

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN LẬP PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, CÁC BÀI TOÁN THỰC TẾ TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh miến, mỗi kilogram miến có giá nhập về là 70 nghìn đồng và giá bán ra niêm yết là 100 nghìn đồng. Biết rằng trong giá bán niêm yết đó chủ cửa hàng phải chi trả 15% cho tất cả các khoản như thuế, phí quản lý, giao hàng,... Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 200 kg miến. Nhân dịp khai trương thêm chi nhánh mới, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 40 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu % của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Một công ty phân bón cần sản xuất ra một loại phân bón chứa 30% potassium. Họ có hai loại nguyên liệu: loại A chứa 24% potassium và loại B chứa 40% potassium. Tính khối lượng của mỗi loại nguyên liệu cần sử dụng để được hỗn hợp 500 kg chứa 30% potassium.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Cho hình chữ nhật có số đo chiều dài, chiều rộng (theo đơn vị cm) là hai số nguyên dương phân biệt có chữ số tận cùng bằng nhau. Biết chu vi hình chữ nhật đó bằng 2024 cm. Tìm diện tích lớn nhất có được của hình chữ nhật đó.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

Trong giải bóng đá B-League có n đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (mỗi đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một lần). Ở mỗi trận thắng - thua, đội thắng được 3 điểm và đội thua không được điểm. Ở mỗi trận hòa, mỗi đội được 1 điểm. Kết thúc giải, người ta thống kê thấy rằng số trận thắng - thua gấp 3 lần số trận hòa và tổng số điểm của tất cả các đội là 330. Tìm số trận hòa và số đội tham gia giải bóng B-League.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

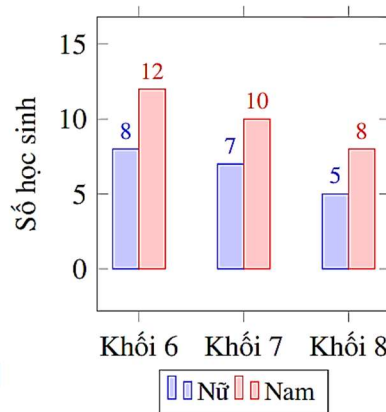
Bác An ở vị trí A trên hòn đảo cách bờ biển một khoảng $AH = 2$ km, nhà bác An ở vị trí B trên bờ biển cách H một khoảng 3 km (hình vẽ bên). Bác An chèo xuồng từ A đến C với vận tốc $v_1 = 3$ km/h (C nằm giữa H và B) và đi bộ đến B với vận tốc $v_2 = 4$ km/h. Tính độ dài BC biết thời gian chèo xuồng gấp đôi thời gian đi bộ.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Một công ty X áp dụng chính sách trả lương cho nhân viên theo hai mức: ngày làm việc bình thường và ngày làm việc đặc biệt (làm vào ngày được nghỉ), biết rằng tiền lương của một ngày làm việc đặc biệt nhiều hơn tiền lương của một ngày làm việc bình thường là 225 nghìn đồng. Trong một tháng, anh Bình là nhân viên của công ty X làm việc 24 ngày, trong đó có một số ngày làm việc đặc biệt. Bình nhận được 9 triệu đồng cho những ngày làm việc bình thường và 2,7 triệu đồng cho những ngày làm việc đặc biệt. Hỏi anh Bình được nhận bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi ngày làm việc đặc biệt?

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội năm 2025 – 2026)

Giải bơi của một trường Trung học cơ sở ban đầu chỉ có học sinh khối 6, 7 và 8 đăng kí tham gia với số liệu học sinh được cho như trong biểu đồ cột kép ở hình bên. Ngay trước khi giải đấu diễn ra, có thêm 6 học sinh nam khối 9 và một số học sinh nữ khối 9 đăng kí bổ sung. Biết rằng tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng kí tham gia giải trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng kí bổ sung là không thay đổi. Tìm số học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu.



Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Lúc 6 giờ sáng, bạn Hải đi xe đạp từ vị trí A đến vị trí B , quãng đường AB dài 25 km. Khi đi được $\frac{2}{5}$ quãng đường AB , Hải dừng lại tại vị trí C để ăn sáng 35 phút. Sau đó, Hải tiếp tục đi từ C đến B với vận tốc chậm hơn 2 km/h so với tốc độ đi trên đoạn đường AC . Khi đến B , Hải nghỉ lại 45 phút và quay ngược trở lại A (theo tuyến đường ban đầu) với vận tốc bằng $\frac{3}{4}$ tốc độ đi đoạn đường từ A đến C . Hải về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày. Hỏi bạn Hải đến B lúc mấy giờ (giả sử tốc độ trên từng đoạn đường là không đổi)?

Câu 9. (Trường chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Một ô tô và một xe tải chuyển động cùng tốc độ không đổi a (km/h) dọc theo hai con đường giao nhau hướng đến giao lộ. Biết rằng vào các thời điểm 14 giờ và 15 giờ cùng ngày, khoảng cách từ ô tô đến giao lộ đều gấp đôi khoảng cách từ xe tải đến giao lộ. Hỏi xe tải đến giao lộ lúc mấy giờ?

Câu 10. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Một thùng có 40 quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có một số quả bóng màu đỏ, một số quả bóng màu xanh, còn lại là những quả bóng màu khác. Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng trong thùng. Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\frac{3}{10}$, xác suất để lấy quả bóng màu xanh là $\frac{3}{8}$. Tìm số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh.

Câu 11. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc ao là góc vuông. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua cái cọc đã được cắm sẵn ở điểm A (tham khảo hình bên). Biết khoảng cách từ A đến bờ ngang là 5m và khoảng cách từ A đến bờ dọc là 12m, diện tích nhỏ nhất của khu vực cá có thể giăng là bao nhiêu mét vuông? (Hình ảnh minh họa)

Câu 12. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

Quãng đường từ thành phố A đến thành phố B là 65 km. Vào lúc 6 h 00 sáng, người thứ nhất đạp xe xuất phát từ thành phố A đi đến thành phố B . Sau thời điểm xuất phát của người thứ nhất 1 giờ, người thứ hai đạp xe xuất phát từ thành phố B đi đến thành phố A . Hai người đi trên cùng một con đường nhưng ngược chiều nhau và gặp nhau tại địa điểm cách thành phố A là 40 km. Biết vận tốc trung bình của người thứ hai lớn hơn vận tốc trung bình của người thứ nhất ít nhất là 5 km/h. Tính thời gian của mỗi người đã đi từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau.

Câu 13. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Bác Liên đi siêu thị mua một mặt hàng đang có chương trình khuyến mãi giảm giá 20%. Vì có thể khách hàng thân thiết của siêu thị nên bác được giảm giá thêm 5% trên giá đã giảm nên bác Liên chỉ phải trả 760. nghìn đồng cho mặt hàng đó. Hỏi giá ban đầu của mặt hàng đó nếu không khuyến mãi là bao nhiêu?

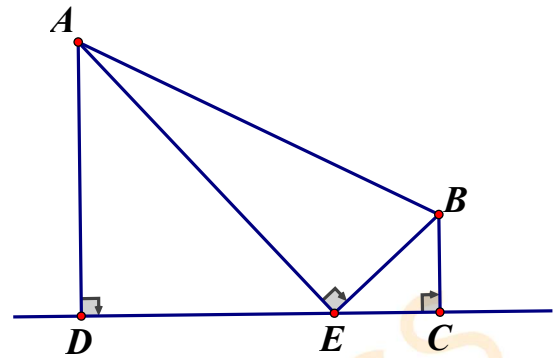
Câu 14. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Một người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B . Sau đó 16 phút có một ô tô đi từ tỉnh B đến tỉnh A với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h. Xe máy gặp ô tô ở một địa điểm cách B 24 km. Tính vận tốc của ô tô biết rằng quãng đường AB dài 54 km.

Câu 15. (Trường chuyên Long An năm 2025 – 2026)

Trên hình vẽ minh họa, các điểm A, B là vị trí hai hòn đảo và đường thẳng DC là bờ biển. Biết rằng khoảng cách giữa hai đảo là $AB = 130\text{km}$. Khoảng cách từ đảo A đến bờ biển là $AD = 70\text{km}$, khoảng cách từ đảo B đến bờ biển là $BC = 20\text{km}$.

Trên bờ biển, người ta thiết kế một trạm trung chuyển E . Tàu hàng di chuyển theo hành trình đi từ A đến E rồi đi từ E đến B . Vị trí trạm trung chuyển E phải cách vị trí C bao nhiêu km để hành trình của tàu hàng là ngắn nhất?

**Câu 16. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)**

Một trường học có 80 giáo viên, với tuổi trung bình là 45. Biết rằng tuổi trung bình của các giáo viên nam và giáo viên nữ trong trường lần lượt là 50 và 42. Hỏi trường đó có bao nhiêu giáo viên nam, bao nhiêu giáo viên nữ?

Câu 17. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

a) Trong lớp bạn An có 12 học sinh nữ và một số học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng xác suất để học sinh đó là nam là 0,625. Hỏi lớp bạn An có bao nhiêu học sinh?

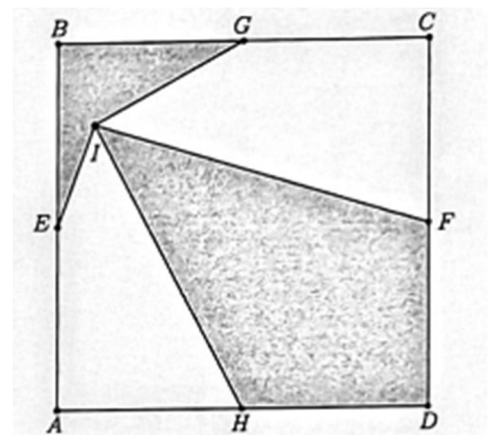
b) Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 64 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 15 tấn hàng có giá thuê là 12 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 10 tấn hàng có giá thuê là 8 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 64 tấn hàng là bao nhiêu?

Câu 18. (Trường chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Một công ty đặt kế hoạch may 3000 chiếc áo trong một thời gian. Trong sáu ngày đầu công ty thực hiện đúng tiến độ. Những ngày sau đó mỗi ngày vượt mức 10 chiếc áo nên hoàn thành công việc trước hạn một ngày và may thêm được 60 chiếc áo nữa. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày công ty phải may bao nhiêu chiếc áo?

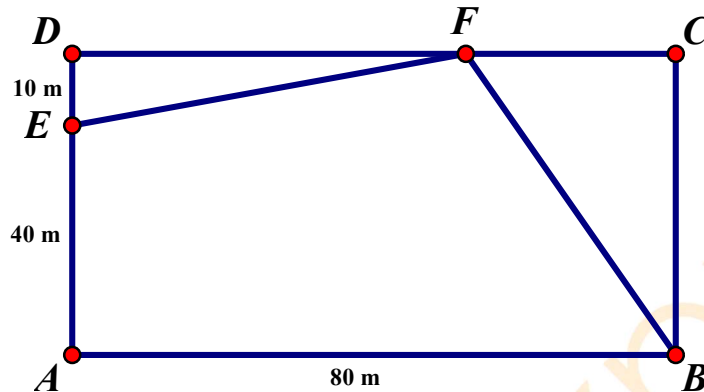
Câu 19. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Ông X có mảnh vườn hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 10m với E, G, F, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . Từ một điểm I bên trong mảnh vườn ông chia vườn thành bốn phần như hình vẽ, phần tô đen nhỏ có diện tích 8 m^2 dùng để trồng cỏ, phần tô đen còn lại dùng để trồng hoa. Biết rằng mỗi m^2 trồng cỏ hết 80 nghìn đồng, mỗi m^2 trồng hoa hết 120 nghìn đồng. Hỏi ông X cần bao nhiêu tiền để thực hiện trang trí mảnh vườn đó.



Câu 20. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

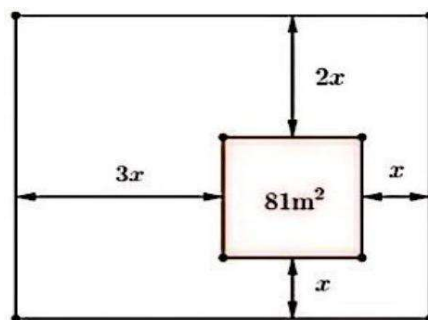
Một sân trường hình chữ nhật $ABCD$ (hình minh họa bên). Nhà trường muốn thiết kế hai nhà vệ sinh dành cho giáo viên và học sinh ở hai vị trí E và B sao cho $AE = 40$ m, $DE = 10$ m, $AB = 80$ m. Trên cạnh CD người ta muốn chọn một vị trí F để khoan giếng cấp nước cho hai nhà vệ sinh. Hỏi tổng đoạn đường ống nước ngắn nhất từ giếng khoan đến hai nhà vệ sinh là bao nhiêu mét?

**Câu 21. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)**

Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương N có bốn chữ số. Nếu thêm vào mỗi chữ số của N một đơn vị thì được số mới cũng là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.

Câu 22. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Anh An có một mảnh vườn hình vuông (phần tô đậm ở hình bên) với diện tích bằng 81 m^2 . Anh An muốn mở rộng mảnh vườn này thành mảnh vườn hình chữ nhật sao cho các cạnh của hình chữ nhật cách các cạnh của hình vuông tương ứng các khoảng cách là $x; 2x; 3x$ như hình bên, trong đó $x > 0$, tính theo đơn vị mét. Biết rằng sau khi mở rộng, diện tích của mảnh vườn tăng thêm 810 m^2 . Tìm giá trị của x .



HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

Ở một cửa hàng chuyên kinh doanh miến, mỗi kilogram miến có giá nhập về là 70 nghìn đồng và giá bán ra niêm yết là 100 nghìn đồng. Biết rằng trong giá bán niêm yết đó chủ cửa hàng phải chi trả 15% cho tất cả các khoản như thuế, phí quản lý, giao hàng,... Tại thời điểm hiện nay, mỗi ngày cửa hàng đang bán được 200 kg miến. Nhân dịp khai trương thêm chi nhánh mới, chủ cửa hàng muốn chạy chương trình khuyến mãi giảm giá bán. Biết rằng nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 40 kg. Hỏi chủ cửa hàng đó cần giảm giá bao nhiêu % của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày?

Lời giải

Giả sử cửa hàng cần giảm giá $x\%$ của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày ($x \geq 0$).

Để có lợi nhuận khi bán thì $100 - x\% \cdot 100 = 100 - x > 70$ hay $x < 30$.

Nếu giảm mỗi 1% của giá bán niêm yết ban đầu thì khối lượng hàng bán được tăng thêm 40 kg, như vậy nếu giảm $x\%$ thì giá bán là $100 - x$ (nghìn đồng), khi đó mỗi ngày cửa hàng bán được $200 + 40x$ (kg). Như vậy lợi nhuận trong một ngày được tính theo biểu thức

$$T = (100 - x)(200 + 40x) - 15\%(100 - x)(200 + 40x) - 70(200 + 40x) \text{ hay } T = -34x^2 + 430x + 300.$$

$$\text{Có } T = -34x^2 + 430x + 3000 = -34\left(x - \frac{215}{34}\right)^2 + \frac{148225}{34} \leq \frac{148225}{34}.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x = \frac{215}{34}$ (thỏa mãn).

Vậy cửa hàng cần giảm giá $\frac{215}{34}\%$ của giá bán niêm yết ban đầu để thu được lợi nhuận lớn nhất trong một ngày.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Một công ty phân bón cần sản xuất ra một loại phân bón chứa 30% potassium. Họ có hai loại nguyên liệu: loại A chứa 24% potassium và loại B chứa 40% potassium. Tính khối lượng của mỗi loại nguyên liệu cần sử dụng để được hỗn hợp 500 kg chứa 30% potassium.

Lời giải

Gọi khối lượng nguyên liệu loại A, loại B lần lượt là x, y (kg, $x, y > 0$).

$$\begin{cases} x + y = 500 \\ 0,24x + 0,4y = 500 \cdot 0,3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 312,5 \\ y = 187,5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy cần 312,5 kg nguyên liệu loại A và 187,5 kg nguyên liệu loại B.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Cho hình chữ nhật có số đo chiều dài, chiều rộng (theo đơn vị cm) là hai số nguyên dương phân biệt có chữ số tận cùng bằng nhau. Biết chu vi hình chữ nhật đó bằng 2024 cm. Tìm diện tích lớn nhất có được của hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi chiều dài và rộng của hình chữ nhật lần lượt là a, b (cm), $(a, b \in \mathbb{N}^*, a > b)$.

Vì a, b có cùng chữ số tận cùng nên $a - b : 10$.

Do đó tồn tại số nguyên dương k để $a - b = 10k$ ($k \in \mathbb{N}^*$). Suy ra $a = b + 10k$.

Theo đề chu vi hình chữ nhật là 2024 cm nên $2(a + b) = 2024$. Do đó $a + b = 1012$.

Vậy nên $2b + 10k = 1012$. Do đó $b + 5k = 506$.

Để ý rằng $k \geq 1$ nên $1 \leq b \leq 501$. Ngoài ra ta có $5k = 506 - b$.

Diện tích hình chữ nhật là $S = ab = (b + 10k)b = (b + 1012 - 2b)b = b(1012 - b) = -b^2 + 1012b$.

Đặt $c = 501$. Ta sẽ chứng minh $S \leq -c^2 + 1012c$

Thật vậy ta có: $-b^2 + 1012b \leq -c^2 + 1012c$ suy ra $(b - c)(1012 - b - c) \leq 0$ hay $(b - 501)(511 - b) \leq 0$.

Điều này đúng do $1 \leq b \leq 501$

Vậy nên $S \leq -c^2 + 1012c = -501^2 + 1012 \cdot 501 = 256011$. Dấu "=" xảy ra khi $a = 511, b = 501$

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là 256011 cm^2 khi chiều dài là 511 cm, chiều rộng là 501 cm.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

Trong giải bóng đá B-League có n đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (mỗi đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một lần). Ở mỗi trận thắng - thua, đội thắng được 3 điểm và đội thua không được điểm. Ở mỗi trận hòa, mỗi đội được 1 điểm. Kết thúc giải, người ta thống kê thấy rằng số trận thắng - thua gấp 3 lần số trận hòa và tổng số điểm của tất cả các đội là 330. Tìm số trận hòa và số đội tham gia giải bóng B-League.

Lời giải

Gọi x (trận, $x \in \mathbb{N}^*$) là số trận hòa, suy ra số trận thắng thua là $3x$ (trận).

Tổng số điểm của các đội là $2 \cdot x + 3 \cdot 3x = 11x \Rightarrow 11x = 330$ hay $x = 30$ (thỏa mãn).

Số trận đấu của giải là $x + 3x = 4x = 120$ (trận).

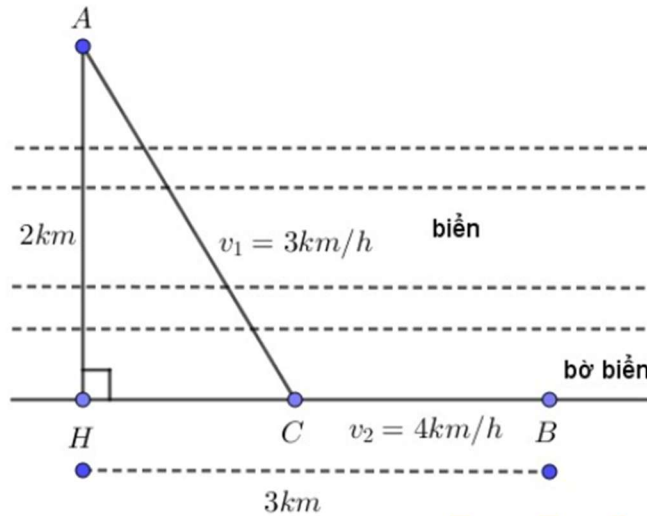
Mặt khác, số trận đấu của n đội là $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Do đó $\frac{n(n-1)}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n - 240 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 16 \\ n = -15(l) \end{cases}$.

Vậy giải đấu có 30 trận hòa và 16 đội tham dự.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Bác An ở vị trí A trên hòn đảo cách bờ biển một khoảng $AH = 2\text{ km}$, nhà bác An ở vị trí B trên bờ biển cách H một khoảng 3 km (hình vẽ bên). Bác An chèo xuồng từ A đến C với vận tốc $v_1 = 3\text{ km/h}$ (C nằm giữa H và B) và đi bộ đến B với vận tốc $v_2 = 4\text{ km/h}$. Tính độ dài BC biết thời gian chèo xuồng gấp đôi thời gian đi bộ.



Lời giải

Ta đặt $BC = x$ (km, $0 < x < 3$). Khi đó:

$$HC = 3 - x \text{ (km)} \text{ suy ra } AC = \sqrt{AH^2 + HC^2} = \sqrt{4 + (3 - x)^2} = \sqrt{x^2 - 6x + 13} \text{ (km)}$$

$$\text{Thời gian chèo xuồng: } \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}{3} \text{ (h)}, \text{ Thời gian đi bộ: } \frac{x}{4} \text{ (h)}$$

Do thời gian chèo xuồng gấp đôi thời gian đi bộ nên ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}{3} = 2 \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{2}$$

$$2\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 3x$$

$$4x^2 - 24x + 52 = 9x^2$$

$$5x^2 + 24x - 52 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-12 + 2\sqrt{101}}{5} \text{ (TM)} \\ x = \frac{-12 - 2\sqrt{101}}{5} < 0 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } BC = \frac{-12 + 2\sqrt{101}}{5} \text{ km.}$$

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Một công ty X áp dụng chính sách trả lương cho nhân viên theo hai mức: ngày làm việc bình thường và ngày làm việc đặc biệt (làm vào ngày được nghỉ), biết rằng tiền lương của một ngày làm việc đặc biệt nhiều hơn tiền lương của một ngày làm việc bình thường là 225 nghìn đồng. Trong một tháng, anh Bình là nhân viên của công ty X làm việc 24 ngày, trong đó có một số ngày làm việc đặc biệt. Bình nhận được 9 triệu đồng cho những ngày làm việc bình thường và 2,7 triệu đồng cho những ngày làm việc đặc biệt. Hỏi anh Bình được nhận bao nhiêu nghìn đồng cho mỗi ngày làm việc đặc biệt?

Lời giải

Gọi số tiền anh Bình nhận được cho mỗi ngày làm việc đặc biệt là x (nghìn đồng), ($x > 225$).

Vậy nên tiền lương một ngày bình thường của anh Bình là $x - 225$ (nghìn đồng).

Từ đó, ta có:

Số ngày làm việc đặc biệt của anh Bình là $\frac{2700}{x}$ (ngày);

Số ngày làm việc bình thường của anh Bình là $\frac{9000}{x - 225}$ (ngày).

Do anh làm tổng 24 ngày nên ta có phương trình sau:

$$\frac{2700}{x} + \frac{9000}{x - 225} = 24$$

$$\frac{2700(x - 225) + 9000x}{x(x - 225)} = 24$$

$$11700x - 607500 = 24x(x - 225)$$

$$11700x - 607500 = 24x^2 - 5400x$$

$$24x^2 - 17100x + 607500 = 0$$

$$12(x - 675)(2x - 75) = 0$$

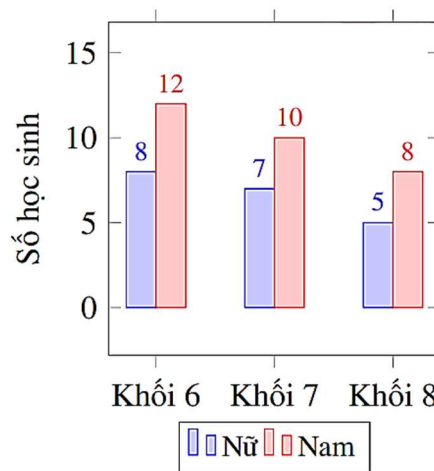
$$\begin{cases} x - 675 = 0 \\ 2x - 75 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 675 \text{ (t / m)} \\ x = \frac{75}{2} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Vậy số tiền anh Bình nhận được cho một ngày làm việc đặc biệt là 675 nghìn đồng.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội năm 2025 – 2026)

Giải bơi của một trường Trung học cơ sở ban đầu chỉ có học sinh khối 6, 7 và 8 đăng kí tham gia với số liệu học sinh được cho như trong biểu đồ cột kép ở hình bên. Ngay trước khi giải đấu diễn ra, có thêm 6 học sinh nam khối 9 và một số học sinh nữ khối 9 đăng kí bổ sung. Biết rằng tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng kí tham gia giải trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng kí bổ sung là không thay đổi. Tìm số học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu.



Lời giải

Gọi số học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu là x (học sinh, $x \in \mathbb{N}^*$).

Số học sinh nữ khối 6, 7, 8 đăng kí thi đấu là $8 + 7 + 5 = 20$ (học sinh).

Tổng số học sinh khối 6, 7, 8 đăng kí thi đấu là $8 + 12 + 7 + 10 + 5 + 8 = 50$ (học sinh).

Sau khi các học sinh khối 9 đăng kí bổ sung thì số lượng học sinh nữ đăng kí thi đấu là $20 + x$ (học sinh) và tổng số học sinh tham gia thi đấu là $50 + 6 + x = 56 + x$ (học sinh).

Vì tỉ lệ học sinh nữ so với tổng số học sinh đăng kí tham gia giải trước và sau khi các học sinh khối 9 đăng kí bổ sung là không thay đổi nên $\frac{20}{50} = \frac{20 + x}{56 + x}$.

đây tìm được $x = 4$ (thoả mãn).

Vậy số học sinh nữ khối 9 đã đăng kí thi đấu là 4 học sinh.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Lúc 6 giờ sáng, bạn Hải đi xe đạp từ vị trí A đến vị trí B , quãng đường AB dài 25 km. Khi đi được $\frac{2}{5}$ quãng đường AB , Hải dừng lại tại vị trí C để ăn sáng 35 phút. Sau đó, Hải tiếp tục đi từ C đến B với vận tốc chậm hơn 2 km/h so với tốc độ đi trên đoạn đường AC . Khi đến B , Hải nghỉ lại 45 phút và quay ngược trở lại A (theo tuyến đường ban đầu) với vận tốc bằng $\frac{3}{4}$ tốc độ đi đoạn đường

từ A đến C . Hải về A lúc 10 giờ 20 phút sáng cùng ngày Hỏi bạn Hải đến B lúc mấy giờ (giả sử tốc độ trên từng đoạn đường là không đổi)?

Lời giải

Gọi tốc độ xe đi trên đoạn đường AC là x (km/h, $x > 2$).

Từ đề bài ta có phương trình
$$\frac{\frac{2}{5} \cdot 25}{x} + \frac{7}{12} + \frac{\left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot 25}{x-2} + \frac{3}{4} + \frac{25}{\frac{3}{4} \cdot x} = \frac{13}{3}.$$

Giải phương trình cho ta hai nghiệm $x_1 = 20, x_2 = \frac{13}{9}$.

Kết hợp điều kiện, ta thu được kết quả $x = 20$.

Hải đi đến B mất $\frac{\frac{2}{5} \cdot 25}{20} + \frac{7}{12} + \frac{\left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot 25}{20-2} = \frac{23}{12}$ giờ = 1 giờ 55 phút.

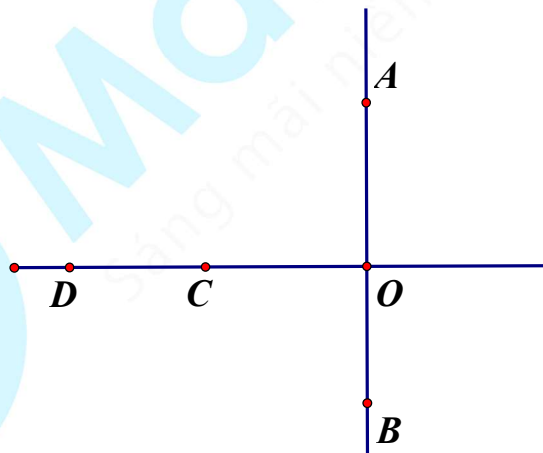
Vậy Hải đến B lúc 7 giờ 55 phút.

Câu 9. (Trường chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Một ô tô và một xe tải chuyển động cùng tốc độ không đổi a (km/h) dọc theo hai con đường giao nhau hướng đến giao lộ. Biết rằng vào các thời điểm 14 giờ và 15 giờ cùng ngày, khoảng cách từ ô tô đến giao lộ đều gấp đôi khoảng cách từ xe tải đến giao lộ. Hỏi xe tải đến giao lộ lúc mấy giờ?

Lời giải

Ta có hình vẽ sau



Trong đó:

O là vị trí của giao lộ;

Vào thời điểm 14 giờ, xe tải ở vị trí A và lúc 15 giờ, xe tải ở vị trí B ;

Vào thời điểm 14 giờ, xe ô tô ở vị trí D và lúc 15 giờ xe ô tô, ở vị trí C .

Vì vận tốc 2 xe bằng nhau nên $AB = CD$; hơn nữa theo đề bài ta có $OD = 2OA$ và $OC = 2OB$.

Từ $OA + OB = AB = a$ ta được:

$$\frac{OA}{a} + \frac{OB}{b} = 1 \quad (*)$$

Ta cũng có:

$$OA + OB = AB = CD = OD - OC = 2OA - 2OB.$$

Nên $OA = 3OB$ hay $OB = \frac{OA}{3}$. Kết hợp (*), ta có :

$$\frac{OA}{a} + \frac{OA}{3a} = 1 \text{ hay } \frac{OA}{a} + \frac{OA}{3a} = 1.$$

Suy ra $\frac{OA}{a} = \frac{3}{4}$ giờ = 45 phút.

Vậy xe tải đến giao lộ lúc 14 giờ 45 phút.

Câu 10. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Một thùng có 40 quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có một số quả bóng màu đỏ, một số quả bóng màu xanh, còn lại là những quả bóng màu khác. Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng trong thùng. Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\frac{3}{10}$, xác suất để lấy quả bóng màu xanh là $\frac{3}{8}$. Tìm số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên một quả bóng trong thùng có 40 quả.

Số phần tử của không gian mẫu là $n = 40$.

Gọi x, y lần lượt là số quả bóng màu đỏ và số quả bóng màu xanh trong thùng ($x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 40$).

Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ và màu xanh lần lượt là $\frac{x}{40}; \frac{y}{40}$.

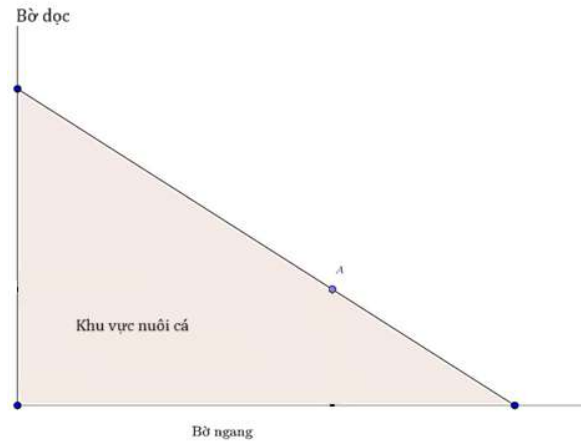
Theo giả thiết ta có $\begin{cases} \frac{x}{40} = \frac{3}{10} \\ \frac{y}{40} = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy trong thùng có số quả bóng khác màu đỏ và màu xanh là:

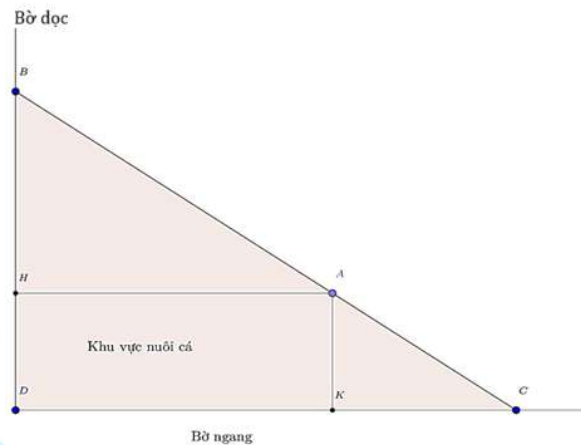
$$40 - 12 - 15 = 13 \text{ (quả bóng)}.$$

Câu 11. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Người ta giăng lưới để nuôi riêng một loại cá trên một góc ao là góc vuông. Biết rằng lưới được giăng theo một đường thẳng từ một vị trí trên bờ ngang đến một vị trí trên bờ dọc và phải đi qua cái cọc đã được cắm sẵn ở điểm A (tham khảo hình bên). Biết khoảng cách từ A đến bờ ngang là 5m và khoảng cách từ A đến bờ dọc là 12m, diện tích nhỏ nhất của khu vực cá có thể giăng là bao nhiêu mét vuông? (Hình ảnh minh họa)



Lời giải



Ta mô hình hóa bài toán với các điểm B, C, D như hình vẽ. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lần lượt trên bờ dọc và bờ ngang, khi đó $AH = 12\text{m}$, $AK = 5\text{m}$.

Đặt $BH = x$ ($x > 0$, m).

Áp dụng định lí Thales, ta có: $\frac{BH}{HD} = \frac{BA}{CA} = \frac{DK}{KC} \Rightarrow KC = \frac{HD \cdot DK}{BH} = \frac{5 \cdot 12}{x} = \frac{60}{x}$ (m).

Diện tích khu nuôi cá: $S = 6x + \frac{150}{x} + 60 \geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{150}{x}} + 60 = 120$ (m^2).

Dấu bằng xảy ra khi $6x = \frac{150}{x} \Rightarrow x = 5$ (do $x > 0$).

Vậy diện tích nhỏ nhất có thể giăng lưới là 120m^2 .

Câu 12. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

Quãng đường từ thành phố A đến thành phố B là 65 km. Vào lúc 6 h 00 sáng, người thứ nhất đạp xe xuất phát từ thành phố A đi đến thành phố B . Sau thời điểm xuất phát của người thứ nhất 1 giờ, người thứ hai đạp xe xuất phát từ thành phố B đi đến thành phố A . Hai người đi trên cùng một con đường nhưng ngược chiều nhau và gặp nhau tại địa điểm cách thành phố A là 40 km. Biết vận tốc trung bình của người thứ hai lớn hơn vận tốc trung bình của người thứ nhất ít nhất là 5 km/h. Tính thời gian của mỗi người đã đi từ lúc xuất phát đến lúc gặp nhau.

Lời giải

Gọi thời gian của người thứ hai tính từ lúc xuất phát đến khi gặp nhau là x (giờ) (điều kiện $x > 0$). Do người thứ hai xuất phát sau người thứ nhất 1 giờ nên thời gian của người thứ nhất tính từ lúc xuất phát đến khi gặp nhau là $x + 1$ (giờ).

Theo đề ra, ta có phương trình:

$$\frac{25}{x} - \frac{40}{x+1} = 5$$

$$(x+5)(x-1) = 0$$

$$x = 1 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

Vậy thời gian của người thứ hai tính từ lúc xuất phát đến khi gặp nhau là 1 giờ, thời gian của người thứ nhất tính từ lúc xuất phát đến khi gặp nhau là 2 giờ.

Câu 13. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Bác Liên đi siêu thị mua một mặt hàng đang có chương trình khuyến mãi giảm giá 20%. Vì có thể khách hàng thân thiết của siêu thị nên bác được giảm giá thêm 5% trên giá đã giảm nên bác Liên chỉ phải trả 760. nghìn đồng cho mặt hàng đó. Hỏi giá ban đầu của mặt hàng đó nếu không khuyến mãi là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi giá ban đầu của mặt hàng đó là x (nghìn đồng) ($x > 760$).

Theo đề bài ta có: $(100\% - 20\%)(100\% - 5\%)x = 760 \Rightarrow x = 1000$ (thỏa mãn)

Vậy giá ban đầu của mặt hàng khi chưa giảm giá là 1 triệu đồng.

Câu 14. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Một người đi xe máy từ tỉnh A đến tỉnh B . Sau đó 16 phút có một ô tô đi từ tỉnh B đến tỉnh A với vận tốc lớn hơn vận tốc xe máy 15 km/h . Xe máy gặp ô tô ở một địa điểm cách B 24 km . Tính vận tốc của ô tô biết rằng quãng đường AB dài 54 km .

Lời giải

Gọi vận tốc của người đi xe máy là $x \text{ (km/h, } x > 0)$, suy ra vận tốc của ô tô là $x + 15 \text{ (km/h)}$

Quãng đường xe máy đi từ tỉnh A đến điểm gặp nhau là $54 - 24 = 30 \text{ (km)}$

Thời gian xe máy đi từ tỉnh A đến điểm gặp nhau là $\frac{30}{x}$ (giờ)

Thời gian ô tô đi từ tỉnh B đến điểm gặp nhau là $\frac{24}{x+15}$ (giờ)

Đổi $16 \text{ phút} = \frac{4}{15}$ giờ

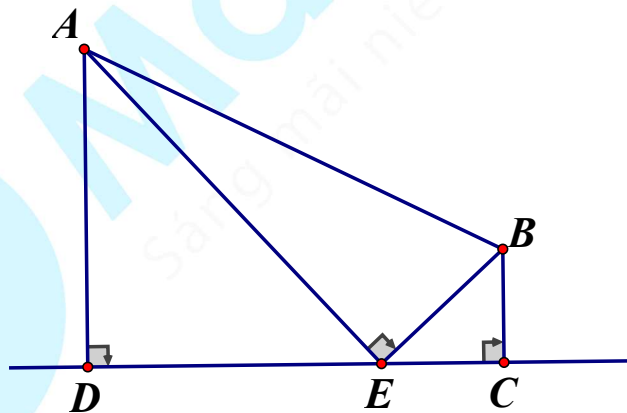
Vì ô tô xuất phát sau xe máy 16 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{30}{x} - \frac{24}{x+15} = \frac{4}{15}$$

Giải phương trình trên ta được $x = 45$ (thỏa mãn)

Vận tốc ô tô là $x + 15 = 60 \text{ (km/h)}$.

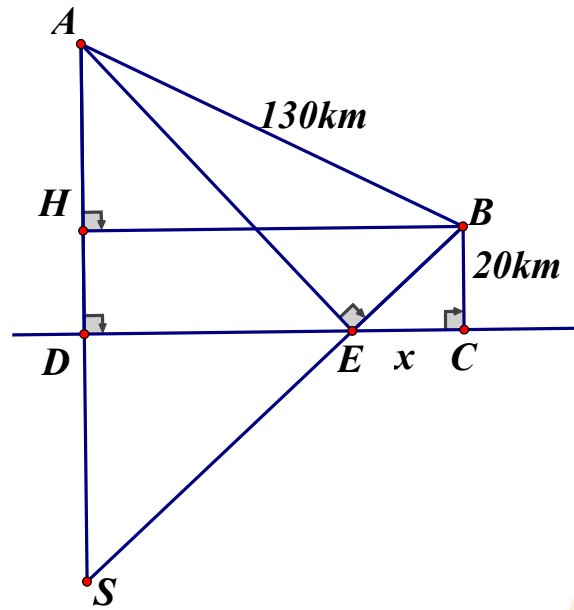
Vậy vận tốc của ô tô là 60 km/h .

Câu 15. (Trường chuyên Long An năm 2025 – 2026)

Trên hình vẽ minh họa, các điểm A, B là vị trí hai hòn đảo và đường thẳng DC là bờ biển. Biết rằng khoảng cách giữa hai đảo là $AB = 130 \text{ km}$. Khoảng cách từ đảo A đến bờ biển là $AD = 70 \text{ km}$, khoảng cách từ đảo B đến bờ biển là $BC = 20 \text{ km}$.

Trên bờ biển, người ta thiết kế một trạm trung chuyển E . Tàu hàng di chuyển theo hành trình đi từ A đến E rồi đi từ E đến B . Vị trí trạm trung chuyển E phải cách vị trí C bao nhiêu km để hành trình của tàu hàng là ngắn nhất?

Lời giải



Gọi S là điểm đối xứng với A qua đường thẳng DC .

Suy ra DC là đường trung trực của AS , suy ra $EA = ES$.

Suy ra $AE + BE = SE + EB = SB$.

Do đó để hành trình $AE + EB$ ngắn nhất thì E là giao điểm của SB và CD .

Đặt $EC = x$ (km, $x > 0$). Kẻ $BH \perp AD$ tại H .

Tứ giác $BCDH$ có $\widehat{DHB} = \widehat{HDC} = \widehat{BCD} = 90^\circ$ nên $BCDH$ là hình chữ nhật.

Suy ra $DH = BC = 20\text{km}$ và $BH = CD$.

Ta có $AD = AH + HD$ nên $AH = AD - HD = 70 - 50 = 20\text{ km}$.

Xét tam giác ABH vuông tại H có :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \text{ (định lý Pythagore)}$$

$$\text{Suy ra } HB^2 = AB^2 - AH^2 = 130^2 - 50^2 = 14400$$

$$\text{Suy ra } HB = \sqrt{14400} = 120 \text{ (km)}.$$

$$\text{Suy ra } CD = 120\text{km và } ED = 120 - x \text{ (km)}.$$

Xét $\triangle ECB$ và $\triangle EDS$ có :

$$\widehat{ECB} = \widehat{EDS} = 90^\circ; \widehat{BEC} = \widehat{SED} \text{ (2 góc đối đỉnh) suy ra } \triangle ECB \sim \triangle EDS \text{ (g.g).}$$

$$\text{Suy ra } \frac{EC}{ED} = \frac{BC}{DS} \text{ suy ra } \frac{x}{120 - x} = \frac{20}{70}.$$

$$\text{Suy ra } 7x = 2 \cdot (120 - x) \text{ suy ra } x = \frac{80}{3} \approx 26,67 \text{ (km)}.$$

Vậy vị trí trạm trung chuyển E phải cách vị trí C khoảng 26,67 km để hành trình của tàu hàng là ngắn nhất.

Câu 16. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)

Một trường học có 80 giáo viên, với tuổi trung bình là 45. Biết rằng tuổi trung bình của các giáo viên nam và giáo viên nữ trong trường lần lượt là 50 và 42. Hỏi trường đó có bao nhiêu giáo viên nam, bao nhiêu giáo viên nữ?

Lời giải

Gọi số giáo viên nam trong trường là x (người, $x \in \mathbb{N}^*, x < 80$), thì số giáo viên nữ là $80 - x$ (người)

Tổng số tuổi của tất cả 80 giáo viên là $80.45 = 3600$ (tuổi)

Tổng số tuổi của tất cả giáo viên nam và nữ lần lượt là $50x$ (tuổi) và $(80 - x).42$ (tuổi).

Khi đó: $50x + (80 - x).42 = 3600$ suy ra $x = 30$ (thoả mãn).

Như vậy số giáo viên nam là 30 người, thì số giáo viên nữ là 50 người.

Câu 17. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

a) Trong lớp bạn An có 12 học sinh nữ và một số học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng xác suất để học sinh đó là nam là 0,625. Hỏi lớp bạn An có bao nhiêu học sinh?

b) Một công ty cần thuê xe để vận chuyển 64 tấn hàng. Đơn vị cho thuê xe chỉ có hai loại xe. Loại xe thứ nhất mỗi xe chở được 15 tấn hàng có giá thuê là 12 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Loại xe thứ hai mỗi xe chở được 10 tấn hàng có giá thuê là 8 triệu đồng cho mỗi lượt vận chuyển. Hỏi chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả để vận chuyển 64 tấn hàng là bao nhiêu?

Lời giải

a) Gọi x (học sinh) là số học sinh nam của lớp bạn An ($x \in \mathbb{N}^*$).

Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = x + 12$.

Gọi A là biến cố “Chọn được học sinh nam”.

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = x$.

Ta có $P(A) = 0,625$ hay $\frac{x}{x+12} = 0,625$ hay $x = 20$ (thoả mãn).

Vậy lớp bạn An có $12 + 20 = 32$ học sinh.

b) Gọi x (xe) là số xe loại xe thứ nhất mà công ty thuê ($x \in \mathbb{N}$);

y (xe) là số xe loại xe thứ hai mà công ty thuê ($y \in \mathbb{N}$).

Ta có $15x + 10y \geq 64$.

Vì $15x + 10y$ chia hết cho 5 và $15x + 10y \in \{64; 65; 66; \dots\}$ nên giá trị nhỏ nhất của $15x + 10y$ là 65.

Dấu “=” xảy ra khi $15x + 10y = 65$ hay $3x + 2y = 13$. Suy ra $3x + 3y = 13 + y$.

Khi đó $13 + y \vdots 3$ hay $1 + y \vdots 3$.

Đặt $1 + y = 3k$ ($k \in \mathbb{N}$) hay $y = 3k - 1$.

Từ đó ta được $3x + 2(3k - 1) = 13$ hay $x = -2k + 5$.

Lại có $-2k + 5 \geq 0$ hay $k \leq \frac{5}{2}$.

Suy ra $k \in \{0; 1; 2\}$. Từ đó tìm được $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$.

Với $\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ thì chi phí thuê xe là $3.12 + 2.8 = 52$ (triệu đồng).

Với $\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 \end{cases}$ thì chi phí thuê xe là $1.12 + 5.8 = 52$ (triệu đồng).

Vậy chi phí thuê xe nhỏ nhất mà công ty phải trả là 52 triệu đồng.

Câu 18. (Trường chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Một công ty đặt kế hoạch may 3000 chiếc áo trong một thời gian. Trong sáu ngày đầu công ty thực hiện đúng tiến độ. Những ngày sau đó mỗi ngày vượt mức 10 chiếc áo nên hoàn thành công việc trước hạn một ngày và may thêm được 60 chiếc áo nữa. Hỏi theo kế hoạch mỗi ngày công ty phải may bao nhiêu chiếc áo?

Lời giải

Gọi năng suất làm việc theo kế hoạch của công ty là $x > 0$ (áo/ ngày). Theo kế hoạch, mỗi ngày công ty may được x chiếc áo, tổng là 3000 chiếc áo và thời gian may là $\frac{3000}{x}$ (ngày).

Trên thực tế, 6 ngày đầu công ty đúng tiến độ nên số chiếc áo may được là $6x$ (chiếc)

Những ngày sau mỗi ngày công ty may $x + 10$ (chiếc), số chiếc áo may được là $3060 - 6x$ (chiếc) với thời gian may là $\frac{3060 - 6x}{x + 10}$ (ngày)

Do hoàn thành kế hoạch sớm 1 ngày so với dự định nên ta có phương trình

$$\frac{3000}{x} = 1 + 6 + \frac{3060 - 6x}{x + 10} = \frac{x + 3130}{x + 10}$$

$$x^2 + 33130x = 3000x + 30000$$

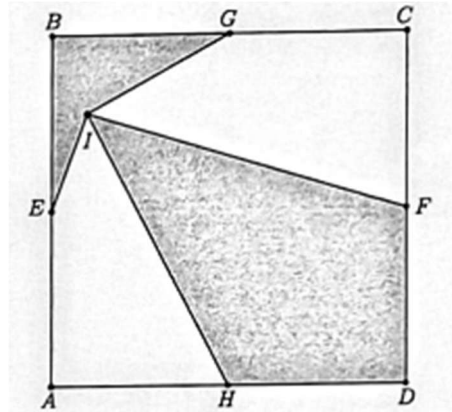
$$x^2 + 130x - 30000 = 0$$

Suy ra: $x = 120$ (thỏa mãn) hoặc $x = -250$ (không thỏa mãn)

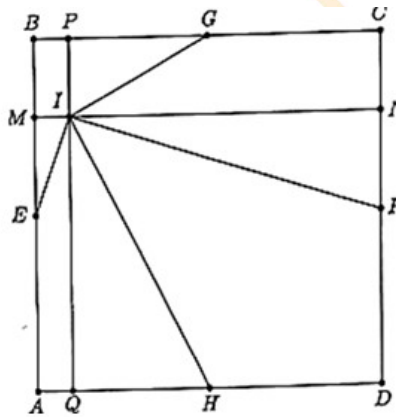
Vậy theo dự kiến mỗi ngày công ty may 120 chiếc áo.

Câu 19. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Ông X có mảnh vườn hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 10 m với E, G, F, H lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DA . Từ một điểm I bên trong mảnh vườn ông chia vườn thành bốn phần như hình vẽ, phần tô đen nhỏ có diện tích 8 m^2 dùng để trồng cỏ, phần tô đen còn lại dùng để trồng hoa. Biết rằng mỗi m^2 trồng cỏ hết 80 nghìn đồng, mỗi m^2 trồng hoa hết 120 nghìn đồng. Hỏi ông X cần bao nhiêu tiền để thực hiện trang trí mảnh vườn đó.



Lời giải



Kẻ các đường thẳng qua I vuông góc AB, BC cắt các cạnh hình vuông tại M, N, P, Q .

$$S_{IEBG} = S_{IEB} + S_{IBG} = \frac{1}{2} BE \cdot IM + \frac{1}{2} BG \cdot IP = \frac{5}{2} (IM + IP)$$

$$S_{IFDH} = S_{IFD} + S_{IDH} = \frac{1}{2} DF \cdot IN + \frac{1}{2} DH \cdot IQ = \frac{5}{2} (IN + IQ)$$

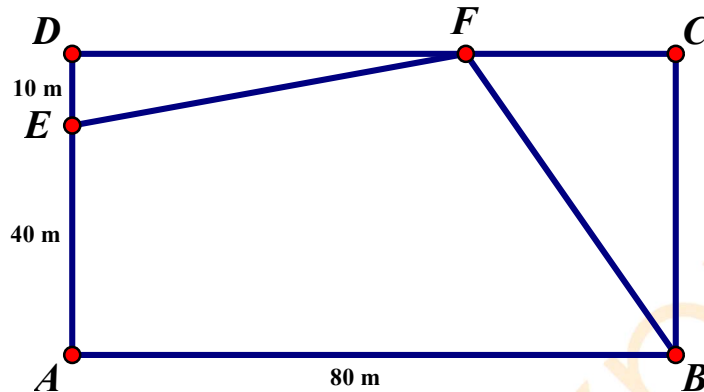
$$\Rightarrow S_{IEBG} + S_{IFDH} = \frac{5}{2} (IM + IN + IP + IQ) = \frac{5}{2} \cdot 20 = 50 (\text{m}^2)$$

$$\text{Do } S_{IEBG} = 8 (\text{m}^2) \Rightarrow S_{IFDH} = 42 (\text{m}^2)$$

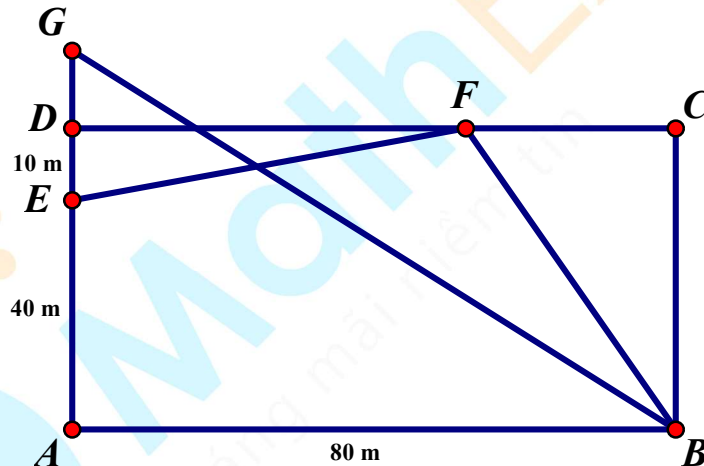
Vậy số tiền T cần để thực hiện là $T = 8.80000 + 42.120000 = 5680000$ (đồng)

Câu 20. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

Một sân trường hình chữ nhật $ABCD$ (hình minh họa bên). Nhà trường muốn thiết kế hai nhà vệ sinh dành cho giáo viên và học sinh ở hai vị trí E và B sao cho $AE = 40$ m, $DE = 10$ m, $AB = 80$ m. Trên cạnh CD người ta muốn chọn một vị trí F để khoan giếng cấp nước cho hai nhà vệ sinh. Hỏi tổng đoạn đường ống nước ngắn nhất từ giếng khoan đến hai nhà vệ sinh là bao nhiêu mét?



Lời giải



Lấy $G \in$ tia đối của tia DA sao cho $GD = 10$ (m)

$\Rightarrow GD = DE$ mà $FD \perp GE \Rightarrow \triangle FEG$ cân tại $F \Rightarrow FE = FG$

Lại có $EF + FB = GF + FB \geq GB$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi G, F, B thẳng hàng

$$\Rightarrow EF + FB_{\min} = GB_{\min} = \sqrt{AG^2 + AB^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3600 + 6400} = 100$$

Vậy tổng đoạn đường ống nước ngắn nhất từ giếng khoan đến hai nhà vệ sinh là 100 m.

Câu 21. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Anh Bình cần rút tiền trong thẻ ATM để chi tiêu cá nhân nhưng lại quên mật khẩu đăng nhập tài khoản. Biết rằng mật khẩu là một số chính phương N có bốn chữ số. Nếu thêm vào mỗi chữ số của N một đơn vị thì được số mới cũng là số chính phương có bốn chữ số. Em hãy giúp anh Bình tìm lại mật khẩu đã quên.

Lời giải

Gọi mã số mật khẩu của thẻ ATM là $\overline{abcd}$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}; 0 < a < 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$).

Vì mật khẩu đã cho là một số chính phương nên $\overline{abcd} = m^2$ ($m \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Suy ra } 1000a + 100b + 10c + d = m^2 \quad (1)$$

Theo giả thiết, khi thêm vào mỗi chữ số của N một đơn vị thì được số mới cũng là số chính phương có bốn chữ số nên ta được: $1000(a+1) + 100(b+1) + 10(c+1) + (d+1) = n^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Hay } 1000a + 100b + 10c + d + 1111 = n^2 \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta được: } n^2 - m^2 = 1111, \text{ hay } (n-m)(n+m) = 1111$$

Vì $n+m > 0, n-m < n+m$ và $1111 = 1 \cdot 1111 = 11 \cdot 101$ nên ta xét các trường hợp:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} n-m=1 \\ n+m=1111 \end{cases}$$

$$\text{Giải hệ phương trình trên, ta được: } \begin{cases} n=556 \\ m=555 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy $555^2 = 308025$ không phải là số chính phương có bốn chữ số.

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} n-m=11 \\ n+m=101 \end{cases}$$

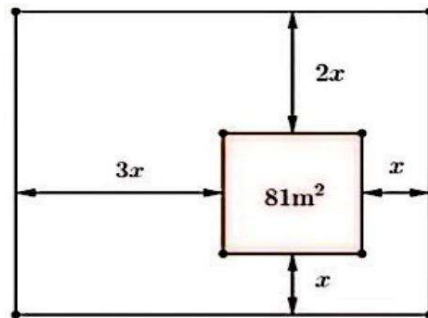
$$\text{Giải hệ phương trình trên, ta được: } \begin{cases} n=56 \\ m=45 \end{cases}$$

Thử lại ta thấy $45^2 = 2025$ là số chính phương có bốn chữ số.

Vậy mật khẩu mà anh Bình đã quên là 2025.

Câu 22. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Anh An có một mảnh vườn hình vuông (phần tô đậm ở hình bên) với diện tích bằng 81 m^2 . Anh An muốn mở rộng mảnh vườn này thành mảnh vườn hình chữ nhật sao cho các cạnh của hình chữ nhật cách các cạnh của hình vuông tương ứng các khoảng cách là $x; 2x; 3x$ như hình bên, trong đó $x > 0$, tính theo đơn vị mét. Biết rằng sau khi mở rộng, diện tích của mảnh vườn tăng thêm 810 m^2 . Tìm giá trị của x .

**Lời giải**

Vì diện tích mảnh vườn hình vuông ban đầu là $81 (\text{ m}^2)$ nên độ dài cạnh hình vuông lúc đầu là $9 (\text{ m})$. Sau khi mở rộng mảnh vườn, chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là $4x + 9$ và $3x + 9 (\text{ m})$. Khi đó diện tích mảnh vườn sau khi mở rộng là $(4x + 9)(3x + 9) (\text{ m}^2)$.

Vì sau khi mở rộng, diện tích của mảnh vườn tăng thêm $810 (\text{ m}^2)$ nên ta có phương trình

$$(4x + 9)(3x + 9) = 810 + 81 \text{ hay } 12x^2 + 65x - 810 = 0.$$

Giải phương trình trên, ta được $x = 6$ (thoả mãn) hoặc $x = -\frac{45}{4}$ (không thoả mãn).

Vậy $x = 6 (\text{ m})$.