{OAB} = \frac{4}{-x_1} + (-x_1)$$

Vì $x_1 < 0$ nên $-x_1 > 0$

Suy ra $\frac{4}{-x_1} + (-x_1) \geq 2\sqrt{\frac{4}{-x_1} \cdot (-x_1)} = 4$ (áp dụng BĐT AM – GM) hay $S_{OAB} \geq 4$.

Dấu bằng xảy ra khi:
$$\begin{cases} x_1 x_2 = -4 \\ \frac{4}{-x_1} = -x_1 \\ x_1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow y_A = y_B = -2.$$

Vậy S_{OAB} đạt giá trị nhỏ nhất là 4 (đvdt) khi $A(-2; -2); B(2; -2)$ hoặc ngược lại.

Câu 9. (Toán chuyên Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Tìm m để đường thẳng $(d): y = 2x + m$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Đường thẳng (d) giao với Oy tại $A(0; m)$, giao với Ox tại $B\left(\frac{-m}{2}; 0\right)$. Khi đó tam giác tạo bởi (d)

và hai trục tọa độ là tam giác vuông OAB . Có: $S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}|m|\left|\frac{m}{2}\right| = \frac{m^2}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow m = \pm\sqrt{3}$.

Vậy $m = \pm\sqrt{3}$.

Câu 10. (Toán chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Cho hàm số $y = 2x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y = 6x + m + 4$ có đồ thị là (d) . Tìm m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và (d) là:

$$2x^2 = 6x + m + 4 \text{ hay } 2x^2 - 6x - m - 4 = 0.$$

Để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì: $\Delta' > 0$ hay $9 - 2 \cdot (-m - 4) > 0$. Suy ra $m > -\frac{17}{2}$.

Vậy $m > -\frac{17}{2}$ thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Câu 11. (Toán chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = x + m$ và parabol $(P): y = 2x^2$. Tìm tất cả giá trị của tham số m sao cho đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $(2x_1^2 - x_2 - m)^2 + (2x_2^2 - x_1 - m)^2 = 4$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P)

$$2x^2 - x - m = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì

$$\Delta_{(1)} = 1 + 8m > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{8}$$

$x_1; x_2$ là hai nghiệm của (1) nên $2x_1^2 - x_1 - m = 0 \Rightarrow 2x_1^2 = x_1 + m$; $2x_2^2 - x_2 - m = 0 \Rightarrow 2x_2^2 = x_2 + m$.

Do đó: $(2x_1^2 - x_2 - m)^2 + (2x_2^2 - x_1 - m)^2 = 4 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_1)^2 = 4 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 2$.

Áp dụng hệ thức Vi-et cho (1) ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \\ x_1x_2 = -\frac{m}{2} \end{cases}$$

Vậy ta được $\frac{1}{4} + 2m = 2 \Rightarrow m = \frac{7}{8}$ (thỏa mãn)

Câu 12. (Toán chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm m để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm A, B phân biệt sao cho độ dài AB ngắn nhất.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = mx + 3 \Rightarrow x^2 - mx - 3 = 0$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi $\Delta > 0 \Rightarrow m^2 + 12 > 0$ (đúng với mọi m)

Theo hệ thức Viète ta có $x_1 + x_2 = m; x_1x_2 = -3$

$$\text{Gọi } A(x_1; y_1); B(x_2; y_2) \Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + m^2(x_2 - x_1)^2$$

$$\Rightarrow AB^2 = (x_2 - x_1)^2(1 + m^2) = [(x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2](1 + m^2) = (m^2 + 12)(1 + m^2)$$

$$\Rightarrow AB^2 = m^4 + 13m^2 + 12 \geq 12$$

Dấu “=” xảy ra khi $m = 0$.

Vậy $m = 0$ thì độ dài ngắn nhất của $AB = \sqrt{12}$.

Câu 13. (Toán chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Trên cùng mặt phẳng toạ độ Oxy , cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng $(d): y = 3x + 3m - 1$. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 + |x_1 x_2| = 10$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2 = 3x + 3m - 1$ (1) để (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt thì điều kiện là phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$, tức $\Delta = 3^2 - 4(3m - 1) > 0$ hay $-12m + 13 > 0$ hay $m < \frac{13}{12}$.

Khi đó, theo định lí Vi-ét ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -3 & (2) \\ x_1 \cdot x_2 = 3m - 1 & (3) \end{cases}$$

Theo đề, $x_1^2 + x_2^2 + |x_1 x_2| = 10$ hay $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + |x_1 x_2| = 10$ (4).

Thay (2) và (3) vào (4) ta được:

$$(-3)^2 - 2(3m - 1) + |3m - 1| = 10$$

$$|3m - 1| = 6m - 1$$

$$\begin{cases} 6m - 1 \geq 0 \\ \begin{cases} 3m - 1 = 6m - 1 \\ 3m - 1 = -(6m - 1) \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \geq \frac{1}{6} \\ \begin{cases} 3m = 0 \\ 9m = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$m = \frac{2}{9} \text{ (thoả mãn)}$$

So sánh điều kiện ta được $m = \frac{2}{9}$ là giá trị cần tìm.

Câu 14. (Toán chuyên Toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho parabol $(P): y = -x^2$ và điểm A thuộc (P) có hoành độ bằng -2 . Đường thẳng (d) đi qua điểm $B(0; -3)$, song song với OA (O là gốc tọa độ) và cắt (P) tại hai điểm M, N . Tìm tọa độ của M và N , biết M có hoành độ âm.

Lời giải

Tung độ điểm A là $y = -(-2)^2 = -4$, suy ra $A(-2; -4)$. Đường thẳng $OA: y = 2x$.

Gọi đường thẳng $(d): y = ax + b$.

Vì $(d) \parallel OA$ nên hệ số góc $a = 2, b \neq 0$. Vì (d) đi qua $B(0; -3)$ nên $b = -3$. Suy ra $(d): y = 2x - 3$.

Các hoành độ của M và N là các nghiệm của phương trình: $-x^2 = 2x - 3$ hay $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Phương trình này có 2 nghiệm: $x = 1, x = -3$. Vì M có hoành độ âm nên $M(-3; -9)$ và $N(1; -1)$.

Câu 15. (Toán chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường thẳng $(d): y = 2(m+2)x - 2m - 3$ (m là tham số) và parabol $(P): y = x^2$.

a) Xác định giá trị của m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; -3)$.

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

a) Để đường thẳng (d) đi qua $A(2; -3)$ thì khi đó tọa độ điểm A thỏa mãn

$$-3 = 2(m+2) \cdot 2 - 2m - 3 = 2m + 5 \text{ hay } m = -4.$$

Vậy với $m = -4$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(2; -3)$.

b) Giả sử (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt. Khi đó phương trình hoành độ sau có hai nghiệm phân biệt: $x^2 = 2(m+2)x - 2m - 3$ hay $x^2 - 2(m+2)x + 2m + 3 = 0$

Tức là $\Delta' = (m+2)^2 - (2m+3) = m^2 + 2m + 1 = (m+1)^2 > 0 \Rightarrow m \neq -1$

Vậy với mọi m khác -1 thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.