

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC VÀ TỔ HỢP TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

I. Số học

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$x^2 + (x-1)^2 = y^4 + (y-1)^4.$$

b) Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $5^n - 1$ chia hết cho $(5^m - 1)^2$. Chứng minh rằng: n chia hết cho $m(5^m - 1)$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(y+5)x^2 + 3(x-1) = y$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x(x-y-1) + y(y-1) = 3$.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy + 3x - 2y^2 - 3y - 3 = 0$.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

Cho p là số nguyên tố khác 2, hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a+b$ chia hết cho p , và $a-b$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng $a^b + b^a$ chia hết cho $2p$.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình sau:

$$2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7.$$

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 2xy + 3y - x - 1 = 0$.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^3b-1}{a+1}$ và $\frac{b^3a+1}{b-1}$ đều là các số nguyên.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Tìm các số nguyên dương x, y để A, B đồng thời là các số chính phương biết $A = x^2 + y + 1$ và $B = y^2 + x + 4$.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - kxy + y^2 + 1 = 0$.

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Tìm các số nguyên dương x sao cho $x^2 + x + 10$ là số chính phương.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Tìm ba số nguyên dương x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn hai điều kiện

(1). $x^2 + xy + y^2 + (3z^2 - z - 4)(x + y) = 10z^2 - 3$;

(2). Trong bốn số $x + y + 3z^2 - 1, x + y - 3, x + z, y + z$ có đúng một hợp số.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình: $xy - x + 3y = 6$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n - 1; 3n + 1$ là các số chính phương và $6n - 13$ là số nguyên tố.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2025 – 2026)

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên

$$y^2 - 5y + 62 = (y - 2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x.$$

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

a) Chứng minh trong 37 số nguyên dương bất kỳ, luôn tìm được 7 số có tổng chia hết cho 7.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mọi số nguyên dương a, b thì hai số $a + 8b$ và $6a + 43b$ hoặc cùng chia hết cho p hoặc cùng không chia hết cho p .

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn

$$(x^2 - x + 1)(y^2 - xy - 5) = 2x + 5.$$

Câu 18. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

a) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $3a^2 - bc, 3b^2 - ca, 3c^2 - ab$ đều chia hết cho 4. Chứng minh abc chia hết cho 8.

b) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2(2x - y)(y - x)^2 = 15x - 7y + 7$.

Câu 19. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$25^y + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4) \cdot 5^y.$$

Câu 20. (Trường chuyên Tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

a) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{3}{b+2} = \frac{5}{c+4}$. Chứng minh abc chia hết cho 4.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn: $x(x - 2y) = y^3 - 3y^2 + 2y - 1$.

Câu 21. (Trường chuyên Tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $(a + 2b)(2a + c) = (a^2 - bc)^2$. Chứng minh $4ab + 1$ là số chính phương.

Câu 22. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p + q$ và $p + 4q$ đều là các số chính phương.

Câu 23. (Trường chuyên Hải Dương năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$.

Câu 24. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $8a^3 + 18ab + 1$ và $8b^3 + 18ab + 1$ đều là lập phương của số nguyên.

Câu 25. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

Câu 26. (Trường chuyên Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Số nguyên dương n được gọi là số “đẹp” nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ để $n = a^2 + 7b^2$.

a) Tìm hai số đẹp chia hết cho 11.

b) Chứng minh nếu n là số đẹp chia hết cho 11 thì $\frac{n}{11}$ cũng là số đẹp.

Câu 27. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

a) Tìm các cặp số nguyên không âm $(a; b)$ thỏa mãn $(ab - 5)^2 - a^2 = b(a + b)$.

b) Tìm các bộ số nguyên dương $(x; y; p)$ với p nguyên tố, thỏa mãn $(x^3 + x + 3)(x^2 - x + 1) = p^y$.

Câu 28. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình :

$$(x^2 + 3)y^2 - (x - 2y)(x + 2y + 1) = 25x + 2y + 169.$$

Câu 29. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

a) Cho $p, q (p > q > 5)$ là 2 số nguyên tố. Chứng minh $p^8 - q^4$ chia hết cho 240.

b) Tìm tất cả số nguyên dương n và số nguyên tố p thỏa $n^{2044} + 4n + p^2$ chia hết cho np .

Câu 30. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương n và các số nguyên tố p , thỏa mãn: $n + 7p = (n - p)^3$.

Câu 31. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh $ab - a - b + 1$ chia hết cho 192.

Câu 32. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 9$ không chia hết cho 25.

Câu 33. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

a) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc = 0$.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 12.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 - 6(x - y)^2 - y^3 = 13$.

Câu 34. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Cho n, m là các số tự nhiên và $n^4 + m^4$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $n^{2025} + m^{2025}$ cho 5.

Câu 35. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số $n^5 - 6n + 33$ không là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b + 1$ là ước nguyên tố của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$. Chứng minh rằng $a + b - 1$ là ước của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$.

Câu 36. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

a) Biết rằng $(1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1) \dots (n^2 + 1)$ chia hết cho 1297^2 , với n là số nguyên dương.

Chứng minh $n \geq 649$.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn các điều kiện sau: $a - b$ là số nguyên tố, ab là số chính phương và $a + b - 3$ chia hết cho 5.

Câu 37. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2xy + 2x + x + y = 0$.

Câu 38. (Trường chuyên Phú Thọ năm 2025 – 2026)

a) Cho p là số nguyên tố; a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{p}{a} + \frac{p}{b} = 1$ và $a + b$ chia hết cho p .

Chứng minh rằng $\frac{a+b}{p} = 4$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n \geq 100$ sao cho $2^n + 3^n + 6^n - 1$ chia hết cho 2026.

Câu 39. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + 64b^3 - 2024c^3 + 2026d^3 = 0$.

Chứng minh rằng $(a + b + c + d)^2$ chia hết cho 9.

Câu 40. (Trường chuyên Quảng Bình năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $(x - y)(x + y) + x^2(1 - y) = 17 - 2y$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Câu 41. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $6xy - 3x + 2y - 8 = 0$.

b) Cho $A = (9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n)$ với m và n là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A chia hết cho 19 thì A có ít nhất một ước số là số chính phương khác 1.

Câu 42. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > c > 1$ và $abc + 1$ chia hết cho $ab - b + 1$. Chứng minh b chia hết cho a .

Câu 43. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

a) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $y^3 + 3y^2 + 3y + x^2 - 6x = 23$.

b) Tìm các số nguyên tố p, q với $p < q$ thỏa mãn số $A = 2(p^2 + 1)(5q^2 + 29)$ có thể viết được dưới dạng tích của từ hai số nguyên liên tiếp trở lên.

Câu 44. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)

a) Giả sử a và b là các số nguyên sao cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ nhận số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ làm nghiệm (p và q nguyên tố cùng nhau). Chứng minh p chia hết cho q .

b) Tìm tất cả các số hữu tỉ dương x, y sao cho xy và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ đều là các số nguyên.

Câu 45. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $x^2 - xy - x + 2y + 1 = 0$.

Câu 46. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$.

b) Cho số nguyên dương n và biểu thức $A = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Chứng minh: $3A$ chia hết cho $2n + 1$ và $\frac{24A + 2n + 1}{2n + 1}$ là một số chính phương.

Câu 47. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

a) Cho số nguyên dương n là tích của ba số nguyên tố phân biệt. Biết rằng, tổng tất cả các ước nguyên dương của n bằng $2n - 16$. Chứng minh rằng $n - 8$ chia hết cho 6.

b) Cho p là số nguyên tố thỏa mãn $p - 1$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng $p^3 - p^2 - 4$ không phải là số chính phương.

Câu 48. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^3 + y^3 + 2x^2y + xy^2 = 2xy - 5$.

b) Tìm tất cả các bộ số $(x; y; p)$ thỏa mãn $\frac{xy^3}{x + y} = p$, biết x, y, p là các số nguyên dương và p là số nguyên tố.

Câu 49. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$, trong đó x và y là số nguyên tố thỏa mãn $x^4 + 227 = y^5$.

Câu 50. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng:

- $A = 4^p - 3^p - 1$ chia hết cho $3p$.
- $A = 4^p - 3^p - 1$ chia hết cho $39p$.

II. Tổ hợp

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

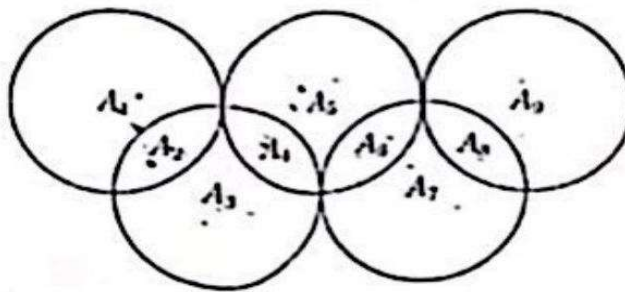
Cho đa giác đều $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$. Tại mỗi đỉnh A_k , người ta ghi một số nguyên a_k ($k = 1; 2; \dots; 2026$) sao cho $a_i \neq a_j; \forall i, j \in \{1; 2; \dots; 2026\}, i \neq j$ và giá trị tuyệt đối của hiệu hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau là một số không lớn hơn 5. Tìm giá trị lớn nhất của $|a_i - a_j|; \forall i, j \in \{1; 2; \dots; 2026\}$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$ và $AC = 6$ cm. Chứng minh rằng, với 25 điểm bất kì trong hình thoi này thì luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá 1 cm.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

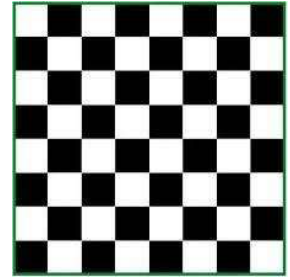
Cho 5 đường tròn có cùng bán kính và sắp xếp để tạo thành 9 miền được kí hiệu là $A_1, A_2, \dots, A_9$ (như hình vẽ). Sau đó, điền vào 9 miền trên các số được lấy từ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 sao cho mỗi miền được điền bởi một số, hai miền khác nhau được điền bởi hai số khác nhau và tổng các số trong mỗi hình tròn đều bằng 14.



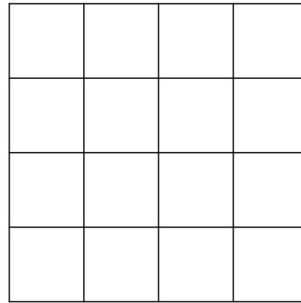
- Tính tổng các số ở các miền A_2, A_4, A_6, A_8 .
- Hỏi có bao nhiêu cách điền thỏa mãn điều kiện trên? Vì sao?

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Cho bàn cờ vua có 64 ô vuông như hình vẽ. Trong mỗi ô vuông của bàn cờ ghi ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 10 đồng thời hai số được ghi trong hai ô vuông có chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trên bàn cờ tồn tại một số xuất hiện ít nhất 11 lần.

**Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)**

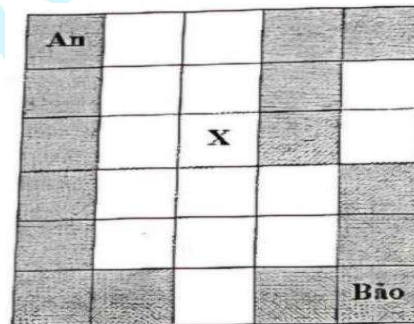
Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như hình sau:



Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau. Trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng ba số còn lại trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Câu 6. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

Trên sân trường có một bảng ô vuông kích thước 6 m x 5 m. Có 15 học sinh mặc áo màu xanh (trong đó chỉ có đúng một học sinh tên An và một học sinh tên Bảo) và 14 học sinh mặc áo màu trắng xếp hình thành chữ LS (viết tắt chữ Lam Sơn) sao cho mỗi học sinh đứng ở một ô vuông 1 m x 1 m, dư lại một ô vuông trống (đánh dấu X), hai học sinh mặc áo xanh tên An và Bảo đứng ở hai ô vuông góc đối diện như hình vẽ (bảng 1).



Bảng 1

Bảo				
		X		
				An

Bảng 2

Cho phép đổi vị trí các học sinh trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, chọn một học sinh đứng ở ô vuông kề với ô vuông trống rồi chuyển học sinh đó sang ô vuông trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển học sinh theo quy tắc trên đối với bảng 1 ta có thể nhận được cách xếp sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí như hình vẽ (bảng 2) hay không? Vì sao?

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Cho tập hợp $A = \{201; 203; \dots; 2021; 2023\}$ gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp A sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

Trong giải bóng đá B-League có n đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (mỗi đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một lần). Ở mỗi trận thắng - thua, đội thắng được 3 điểm và đội thua không được điểm. Ở mỗi trận hòa, mỗi đội được 1 điểm. Kết thúc giải, người ta thống kê thấy rằng số trận thắng - thua gấp 3 lần số trận hòa và tổng số điểm của tất cả các đội là 330. Tìm số trận hòa và số đội tham gia giải bóng B-League.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy k số thuộc S luôn tồn tại hai số x, y với $x > y$ trong k số đã lấy sao cho $x + y$ chia hết cho $x - y$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội năm 2025 – 2026)

Hai trường trung học cơ sở A và B tổ chức chung một buổi liên hoan cho các học sinh tiêu biểu. Biết rằng trong buổi liên hoan này:

- Mỗi học sinh trường A quen với đúng 5 học sinh khác cũng của trường A ;
- Mỗi học sinh trường A quen với đúng 4 học sinh trường B ;
- Mỗi học sinh trường B quen với đúng 3 học sinh trường A ;
- Tổng số học sinh của hai trường tham dự không vượt quá 80.

(1). Số học sinh trường A tham dự buổi liên hoan có thể là 25 học sinh được không? Vì sao?

(2). Tổng số học sinh của hai trường tham dự buổi liên hoan có thể nhiều nhất là bao nhiêu? Vì sao?

Câu 11. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Một tập M các số thực phân biệt được gọi là tập đặc biệt nếu nó có những tính chất sau:

- a) Với mỗi $x, y \in M$, $x = y$ thì $xy \neq 0$, $x + y \neq 0$ và đúng một trong hai số xy , $x + y$ là số hữu tỷ;
 b) với mỗi $x \in M$ thì x^2 là số vô tỷ. Hãy tìm số phần tử lớn nhất có thể có của tập đặc biệt.

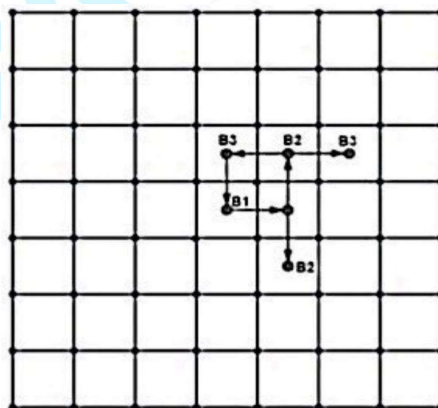
Câu 12. (Trường chuyên Tin KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Xét bảng ô vuông kích thước $n \times n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng bảng ô vuông đó có thể được phủ kín bởi hai loại mảnh ghép 1×1 và 8×8 sao cho không có hai mảnh ghép nào chồng lên nhau, số lượng hai loại mảnh ghép được dùng là bằng nhau và mỗi ô vuông nhỏ của các mảnh ghép chồng khít với một ô vuông của bàn cờ.

- a) Chứng minh n chia hết cho 5.
 b) Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Câu 13. (Trường chuyên Hải Dương năm 2025 – 2026)

Cho bảng ô vuông 7×7 gồm 9 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở cùng một ô vuông không.



Câu 14. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Cho tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 15\}$. Xét T là một tập con của S và có tính chất: với a, b, c bất kỳ thuộc T (a, b, c đôi một khác nhau) thì tích abc không là số chính phương. Hỏi T có nhiều nhất bao nhiêu phần tử? (Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B).

Câu 15. (Trường chuyên Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

- a) Cho S là tập hợp các số nguyên $|a| \leq 100$. Lấy a ngẫu nhiên thuộc S , tính xác suất để a thỏa mãn phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ có các nghiệm nguyên.
- b) Cho $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ và B là các tập hợp con chứa 11 phần tử thuộc A . Chứng minh rằng B luôn chứa a, b, c đôi một phân biệt sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác.

Câu 16. (Trường chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Cho bảng ô vuông kích thước 2×9 và số nguyên dương $k \leq 18$. Hai ô của bảng được gọi là kề nhau nếu chúng có một cạnh chung. Hai bạn An và Bình chơi trò “Truy Tìm Tàu Ngầm” như sau: Trước khi trò chơi bắt đầu, An chọn một ô trên bảng và không cho Bình biết. Ở mỗi lượt chơi:

An phải chọn một ô mới, kề bên với ô đã chọn trước đó, và không cho Bình biết;

Sau khi An chọn xong, Bình chọn k ô của bảng và hỏi An: trong k ô này có ô An vừa chọn hay không? Nếu có thì Bình thắng, nếu không thì hai bạn lại chơi lượt tiếp theo.

- a) Chứng minh rằng với $k=4$. Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt.
- b) Chứng minh rằng với $k=2$. Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt.

Câu 17. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

Cho bảng vuông kích thước 8×8 gồm 64 ô vuông, có 8 hàng và 8 cột. Ta điền vào tất cả các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông điền đúng một số nguyên dương thuộc tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 64\}$ (hai ô vuông khác nhau điền hai số khác nhau).

- a) Ta gọi một thanh dọc là hình gồm 7 ô vuông liên tiếp thuộc cùng một cột. Xét một cách điền sao cho mọi thanh dọc đều chứa tối đa 3 số chẵn. Chứng minh mỗi cột chứa ít nhất 4 số lẻ.
- b) Với cách điền như câu a), chứng minh tồn tại ít nhất hai hàng chứa toàn số chẵn.
- c) Một cặp số gọi là “không thân thiện nhau” nếu chúng nằm ở hai ô vuông kề nhau (là hai ô vuông có chung cạnh) và hiệu của chúng (số lớn trừ số bé) lớn hơn 4. Chứng minh với mọi cách điền số, có thể tìm được một cặp số “không thân thiện nhau”.

Câu 18. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

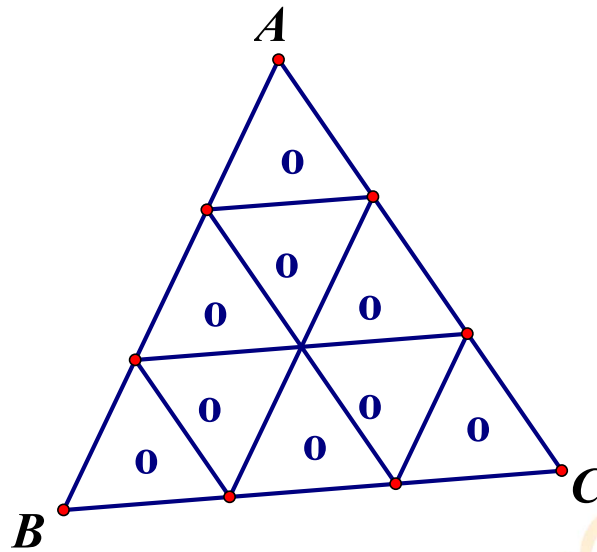
Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ là đa giác đều 2024 đỉnh, trong đó đỉnh A_{2009} được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh. Đổi màu các đỉnh của đa giác theo quy tắc:

Mỗi lần chọn 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật rồi đổi màu đồng thời 4 đỉnh ấy (đỏ thành xanh và xanh thành đỏ).

Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy, có thể thu được kết quả đỉnh A_{2009} và A_{997} cùng màu hay không? Vì sao?

Câu 19. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Chia tam giác đều ABC thành 9 tam giác con, rồi điền vào mỗi tam giác con một số 0, như ở hình dưới đây.



Cho phép thay đổi các số trong tam giác ABC , theo qui ước: Mỗi lần, lấy hai số nằm ở hai tam giác con có chung cạnh, rồi tăng mỗi số lên 1 đơn vị, hoặc giảm mỗi số đi 1 đơn vị.

Nằm trong tam giác ABC là 9 số tự nhiên liên tiếp từ 4 đến 12 được hay không? Vì sao?

Câu 20. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Tô màu mỗi điểm trong mặt phẳng bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ, mỗi điểm được tô bởi đúng một màu. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng mà hai đầu mút và trung điểm của nó được tô cùng màu.

Câu 21. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2025. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tồn tại hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Câu 22. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành $2n$ ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương n để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.

Câu 23. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Trên bảng có dãy số $1; 2; 3; \dots; 2025$ ta thực hiện như sau: Nếu trên bảng có 4 số $a; b; c; d$ sao cho $d = a + b + c$ thì ta xóa 4 số đó và viết 3 số $a + b; b + c; c + a$ lên bảng. Giả sử tại một thời điểm trên bảng còn n số: $a_1; a_2; \dots; a_n$. Chứng minh rằng $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \dots + a_n^4 - 9$ chia hết cho 12 và $n \geq 1520$.

Câu 24. (Trường chuyên Phú Thọ năm 2025 – 2026)

An có 10 hộp đựng bi, mỗi hộp có 3 viên bi. Các viên bi được tô bởi một trong 5 màu: xanh, đỏ, tím, vàng, nâu; sao cho các viên bi trong cùng hộp có màu khác nhau và không có 2 hộp nào có 3 màu bi tương ứng giống nhau.

An nói rằng mình muốn lấy ra từ mỗi hộp 1 viên bi. Bình nghe thấy thế khẳng định: "Sau khi An lấy bi, chắc chắn sẽ có 2 hộp bi mà 2 viên bi còn lại trong mỗi hộp có màu tương ứng giống nhau."

Theo em, Bình nói đúng hay sai? Em hãy giải thích khẳng định của mình.

Câu 25. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

Bạn Bình có 18 thẻ gỗ, mỗi thẻ được đánh một số bất kì từ 1 đến 2526 (mỗi số trên mỗi thẻ là một số tự nhiên). Chứng minh rằng bạn Bình có thể chọn ra 3 thẻ sao cho ba số trên 3 thẻ đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 26. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Một cây khế có 20 quả khế màu xanh và 25 quả khế màu vàng. Một con quạ đến ăn mỗi ngày đúng 3 quả khế. Tuy nhiên cây khế sẽ ra quả mới như sau:

- Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu xanh thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh.
- Nếu con quạ ăn 2 quả khế màu xanh và 1 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng.
- Nếu con quạ ăn 1 quả khế màu xanh và 2 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh.
- Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng.

Cuối cùng trên cây khế còn lại đúng 1 quả. Hỏi quả khế cuối cùng màu gì? Giải thích?

Câu 27. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

Cho đa giác đều 2025 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

Câu 28. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

Bạn Thái viết ra bảng 100 số nguyên dương đôi một phân biệt, mỗi số không lớn hơn 2^{98} . Đối với mỗi cặp số $(a; b)$ được bạn Thái viết ra, bạn Nguyên viết số $a + b - \text{UCLN}(a, b)$ trên bảng. Chứng minh rằng, có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các số mà bạn Thái viết.

HƯỚNG DẪN GIẢI

I. Số học

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$x^2 + (x-1)^2 = y^4 + (y-1)^4.$$

b) Cho hai số nguyên dương m, n thỏa mãn $5^n - 1$ chia hết cho $(5^m - 1)^2$. Chứng minh rằng: n chia hết cho $m(5^m - 1)$.

Lời giải

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn phương trình

$$x^2 + (x-1)^2 = y^4 + (y-1)^4.$$

Thu gọn hai vế của đẳng thức cho thành

$$x^2 - x = y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 2y.$$

Hay $x^2 - x + 1 = (y^2 - y + 1)^2$, suy ra $x^2 - x + 1$ là số chính phương.

Đặt $x^2 - x + 1 = a^2$ ($a \in \mathbb{Z}$) thì $(2x-1)^2 + 3 = 4a^2$ hay $(2a-2x+1)(2a+2x-1) = 3$.

Giải tìm được $x=0, x=1$.

Thay trở lại tìm được $(x, y) \in \{(0, 0); (0, 1); (1, 1); (1, 0)\}$.

Thử lại thấy thỏa mãn.

Vậy tất cả các cặp số nguyên thỏa mãn bài toán là $(x, y) \in \{(0, 0); (0, 1); (1, 1); (1, 0)\}$.

b) Từ giả thiết có $n > m$ và $5^n - 1$ chia hết cho $5^m - 1$.

Đặt $n = km + r$ ($k, n \in \mathbb{N}, k > 0, 0 \leq r < m$) thì $5^n - 1 = 5^{km+r} - 1 = (5^{km} - 1) \cdot 5^r + 5^r - 1$.

Do $5^{km} - 1$ chia hết cho $5^m - 1$ nên $5^r - 1$ chia hết cho $5^m - 1$.

Lại do $0 \leq 5^r - 1 < 5^m - 1$ nên phải có $5^r - 1 = 0$ hay $r = 0$.

Suy ra n chia hết cho m nên $n = mk$.

Đặt $5^m = a$ ($a \in \mathbb{N}^*, a > 1$) thì $a^k - 1$ chia hết cho $(a-1)^2$.

Để ý rằng $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1)$ nên $a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1$ chia hết cho $a-1$

Mặt khác $a^{k-1} + a^{k-2} + \dots + a + 1 \equiv 1^{k-1} + 1^{k-2} + \dots + 1 + 1 \equiv k \pmod{a-1}$.

Do đó k chia hết cho $a-1$.

Vậy $n = mk$ chia hết cho $m(5^m - 1)$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $(y+5)x^2 + 3(x-1) = y$.

Lời giải

$$(y+5)x^2 + 3(x-1) = y$$

$$(y+5)(x^2-1) + 3(x-1) + 5 = 0$$

$$(x-1)((y+5)(x+1) + 3) = -5$$

Đến đây ta suy ra $5 \mid (x-1)$ nên $x-1 \in \{\pm 1; \pm 5\}$ hay $x \in \{-4; 0; 2; 6\}$.

Với $x = -4$ thì $16(y+5) - 15 = y$ hay $y = -\frac{13}{3}$, không thỏa mãn.

Với $x = 0$ thì $y = -3$, thỏa mãn.

Với $x = 2$ thì $4(y+5) + 3 = y$ hay $y = -\frac{23}{3}$, không thỏa mãn.

Với $x = 6$ thì $36(y+5) + 15 = y$ hay $y = -\frac{39}{7}$, không thỏa mãn.

Vậy $(x; y) = (0; -3)$.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên dương của phương trình $x(x-y-1) + y(y-1) = 3$.

Lời giải

$$x^2 - xy - x + y^2 - y = 3$$

$$2x^2 - 2xy - 2x + 2y^2 - 2y = 6$$

$$(x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 8$$

$$0 \leq (x-1)^2 \leq 8 \text{ hay } 0 \leq x-1 \leq 2 \text{ hay } 1 \leq x \leq 3$$

Suy ra: $x \in \{1; 2; 3\}$

Với $x=1$ thì $y^2 - y + 1 - y - 1 = 3$ hay $y^2 - 2y - 3 = 0$ suy ra $y=3$ ($y=-1$ loại)

Với $x=2$ thì $y^2 - 3y + 1 = 0$ (loại)

Với $x=3$ thì $y^2 - 4y + 3 = 0$. Suy ra: $(x; y) = (3; 3)$ hoặc $(x; y) = (3; 1)$.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(1; 3); (3; 1); (3; 3)\}$.

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - xy + 3x - 2y^2 - 3y - 3 = 0$.

Lời giải

$$x^2 - xy + 3x - 2y^2 - 3y - 3 = 0$$

$$x^2 - (y-3)x - 2y^2 - 3y + 2 = 5$$

$$(x-2y+1)(x+y+2) = 5$$

$$\begin{array}{ll} \text{TH1: } \begin{cases} x-2y+1=1 \\ x+y+2=5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases} & \text{TH2: } \begin{cases} x-2y+1=5 \\ x+y+2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases} \text{ (loại)} \\ \text{TH3: } \begin{cases} x-2y+1=-5 \\ x+y+2=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-4 \\ y=1 \end{cases} & \text{TH4: } \begin{cases} x-2y+1=-1 \\ x+y+2=-5 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\frac{16}{3} \\ y=-\frac{5}{3} \end{cases} \text{ (loại)} \end{array}$$

Vậy có 2 cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(2; 1), (-4; 1)$.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

Cho p là số nguyên tố khác 2, hai số tự nhiên a, b thỏa mãn $a+b$ chia hết cho p , và $a-b$ chia hết cho $p-1$. Chứng minh rằng $a^b + b^a$ chia hết cho $2p$.

Lời giải

Ta chỉ cần chứng minh $a^b + b^a \vdots p$ do đây là 2 số lẻ.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a \geq b$.

Nếu a chia hết cho p thì b cũng chia hết cho p và ta có điều phải chứng minh.

Nếu $(a; p) = (b; p) = 1$ ta có bổ đề sau:

Bổ đề: Cho số nguyên tố p và số nguyên a không chia hết cho p . Khi đó $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Chứng minh: Nếu $p = 2$ khẳng định hiển nhiên đúng. Giả sử $p > 2$.

Nếu tồn tại $i, j \in \{1; 2; \dots; p-1\}, i > j$ mà $ia \equiv ja \pmod{p}$ thì $(i-j)a : p$. Do a không chia hết cho p nên $(a; p) = 1$ do đó $i-j : p$. Điều này là vô lí do $0 < i-j < p$.

Vậy các số $a, 2a, \dots, (p-1)a$ khi chia cho p sẽ được các số dư khác nhau. Trong các số này không có số nào chia hết cho p nên $p-1$ số này khi chia cho p sẽ được $p-1$ số dư là $1, 2, \dots, p-1$ do đó

$$a \cdot (2a) \cdots (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdots (p-1) \pmod{p} \text{ hay } (p-1)! a^{p-1} \equiv (p-1)! \pmod{p}$$

Do $((p-1)!; p) = 1$ nên $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, bổ đề được chứng minh.

Áp dụng bổ đề ta suy ra $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Mà $a-b$ chia hết cho $p-1$ nên $a^{a-b} \equiv b^{a-b} \equiv 1 \pmod{p}$.

Ta có $a^b + b^a = a^b + b^b + (b^a - b^b)$. Để ý $a^b + b^b$ chia hết cho $a+b$ chia hết cho p .

Ta cần chứng minh $b^a - b^b = b^b (b^{a-b} - 1)$ chia hết cho p .

Điều này đúng, do đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Định năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình sau:

$$2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7.$$

Lời giải

Ta có: $2x^2 - y^2 + xy + 2x + 2y = 7$

$$(x+y)(2x-y) + 2(x+y) = 7$$

$$(x+y)(2x-y+2) = 7$$

Ta có các cách phân tích $7 = 7 \cdot 1 = 1 \cdot 7 = (-7) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-7)$

Do đó xét các trường hợp sau

$$\begin{cases} x+y=7 \\ 2x-y+2=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-y+2=7 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\begin{cases} x + y = -7 \\ 2x - y + 2 = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-10}{3} \\ y = \frac{-11}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x - y + 2 = -7 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{-10}{3} \\ y = \frac{7}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(x; y) \in \{(2; 5); (2; -1)\}$.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^2 - 2xy + 3y - x - 1 = 0$.

b) Tìm các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho $\frac{a^3b-1}{a+1}$ và $\frac{b^3a+1}{b-1}$ đều là các số nguyên.

Lời giải

a) Ta viết lại phương trình thành: $x^2 - (1 + 2y)x + 3y - 1 = 0$. Xem đây là phương trình bậc hai ẩn x ta phải có Δ là số chính phương, điều này tương đương tồn tại số tự nhiên k sao cho

$$4y^2 - 8y + 5 = k^2 \text{ hay } (2y - 2 + k)(2y - 2 - k) = -1.$$

Xét các trường hợp ta thấy chỉ $x = 1; x = 2$ là thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(1; 1), (2; 1)\}$.

b) Điều kiện: $b \neq 1$. Ta có nhận xét hiển nhiên sau: $a^3 + 1 : a + 1; b^3 - 1 : b - 1$.

Khi đó ta có: $a^3b - 1 \equiv -b - 1 \pmod{a+1} \Rightarrow b + 1 : a + 1$

Tương tự thì có: $b^3a + 1 \equiv a + 1 \pmod{b-1} \Rightarrow a + 1 : b - 1$

Điều đó dẫn đến $b + 1 : b - 1$ hay $2 : b - 1$.

Từ đó dễ dàng tìm được cặp số $(a; b) \in \{(2; 2), (1; 3), (3; 3)\}$.

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán là $(a; b) \in \{(2; 2), (1; 3), (3; 3)\}$.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Tìm các số nguyên dương x, y để A, B đồng thời là các số chính phương biết $A = x^2 + y + 1$ và $B = y^2 + x + 4$.

Lời giải

Với $x \geq y > 0$ thì $x^2 \leq A = x^2 + y + 1 \leq x^2 + x + 1 < x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, do đó không tồn tại x, y để $A = x^2 + y + 1$ là số chính phương.

Với $y > x > 0 \Rightarrow y^2 < B = y^2 + x + 4 < y^2 + y + 4 < y^2 + 4y + 4 = (y+2)^2$

$\Rightarrow y^2 < B < (y+2)^2$ $B = (y+1)^2 \xrightarrow{B=y^2+x+4} (y+1)^2 = y^2 + x + 4 \rightarrow x = 2y - 3$, thay vào A ta được

$$A = (2y-3)^2 + y + 1 = 4y^2 - 11y + 10$$

Vì A là số chính phương nên $A = k^2$ ($k \geq 0$) hay $k^2 = 4y^2 - 11y + 10$

$\Rightarrow 4y^2 - 11y + 10 - k^2 = 0$ (*). Phương trình (*) ẩn y có $\Delta = 16k^2 - 39$

Để A là số chính phương thì Δ là số chính phương, suy ra $\Delta = a^2$, ($a \geq 0$) hay $16k^2 - 39 = a^2$

$\Rightarrow (4k-a)(4k+a) = 39 = 1.39 = 3.13$. Do $\begin{cases} 4k+a \geq 0 \\ 4k+a \geq 4k-a \end{cases}$ nên ta có

$$(4k-a)(4k+a) = 39 \Rightarrow \begin{cases} \begin{cases} 4k-a=1 \\ 4k+a=39 \end{cases} \\ \begin{cases} 4k-a=3 \\ 4k+a=13 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=19 \\ k=5 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a=5 \\ k=2 \end{cases}$$

Với $k=5 \Rightarrow y=-1 < 0$ (loại)

Với $k=2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow x=1$

Vậy chỉ có một cặp số $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ thỏa mãn bài toán.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả số nguyên x, y thỏa mãn $x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0$.

Lời giải

$$x^2 - 2y^2 - xy + 2x + 5y - 5 = 0$$

$$(x-2y+3)(x+y-1) = 2$$

Ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases} x-2y+3=2 \\ x+y-1=1 \end{cases}; \begin{cases} x-2y+3=1 \\ x+y-1=2 \end{cases}; \begin{cases} x-2y+3=-2 \\ x+y-1=-1 \end{cases}; \begin{cases} x-2y+3=-1 \\ x+y-1=-2 \end{cases}$$

Giải các hệ trên ta các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 1)$ và $(-2; 1)$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương k sao cho tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^2 - kxy + y^2 + 1 = 0$.

Lời giải

Xét k để tồn tại bộ số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình.

Ta thấy ngay cặp (x, y) thỏa mãn phương trình thì $x, y \neq 0$ và $xy > 0$.

Mà $(x; y)$ là nghiệm thì $(-x; -y)$ cũng là nghiệm. Vậy là phương trình có một bộ nghiệm $(x; y)$ mà $x, y > 0$.

$$\text{Xét } S = \{(x; y) : x^2 - kxy + y^2 + 1 = 0; x, y > 0\}$$

Do tập S khác rỗng nên ta có thể xét bộ $(x_0; y_0) \in S$ mà $x_0 + y_0$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Không mất tính tổng quát giả sử $x_0 \geq y_0$.

Xét phương trình bậc hai ẩn x :

$$x^2 - x.ky_0 + y_0^2 + 1 = 0$$

Phương trình này có một nghiệm là x_0 nên nó sẽ có thêm một nghiệm nữa là x_1 và theo định lý

$$\text{Viète thì } \begin{cases} x_0 + x_1 = ky_0 \\ x_0 \cdot x_1 = y_0^2 + 1 \end{cases}$$

Do $x_0 + x_1$ là số nguyên nên x_1 là số nguyên.

Do $x_0 \cdot x_1 > 0$ nên x_1 là số nguyên dương.

Vậy $(x_0; x_1) \in S$.

$$\text{Do đó: } x_1 + y_0 \geq x_0 + y_0 \Rightarrow x_1 \geq x_0 \geq y_0.$$

$$\text{Nếu } x_0 \geq y_0 + 1 \Rightarrow y_0^2 + y_0 \leq y_0^2 + 1 \Rightarrow y_0 \leq 1.$$

Từ đây thu được $y_0 = x_0 = 1$ và thu được $k = 3$.

Thử lại thì $k = 3$ có nghiệm $(x; y) = (1; 1)$. Vậy $k = 3$ thỏa mãn

$$\text{Nếu } x_1 = y_0 \Rightarrow x_1 = x_0 = y_0 \Rightarrow y_0^2 = y_0^2 + 1 \text{ (vô lý)}$$

Vậy $k = 3$ là giá trị duy nhất cần tìm.

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Tìm các số nguyên dương x sao cho $x^2 + x + 10$ là số chính phương.

Lời giải

$$\text{Đặt } x^2 + x + 1 = k^2 \ (k \in \mathbb{Z})$$

$$4x^2 + 4x + 4 = 4k^2$$

$$(2k)^2 - (2x+1)^2 = 39$$

$$(2k - 2x - 1)(2k + 2x + 1) = 39$$

Nhận xét: $2k - 2x - 1 < 2k + 2x + 1$; $2k - 2x - 1 \in \mathbb{Z}$; $2k + 2x + 1 \in \mathbb{Z}$

$$\text{Và } 39 = 1.39 = 3.13 = -39.(-1) = -13.(-3)$$

Nên ta có các trường hợp sau

$$\begin{cases} 2k - 2x - 1 = 1 \\ 2k + 2x + 1 = 39 \end{cases} \Rightarrow (k; x) = (10; 9)$$

$$\begin{cases} 2k - 2x - 1 = 3 \\ 2k + 2x + 1 = 13 \end{cases} \Rightarrow (k; x) = (4; 2)$$

$$\begin{cases} 2k - 2x - 1 = -39 \\ 2k + 2x + 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow (k; x) = (-10; 9)$$

$$\begin{cases} 2k - 2x - 1 = -13 \\ 2k + 2x + 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow (k; x) = (-4; 2)$$

Thử lại $x \in \{9; 2\}$ thỏa mãn.

Vậy $x \in \{9; 2\}$.

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Tìm ba số nguyên dương x, y, z đôi một khác nhau thỏa mãn hai điều kiện

$$(1). x^2 + xy + y^2 + (3z^2 - z - 4)(x + y) = 10z^2 - 3;$$

$$(2). \text{Trong bốn số } x + y + 3z^2 - 1, x + y - 3, x + z, y + z \text{ có đúng một hợp số.}$$

Lời giải

$$(1). \text{Từ điều kiện (1), ta có được } (x + y + 3z^2 - 1)(x + y - 3) = (z + x)(z + y)$$

$$\text{Từ đây để ý là } x + z, y + z, x + y + 3z^2 - 1 > 0 \Rightarrow x + y - 3 > 0$$

Vậy kết hợp điều kiện b ta có được $ar = pq$ với a là hợp số p, q, r là số nguyên tố

(2). Từ đây $r \vdots pq$ mà r nguyên tố nên $r \vdots p$ hoặc $r \vdots q$

Nếu $r \vdots p$ thì $p=r$ dẫn đến $a=q$ (vô lí do a là hợp số)

Nếu $r \vdots q$ thì $q=r$ dẫn đến $a=p$ (vô lí do a là hợp số)

Vậy tóm lại không tồn tại bộ ba $(x; y; z)$ thoả mãn yêu cầu bài toán

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình: $xy - x + 3y = 6$.

Lời giải

Ta có:

$$xy - x + 3y = 6$$

$$x(y-1) + 3(y-1) = 3.$$

$$(x+3)(y-1) = 3$$

Vì x, y nguyên nên ta có các trường hợp sau:

$x+3$	-3	-1	1	3
$y-1$	-1	-3	3	1
x	-6	-4	-2	0
y	0	-2	4	2

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(-6; 0), (-4; -2), (-2; 4), (0; 2)\}$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $2n-1; 3n+1$ là các số chính phương và $6n-13$ là số nguyên tố.

Lời giải

Vì $6n-13$ là số nguyên tố và $n \in \mathbb{N}$ nên $n \geq 3$.

Ta có $2n-1$ và $3n+1$ là các số chính phương nên $2n-1 = a^2$; $3n+1 = b^2$ với $a; b \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 2b^2 - 3a^2 = 5 \quad (1)$$

$$\text{Ta có } 6n-13 = 3(2n-1) - 10 = 3a^2 - 2(2b^2 - 3a^2) = 9a^2 - 4b^2 = (3a-2b)(3a+2b) \quad (2)$$

Vì $6n-13$ là số nguyên tố, mà $3a-2b \leq 3a+2b$ nên từ (2) ta có $3a-2b = 1 \Rightarrow b = \frac{3a-1}{2}$

Thay $b = \frac{3a-1}{2}$ vào (1) ta được $2\left(\frac{3a-1}{2}\right)^2 - 3a^2 = 5 \Rightarrow 3a^2 - 6a - 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \text{ (L)} \\ a = 3 \end{cases}$

Với $a = 3$ thì $b = 4, n = 5$ và $6n - 13 = 17$ (thỏa mãn). Vậy $n = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Điện Biên năm 2025 – 2026)

Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm nguyên

$$y^2 - 5y + 62 = (y - 2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x.$$

Lời giải

Ta có :

$$y^2 - 5y + 62 = (y - 2)x^2 + (y^2 - 6y + 8)x$$

$$(y - 2)(y - 3) + 56 = (y - 2)x^2 + (y - 2)(y - 4)x$$

$$56 = (y - 2)[x^2 + (y - 4)x - (y - 3)]$$

$$(y - 2)(x - 1)(x + y - 3) = 56$$

$$(x - 1)(y - 2)(x - 1 + y - 2) = 56 = 1.7.8 = 7.1.8 = (-8).1(-7) = 1(-8)(-7) = (-8).7.(-1) = 7.(-8).(-1)$$

Bảng giá trị

$x - 1$	1	7	-8	1	-8	7
$y - 2$	7	1	1	-8	7	-8
x	2	8	-7	2	-7	8
y	9	3	3	-6	9	-6

Vậy phương trình có 6 nghiệm nguyên

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

a) Chứng minh trong 37 số nguyên dương bất kỳ, luôn tìm được 7 số có tổng chia hết cho 7.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho với mọi số nguyên dương a, b thì hai số $a + 8b$ và $6a + 43b$ hoặc cùng chia hết cho p hoặc cùng không chia hết cho p .

Lời giải

a) Nếu trong 37 số nguyên dương này có đủ các số dư từ 0 đến 6 khi chia cho 7, ta chọn 7 số có số dư khi chia cho 7 lần lượt từ 0 đến 6, khi đó tổng của 7 số này chia hết cho 7.

Nếu trong 37 số nguyên dương này có không quá 6 số dư khác nhau,

vì $37 = 6 \cdot 6 + 1$ nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 7 số có cùng số dư khi chia cho 7. Chọn 7 số này và khi đó tổng của chúng chia hết cho 7.

b) Nếu $p=5$, vì $(6a+43b)-(a+8b)=5a+35b \div 5$

nên $6a+43b \equiv a+8b \pmod{5}$.

Vì vậy $a+8b$ và $6a+43b$ hoặc cùng chia hết cho p hoặc cùng không chia hết cho p .

Nếu $p \neq 5$, giả sử tồn tại hai số nguyên dương a, b sao cho $a+8b$ và $6a+43b$ đều chia hết cho p . Vì $6a+43b=6(a+8b)-5b \div p$, mà $a+8b \div p$ nên $5b \div p$. Hơn nữa $(p, 5)=1$ nên $b \div p$. Kết hợp với $a+8b \div p$, ta suy ra $a \div p$. Như vậy, nếu $a+8b$ và $6a+43b$ đều chia hết cho p thì a và b đều chia hết cho p .

Chọn $b=1$ và $a=5p-8 > 0$, ta có $a+8b=5p-8+8=5p \div p$, theo nhận xét trên thì 1 và $5p-8$ đều chia hết cho p , vô lý.

Vậy chỉ có duy nhất số nguyên tố $p=5$ cần tìm.

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thoả mãn $(x^2 - x + 1)(y^2 - xy - 5) = 2x + 5$.

Lời giải

Nhận xét: $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0$ mà $x > 0$ nên $2x + 5 > 0$.

Từ đó suy ra: $y^2 - xy - 5 > 0$.

Từ phương trình ta có: $(2x + 5) : (x^2 - x + 1)$, lại có $2x + 5; x^2 - x + 1$ nguyên dương nên

$$2x + 5 \geq x^2 - x + 1$$

$$x^2 - 3x - 4 \leq 0$$

$$(x - 4)(x + 1) \leq 0$$

$$-1 \leq x \leq 4, \text{ kết hợp điều kiện } x \in \mathbb{Z}, x > 0 \text{ nên } x \in \{1; 2; 3; 4\}$$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. $x=1$, thay vào phương trình:

$$y^2 - y - 5 = 7$$

$$y^2 - y - 12 = 0$$

$$(y - 4)(y + 3) = 0$$

$$y = 4 \text{ (do } y > 0)$$

Trường hợp 2. $x = 2$, thay vào phương trình:

$$3(y^2 - 2y - 5) = 9$$

$$y^2 - 2y - 5 = 3$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y - 4)(y + 2) = 0$$

$$y = 4 \text{ (do } y > 0 \text{)}$$

Trường hợp 3. $x = 3$, thay vào phương trình:

$$7(y^2 - 3y - 5) = 11$$

$$y^2 - 3y - 5 = \frac{11}{7} \text{ (loại do } y \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Trường hợp 4. $x = 4$, thay vào phương trình:

$$13(y^2 - 4y - 5) = 13$$

$$y^2 - 4y - 5 = 1$$

$$y^2 - 4y - 6 = 0$$

$$(y - 2)^2 = 10 \text{ (Loại do 10 không phải là số chính phương)}$$

Vậy tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; 4), (2; 4)$.

Câu 18. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

a) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $3a^2 - bc, 3b^2 - ca, 3c^2 - ab$ đều chia hết cho 4. Chứng minh abc chia hết cho 8.

b) Tìm tất cả cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2(2x - y)(y - x)^2 = 15x - 7y + 7$.

Lời giải

a) Giả sử a, b, c đều là số lẻ. Khi đó $a^2 \equiv 1 \pmod{4}$ nên: $0 \equiv 3a^2 - bc \equiv 3 - bc \pmod{4}$

Suy ra $bc \equiv 3 \pmod{4}$.

Chứng minh tương tự, ta có $ab \equiv bc \equiv ca \equiv 3 \pmod{4}$, dẫn đến $(abc)^2 \equiv 3 \pmod{4}$, điều này không thể xảy ra.

Do đó trong a, b, c có ít nhất một số chẵn. Không mất tính tổng quát giả sử a chẵn, khi đó $0 \equiv 3a^2 - bc \equiv -bc \pmod{4}$ dẫn đến $bc \vdots 4$, mà $a \vdots 2$ nên $abc \vdots 8$.

b) Đặt $a = 2x - y, b = y - x$. Khi đó $15x - 7y = 8a + b$. Phương trình đã cho trở thành:

$$2ab^2 = 8a + b + 7 \text{ hay } 2a(b^2 - 4) = b + 7$$

Nếu $b^2 - 4 = 0$ thì $b \in \{2; -2\}$, khi đó $2a(b^2 - 4) = 0$ nhưng $b + 7 \neq 0$, mâu thuẫn.

Do đó $b^2 - 4 \neq 0$, suy ra $(b + 7) \vdots (b^2 - 4)$

Ta có: $((b + 7)(b - 7) - (b^2 - 4)) \vdots (b^2 - 4)$ suy ra $-45 \vdots (b^2 - 4)$.

Mà $b^2 - 4 \geq -4$ nên: $(b^2 - 4) \in \{-3; -1; 1; 3; 5; 9; 15; 45\}$.

Suy ra $b^2 \in \{1; 3; 5; 7; 9; 13; 19; 49\}$.

Mà b^2 là số chính phương nên $b^2 \in \{1; 9; 49\}$, tức là $b \in \{-7; -3; -1; 1; 3; 7\}$.

Mặt khác, ta có $a = \frac{b + 7}{2(b^2 - 4)}$ là số nguyên, thử trực tiếp ta tìm được $(a; b) \in \{(0; -7); (-1; -1); (1; 3)\}$

Để ý rằng $x = a + b, y = a + 2b$. Ta xét các trường hợp:

Nếu $a = 0, b = -7$ thì $x = -7, y = -14$, thỏa mãn.

Nếu $a = -1, b = -1$ thì $x = -2, y = -3$, thỏa mãn.

Nếu $a = 1, b = 3$ thì $x = 4, y = 7$, thỏa mãn.

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là $(-7; -14); (-2; -3); (4; 7)$.

Câu 19. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 - 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn

$$25^y + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4) \cdot 5^y.$$

Lời giải

Ta có:

$$25^y + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4^x + 4x^2 + 3x + 4) \cdot 5^y$$

$$5^{2y} + (4^x + 1)(4x^2 + 3x + 3) = (4x^2 + 3x + 3) \cdot 5^y + (4^x + 1) \cdot 5^y$$

$$5^y(5^y - 4x^2 - 3x - 3) - (4^x + 1)(5^y - 4x^2 - 3x - 3) = 0$$

$$(5^y - 4x^2 - 3x - 3)(5^y - 4^x - 1) = 0$$

$$\text{TH1: } 5^y = 4^x + 1$$

Với $x=1$ suy ra $y=1$ (thỏa mãn)

Với $x \geq 2$ ta có $4^x + 1 \equiv 1 \pmod{8}$ nên $5^y \equiv 1 \pmod{8}$ nên y chẵn

Từ đó $5^y \equiv (-1)^y \equiv 1 \pmod{3}$ nên 4^x chia hết cho 3 (vô lý do $4^x \equiv 1 \pmod{3}$)

$$\text{TH2: } 5^y = 4x^2 + 3x + 3$$

Dễ thấy x không chia hết cho 3 do 5^y không chia hết cho 3.

Từ đó $5^y \equiv 4x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ do số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1. Từ đó suy ra y chẵn

Đặt $y=2k$, phương trình trở thành $4x^2 + 3x + 3 = (5^k)^2$ nên $4x^2 + 3x + 3$ là số chính phương.

Lại có: $(2x)^2 < 4x^2 + 3x + 3 < (2x+2)^2$ do x là số nguyên dương.

Do đó $4x^2 + 3x + 3 = (2x+1)^2$ suy ra $x=2$

Thay vào ta được $y=2$.

Vậy các cặp số nguyên dương $(x; y)$ thỏa mãn là $\{(1;1); (2;2)\}$.

Câu 20. (Trường chuyên Tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

a) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{3}{b+2} = \frac{5}{c+4}$. Chứng minh abc chia hết cho 4.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên $(x; y)$ thỏa mãn: $x(x-2y) = y^3 - 3y^2 + 2y - 1$.

Lời giải

a) Từ giả thiết ta suy ra $(3a+b+2)(c+4) = 5a(b+2)$. Ta nhận thấy nếu a, b đều lẻ thì vế phải là số lẻ, nhưng vế trái chẵn do $3a+b+2$ là số chẵn, vô lý.

Do đó trong hai số a, b phải có một số chẵn.

Nếu cả hai số a, b đều chẵn thì abc chia hết cho 4.

Nếu trong hai số a, b chỉ có đúng một số chẵn thì vế phải chẵn, suy ra vế trái chẵn. Mà $3a+b+2$ lẻ, suy ra $c+4$ chẵn, tức là c chẵn. Vậy abc chia hết cho 4.

b) Từ giả thiết ta suy ra $(x-y)^2 = y^3 - 2y^2 + 2y - 1 = (y-1)(y^2 - y + 1)$.

Do $y^2 - y + 1 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ và $(x-y)^2 \geq 0$ nên suy ra $y-1 \geq 0$.

Mà $(y-1; y^2 - y + 1) = (y-1; y(y-1)+1) = (y-1; 1) = 1$, nên ta suy ra $y-1$ và $y^2 - y + 1$ phải là hai số chính phương.

Từ $y-1 \geq 0$ ta có $y \geq 1$.

Khi đó: $y^2 - 2y + 1 < y^2 - y + 1 < y^2 + 2y + 1$

hay $(y-1)^2 < y^2 - y + 1 < (y+1)^2$. Mà $y^2 - y + 1$ là số chính phương nên suy ra $y^2 - y + 1 = y^2$, hay $y = 1$.

Thay $y = 1$ vào đề bài ta có $x(x-2) = -1$, giải ra được $x = 1$.

Vậy $(x; y) = (1; 1)$ là cặp số tự nhiên duy nhất thỏa mãn đề bài.

Câu 21. (Trường chuyên Tin Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $(a+2b)(2a+c) = (a^2 - bc)^2$. Chứng minh $4ab+1$ là số chính phương.

Lời giải

Từ $(a+2b)(2a+c) = (a^2 - bc)^2$ ta được $b^2c^2 - (2a^2b + a + 2b)c - (a+2b)2a + a^4 = 0$.

Coi phương trình trên là phương trình bậc hai ẩn c , tính biệt thức

$$\Delta = (2a^2b + a + 2b)^2 - 4b^2[a^4 - 2a(a+2b)] = (a+2b)^2(4ab+1)$$

Để phương trình có nghiệm nguyên thì Δ là số chính phương và do đó $4ab+1$ là số chính phương. Một ví dụ về bộ số $(a; b; c)$ thỏa mãn bài toán là $a = 1, b = 2, c = 3$.

Câu 22. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p+q$ và $p+4q$ đều là các số chính phương.

Lời giải

Giả sử tồn tại số nguyên tố p, q sao cho thỏa mãn điều kiện bài toán.

Đặt $p+q = a^2, p+4q = b^2$, trong đó a, b là các số nguyên dương.

Khi đó $3q = (b-a)(b+a)$. Ta thấy $b-a < b+a$.

Trường hợp 1: $b-a = 1, b+a = 3q \Rightarrow 2a+1 = 3q$ thì q lẻ. Đặt $q = 2k+1, k$ nguyên dương.

Khi đó $a = \frac{3q-1}{2} = 3k+1$ và $p = a^2 - q = (3k+1)^2 - (2k+1) = k(9k+4)$.

Mà do p nguyên tố nên $k = 1, p = 13, q = 3$.

Trường hợp 2: $b - a = 3, b + a = q \Rightarrow b = a + 3, q = 2a + 3$.

Do đó $p = a^2 - q = a^2 - 2a - 3 = (a + 1)(a - 3)$. Mà do p nguyên tố nên $a = 4, p = 5, q = 11$.

Trường hợp 3: $b - a = q, b + a = 3$, vì $b > a \geq 1$ nên $b = 2, a = 1 \Rightarrow q = 1$ (vô lý).

Thử lại ta thấy $(5; 11); (13; 3)$ thoả mãn bài toán.

Vậy $(5; 11); (13; 3)$ là các bộ số cần tìm của bài toán.

Câu 23. (Trường chuyên Hải Dương năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thoả mãn $(x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) = 2x + 1$.

Lời giải

Xét $x = 1 \Rightarrow -(y^2 + y - 9) = 3 \Rightarrow (y - 2)(y + 3) = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (x, y) = (1, 2)$.

Xét $x \geq 2$, nếu $y \geq 3$ thì ta có $2x + 1 = (x^2 - x - 1)(y^2 + xy - 9) \geq 1 \cdot 9 + 3y - 9 = 3x \Rightarrow x \leq 1$ (vô lý).

Do đó $y \leq 2 \Rightarrow y \in \{1; 2\}$. Ta xét hai trường hợp như sau:

Trường hợp 1: Với $y = 1 \Rightarrow (x^2 - x - 1)(x - 8) = 2x + 1 \Rightarrow x^3 - 9x^2 + 5x - 7 = 0$.

Nếu phương trình trên có nghiệm nguyên thì nghiệm đó phải là ước nguyên dương của 7.

Nhưng dễ thấy 1 và 7 đều không là nghiệm của phương trình trên nên trường hợp này vô nghiệm.

Trường hợp 2: Với $y = 2$

$$\Rightarrow (x^2 - x - 1)(2x - 5) = 2x + 1 \Rightarrow 2x^3 - 7x^2 + x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 1)(2x^2 - 3x - 4) = 0.$$

Dễ thấy phương trình $2x^2 - 3x - 4 = 0$ không có nghiệm nguyên dương nên ta thu được $x = 1$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên dương duy nhất $(x; y) = (1; 2)$.

Câu 24. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương a, b sao cho $8a^3 + 18ab + 1$ và $8b^3 + 18ab + 1$ đều là lập phương của số nguyên.

Lời giải

$$8a^3 + 18ab + 1 > (2a)^3 \Rightarrow 8a^3 + 18ab + 1 \geq (2a + 1)^3 \Rightarrow 3b \geq 2a + 1 \Rightarrow 2a \leq 3b - 1$$

$$\text{Suy ra } (2b)^3 < 8b^3 + 18ab + 1 \leq 8b^3 + 9b(3b - 1) + 1 = 8b^3 + 27b^2 - 9b + 1.$$

Mà $8b^3 + 27b^2 - 9b + 1 < (2b+3)^3$ ($9b^2 + 63b + 26 > 0$ với b nguyên dương) và $8b^3 + 18ab + 1$ là số chính phương nên ta xét hai khả năng sau

Trường hợp 1. $8b^3 + 18ab + 1 = (2b+2)^3$, vô lí vì $(2b+2)^3$ chẵn và $8b^3 + 18ab + 1$ lẻ.

Trường hợp 2. $8b^3 + 18ab + 1 = (2b+1)^3 \Rightarrow 3a = 2b+1$ suy ra $8b^3 + 6b(2b+1) + 1 = (2b+1)^3$ là lập phương của số nguyên và $8a^3 + 18ab + 1 = 8a^3 + 9a(3a-1) + 1 = 8a^3 + 27a^2 - 9a + 1$

Đến đây chứng minh tương tự ta có $3b = 2a+1$.

Khi đó ta có hệ $\begin{cases} 3a = 2b+1 \\ 3b = 2a+1 \end{cases}$ dẫn đến $a = b = 1$.

Thử lại thỏa mãn.

Vậy $a = b = 1$.

Câu 25. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Tìm cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $x^2 - 3y^2 + 2xy - 2x - 10y + 4 = 0$.

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với $x^2 + 2(y-1)x - 3y^2 - 10y - 3 = -7$.

Ta coi vế trái là đa thức bậc hai ẩn x , tham số y .

Ta tính được $\Delta' = 4(y+1)^2$ nên đa thức có hai nghiệm $x = y+3, x = -3y-1$.

Do đó phương trình trên viết được thành $(x-y-3)(x+3y+1) = -7$.

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} x-y-3=1 \\ x+3y+1=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ x+3y=-8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} x-y-3=-1 \\ x+3y+1=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x+3y=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} x-y-3=7 \\ x+3y+1=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=10 \\ x+3y=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 4: } \begin{cases} x-y-3=-7 \\ x+3y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-y=-4 \\ x+3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn là $(1; -3); (-3; 1); (3; 1); (7; -3)$.

Câu 26. (Trường chuyên Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Số nguyên dương n được gọi là số “đẹp” nếu tồn tại $a, b \in \mathbb{Z}$ để $n = a^2 + 7b^2$.

a) Tìm hai số đẹp chia hết cho 11;

b) Chứng minh nếu n là số đẹp chia hết cho 11 thì $\frac{n}{11}$ cũng là số đẹp.

Lời giải

a) Ta có: $11 = 2^2 + 7 \cdot 1^2$ và $44 = 4^2 + 7 \cdot 2^2$ là 2 số đẹp chia hết cho 11.

b) Giả sử n là số đẹp chia hết cho 11; tức là có a, b nguyên sao cho $n = a^2 + 7b^2$. Hơn nữa $a^2 + 7b^2 = (a - 2b)(a + 2b) + 11b^2$, nên $(a - 2b)(a + 2b) \vdots 11$, hay $a - 2b$ hoặc $a + 2b$ chia hết cho 11.

Nếu $a - 2b \vdots 11$, đặt $a - 2b = 11k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta thay $a = 2b + 11k$ vào n để được

$$n = a^2 + 7b^2 = (2b + 11k)^2 + 7b^2 = 11(b^2 + 4bk + 11k^2) = 11[(b + 2k)^2 + 7k^2].$$

Như vậy $\frac{n}{11} = (b + 2k)^2 + 7k^2$ cũng là số đẹp.

Nếu $a + 2b \vdots 11$, tương tự như trên, đặt $a + 2b = 11k$ ($k \in \mathbb{Z}$), ta thấy $a = -2b + 11k$ vào n để được

$$n = a^2 + 7b^2 = (-2b + 11k)^2 + 7b^2 = 11(b^2 - 4bk + 11k^2) = 11[(b - 2k)^2 + 7k^2].$$

Như vậy $\frac{n}{11} = (b - 2k)^2 + 7k^2$ cũng là số đẹp. Vậy ta có điều phải chứng minh

Câu 27. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

a) Tìm các cặp số nguyên không âm $(a; b)$ thoả mãn $(ab - 5)^2 - a^2 = b(a + b)$.

b) Tìm các bộ số nguyên dương $(x; y; p)$ với p nguyên tố, thoả mãn $(x^3 + x + 3)(x^2 - x + 1) = p^y$.

Lời giải

a) Ta có $(ab - 5)^2 = a^2 + ab + b^2$ hay $a^2b^2 - 9ab - 25 = (a - b)^2$.

Khi đó

$$4a^2b^2 - 36ab + 100 = 4(a + b)^2$$

$$(2ab - 9)^2 + 19 = (2a + 2b)^2$$

$$(2a + 2b - 2ab + 9)(2a + 2b + 2ab - 9) = 0$$

Ta xét các trường hợp sau

Trường hợp 1. $\begin{cases} 2a + 2b + 2ab - 9 = 19 \\ 2a + 2b - 2ab + 9 = 1 \end{cases}$ thì $a+b=5, ab=9$ là dễ thấy không tồn tại a, b thỏa mãn.

Trường hợp 2. $\begin{cases} 2a + 2b + 2ab - 9 = 1 \\ 2a + 2b - 2ab + 9 = 19 \end{cases}$ thì $a+b=5, ab=0$ suy ra $\begin{cases} a=0 \\ b=5 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=5 \\ b=0 \end{cases}$

Trường hợp 3. $\begin{cases} 2a + 2b + 2ab - 9 = -1 \\ 2a + 2b - 2ab + 9 = -19 \end{cases}$ thì $a+b=-5$ (loại)

Trường hợp 4. $\begin{cases} 2a + 2b + 2ab - 9 = -19 \\ 2a + 2b - 2ab + 9 = -1 \end{cases}$ thì $a+b=-5$ (loại)

Vậy phương trình trên có hai cặp nghiệm thỏa mãn là $(0;5);(5;0)$.

b) Giả sử tồn tại bộ số $(x; y; p)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, trong đó p nguyên tố.

Do tích của $x^3 - x + 3; x^2 - x + 1$ đều là lũy thừa của số nguyên tố p .

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x^3 + x + 3 = p^a \\ x^2 - x + 1 = p^b \end{cases}$$

Ta thấy $x^3 + x + 3 > x^2 - x + 1$ nên $a > b > 0$ và a, b là số tự nhiên.

Do đó $(x^3 + x + 3) : (x^2 - x + 1)$ mà $x^3 + x + 3 = (x+1)(x^2 - x + 1) + x + 2$

Suy ra $(x+2) : (x^2 - x + 1)$

Nên ta có $(x^2 - x + 1) \leq x + 2 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 \leq 0 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$

Nếu $x=1$ thì $p^a = 5, p^b = 1$ hay $a=1, b=0, p=5$ suy ra $x=1, y=1, p=5$

Nếu $x=2$ thì $p^a = 13, p^b = 3$ suy ra không tồn tại p thỏa mãn.

Thử lại $(1;1;5)$ là bộ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $(1;1;5)$ là bộ số nguyên dương cần tìm.

Câu 28. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình :

$$(x^2 + 3)y^2 - (x - 2y)(x + 2y + 1) = 25x + 2y + 169.$$

Lời giải

$$x^2y^2 + 3y^2 - x^2 - 2xy - x + 2xy + 4y^2 + 2y = 25x + 2y + 169$$

$$x^2y^2 + 7y^2 = x^2 + 26x + 169$$

$$(x^2 + 7)y^2 = (x + 13)^2$$

Nếu $y = 0$ suy ra $x + 13 = 0 \Rightarrow x = -13$ (thoả mãn)

$$\text{Nếu } y \neq 0 \Rightarrow x^2 + 7 = \left(\frac{x+13}{y}\right)^2$$

Đặt $\frac{x+13}{y} = t$ ($t^2 \geq 7$) ta được $x^2 + 7 = t^2$

Mà x, y là các số nguyên nên t cũng là số nguyên

$$\text{Do đó } (t-x)(t+x) = 7$$

Suy ra $t-x; t+x$ là các ước của 7

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} t-x=1 \\ t+x=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow y=4 \text{ (thoả mãn)}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} t-x=7 \\ t+x=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=4 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow y=\frac{5}{2} \text{ (không thoả mãn)}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} t-x=-1 \\ t+x=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \\ x=-3 \end{cases} \Rightarrow y=-\frac{5}{2} \text{ (không thoả mãn)}$$

$$\text{Trường hợp 4: } \begin{cases} t-x=-7 \\ t+x=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-4 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow y=-4 \text{ (thoả mãn)}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm nguyên $(-13; 0); (3; 4); (3; -4)$.

Câu 29. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

- a) Cho $p, q (p > q > 5)$ là 2 số nguyên tố. Chứng minh $p^8 - q^4$ chia hết cho 240.
- b) Tìm tất cả số nguyên dương n và số nguyên tố p thoả $n^{2044} + 4n + p^2$ chia hết cho np .

Lời giải

a) Ta sẽ chứng minh $p^8 - q^4$ chia hết cho 3; 5; 16.

Thật vậy, vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên $p \equiv 1; 2 \pmod{3}$ và $p \equiv 1; 2; 3; 4 \pmod{5}$ *

Do đó: $p^2 \equiv 1^2; 2^2 \equiv 1; 4 \equiv 1 \pmod{3}$; $p^4 \equiv 1^4; 2^4; 3^4; 4^4 \equiv 1; 16; 81; 256 \equiv 1 \pmod{5}$

Tương tự: $q^2 \equiv 1 \pmod{2}$ và $q^4 \equiv 1 \pmod{5}$

$\Rightarrow p^8 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{3}$ và $p^8 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{5}$

$\Rightarrow p^8 - q^4$ chia hết cho 3; 5 (1)

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 5 nên p lẻ, do đó $p^2 \equiv 1 \pmod{8}$

Thật vậy, ta có $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$ là tích của hai số chẵn liên tiếp, do đó một trong hai số này chia hết cho 4. Vì vậy, $p^2 - 1$ chia hết cho 8.

Từ đây ta có thể viết $p^2 = 8k + 1 (k \in \mathbb{N}^*) \Rightarrow p^4 = 64k^2 + 16k + 1 \equiv 1 \pmod{16}$

Tương tự: $q^4 \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow p^8 \equiv q^4 \equiv 1 \pmod{16}$

$\Rightarrow p^8 - q^4$ chia hết cho 16 (2)

Từ (1), (2) suy ra: $p^8 - q^4$ chia hết cho 240.

b) Ta có: $n^{2024} + 4n + p^2 : np \Rightarrow n^{2024} + 4n + p^2 : n \Rightarrow p^2 : n \Rightarrow n \in \{1; p; p^2\}$.

TH1: $n = 1 \Rightarrow 5 + p^2 : p \Rightarrow 5 : p \Rightarrow p = 5$, thử lại thấy thoả mãn.

TH2: $n = p \Rightarrow p^{2024} + 4p + p^2 : p^2 \Rightarrow 4p : p^2 \Rightarrow 4 : p \Rightarrow p = 2 \Rightarrow n = p = 2$, thử lại thấy thoả mãn.

TH3: $n = p^2 \Rightarrow p^{4048} + 5p^2 : p^3 \Rightarrow 5p^2 : p^3 \Rightarrow 5 : p \Rightarrow p = 5 \Rightarrow n = p^2 = 25$, thử lại thấy thoả mãn.

Vậy $(n; p) \in \{(1; 5); (2; 2); (25; 5)\}$

Chú ý: ở đây quy ước $a \equiv b; c \pmod{d}$ tức là a có thể đồng dư với b, c modulo d .

Câu 30. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các số nguyên dương n và các số nguyên tố p , thỏa mãn: $n + 7p = (n - p)^3$.

Lời giải

Giả sử n là số nguyên dương và p là số nguyên tố thỏa mãn yêu cầu đề bài. Khi đó,

$$n + 7p = (n - p)^3 \quad (1)$$

$$\text{Từ (1) ta có: } 8p = (n - p)^3 - (n - p) = (n - p - 1)(n - p)(n - p + 1) \quad (2)$$

Vì là tích của ba số nguyên liên tiếp, nên vế phải của (2) là một số chia hết cho 3.

Do đó, $8p$ chia hết cho 3.

Mà $(8; 3) = 1$, nên p chia hết cho 3.

Suy ra $p = 3$ (do p là số nguyên tố).

$$\text{Thay } p = 3 \text{ vào (2), ta được: } (n - 4)(n - 3)(n - 2) = 24 \quad (3)$$

Do 24 có duy nhất cách phân tích thành tích của ba số nguyên liên tiếp là $24 = 2 \cdot 3 \cdot 4$, nên từ (3) suy ra $n - 4 = 2$. Do đó, $n = 6$.

Ngược lại, bằng cách kiểm tra trực tiếp, dễ thấy, $n = 6$ và $p = 3$ thỏa mãn tất cả các yêu cầu của đề bài.

Vậy, tất cả các số n, p cần tìm theo yêu cầu đề bài là: $n = 6$ và $p = 3$.

Câu 31. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho a, b là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh $ab - a - b + 1$ chia hết cho 192.

Lời giải

$$\text{Đặt } a = (2n - 1)^2, b = (2n + 1)^2, (n \in \mathbb{Z})$$

Khi đó

$$ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1) = [(2n - 1)^2 - 1][(2n + 1)^2 - 1] = 16(n - 1)n^2(n + 1)^2$$

$$\text{Vì } (n - 1)n^2(n + 1)^2 = [(n - 1)n(n + 1)] \cdot n \cdot (n + 1) : 3$$

$$\text{Vì } (n - 1)n^2(n + 1)^2 [(n - 1)n] \cdot [n(n + 1)](n + 1) : 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{Vì } \text{ƯCLN}(3, 4) = 1 \text{ nên } 6(n - 1)n^2(n + 1)^2 : 192.$$

Câu 32. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $n^2 + n + 9$ không chia hết cho 25.

Lời giải

Giả sử phản chứng tồn tại số nguyên n để $n^2 + n + 9 \div 25$.

Ta có: $n^2 + n \equiv 16 \pmod{25}$

Nên tồn tại số nguyên k để $n^2 + n$ có dạng $16 + 25k$. Xét $P(x) = x^2 + x - 16 - 25k$.

Khi đó $P(n) = 0$.

Xét $\Delta_{P(x)} = 1 + 4 \cdot (16 + 25k) = 100k + 65$

Vì n là số nguyên nên Δ là số chính phương hay tồn tại y để $y^2 = 100k + 65$. Dễ thấy $y \div 5$ nên $y^2 \div 25$ mà $100k \div 25$ suy ra $65 \div 25$ (Vô lý). Vậy không tồn tại n thỏa mãn.

Do đó điều giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh.

Câu 33. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

a) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 - 2abc = 0$.

Chứng minh rằng $a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 12.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x^2 - 6(x - y)^2 - y^3 = 13$.

Lời giải

a) Vì $a^2 + b^2 + c^2 = 2abc$ ta suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \div 2$. (1)

Nếu a, b, c cùng lẻ thì $a^2 + b^2 + c^2$ là số lẻ, điều này mâu thuẫn với (1).

Như vậy trong 3 số a, b, c có ít nhất một số chẵn, dẫn đến $2abc \div 4$ nên $a^2 + b^2 + c^2 \div 4$. (2)

Giả sử trong ba số a, b, c không số nào chia hết cho 3, khi đó $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod{3}$, dẫn đến $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 0 \pmod{3}$, kéo theo $2abc \equiv 0 \pmod{3}$, điều này là vô lý vì $2abc$ không chia hết cho 3.

Như vậy trong ba số a, b, c có một số chia hết cho 3, kéo theo $2abc \div 3$, nên $a^2 + b^2 + c^2 \div 3$. (3)

Từ (2) và (3) kết hợp với ƯCLN(3;4) = 1 ta thu được $a^2 + b^2 + c^2 \div 12$.

b) Biến đổi phương trình ban đầu ta được: $(x - y)[x^2 + y^2 + xy - 6(x - y)] = 13$

Ta có: $x^3 - y^3 = 13 + 6(x - y)^2 > 0$. Suy ra $x^3 > y^3$ nên $x > y$ hay $x - y > 0$.

Trường hợp 1: $x - y = 1$ và $x^2 + y^2 + xy - 6(x - y) = 13$.

Suy ra $x^2 + (x-1)^2 + x(x-1) - 6 = 13$. Từ đó ta có $(x; y) = (3; 2)$ và $(x; y) = (-2; -3)$.

Trường hợp 2: $x - y = 13$ và $x^2 + y^2 + xy - 6(x - y) = 1$.

Suy ra $x^2 + (x-13)^2 + x(x-13) - 6 \cdot 13 = 1$.

Từ đó ta có $(x; y) = (3; -10)$ và $(x; y) = (10; -3)$.

Vậy phương trình có 4 nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(3; -10)$, $(10; -3)$.

Câu 34. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Cho n, m là các số tự nhiên và $n^4 + m^4$ chia hết cho 5. Tìm số dư khi chia $n^{2025} + m^{2025}$ cho 5.

Lời giải

Giả sử m, n không chia hết cho 5, suy ra m, n có tận cùng là 1; 2; 3; 4; 6; 7; 8; 9

Khi đó $\begin{cases} m^4 \equiv 1 \pmod{5} \\ n^4 \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$ suy ra $m^4 + n^4 \equiv 2 \pmod{5}$

Do đó m, n sẽ chia hết cho 5. Khi đó

$\begin{cases} m \equiv 0 \pmod{5} \\ n \equiv 0 \pmod{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^{2025} \equiv 0 \pmod{5} \\ n^{2025} \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}$ suy ra $m^{2025} + n^{2025} \equiv 0 \pmod{5}$

Vậy số dư khi chia $n^{2025} + m^{2025}$ cho 5 là 0.

Câu 35. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

a) Chứng minh với mọi số nguyên dương n , số $n^5 - 6n + 33$ không là số chính phương.

b) Cho các số nguyên dương a, b thỏa mãn điều kiện $a + b + 1$ là ước nguyên tố của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$. Chứng minh rằng $a + b - 1$ là ước của $4(a^2 + ab + b^2) - 3$.

Lời giải

a) Có $n^5 - 6n + 33 = (n^5 - n) - 5n + 33$.

Theo định lí Fermat có $n^5 \equiv n \pmod{5}$ nên $(n^5 - n) \equiv 0 \pmod{5}$

Do $5n \equiv 0, 33 \equiv 3 \pmod{5}$ nên suy ra $n^5 - 6n + 33 \equiv 3 \pmod{5} (*)$

Một số chính phương khi chia cho 5 chỉ có thể cho số dư thuộc $\{0; 1; 4\}$

Vậy từ $(*)$ suy ra $n^5 - 6n + 33$ không thể là số chính phương.

b) Theo giả thiết có

$$0 \equiv 4a^2 + 4ab + 4b^2 - 3 \equiv 4a^2 + 4a(-a-1) + 4(-a-1)^2 - 3 \pmod{a+b+1}$$

$$\text{hay } (2a+1)^2 \equiv 0 \pmod{a+b+1}.$$

Từ $a+b+1$ là số nguyên tố suy ra $(2a+1) : (a+b+1)$.

Ta có $0 < 2a+1 < 2(a+b+1)$ nên xảy ra $a+b+1 = 2a+1 \Rightarrow a = b$.

$$\text{Khi đó có } \begin{cases} a+b-1 = 2a-1 \\ 4(a^2+ab+b^2)-3 = 12a^2-3 = 3(2a+1)(2a-1) \end{cases}$$

$$\text{suy ra } [4(a^2+ab+b^2)-3] : (a+b-1).$$

Câu 36. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

a) Biết rằng $(1^2+1)(2^2+1)(3^2+1)\dots(n^2+1)$ chia hết cho 1297^2 , với n là số nguyên dương.

Chứng minh $n \geq 649$.

b) Tìm các số nguyên dương a, b thỏa mãn các điều kiện sau: $a-b$ là số nguyên tố, ab là số chính phương và $a+b-3$ chia hết cho 5.

Lời giải

a) Giả sử a là số nguyên dương bé nhất khác 36 sao cho $a^2+1 : 1297$

$$\text{Suy ra } (a^2+1) - 1297 : 1297.$$

$$\text{Lại có } (a^2+1) - 1297 = a^2 - 36^2 = (a+36)(a-36)$$

$$\text{Mà } 1297 \text{ là số nguyên tố suy ra } \begin{cases} a+36 : 1297 \\ a-36 : 1297 \end{cases}.$$

Nếu $a+36 : 1297$ thì a chia cho 1297 dư 1261 suy ra a bé nhất có thể là 1261.

Nếu $a-36 : 1297$ thì a chia cho 1297 dư 36 suy ra a bé nhất có thể là 1333.

$$\text{Như vậy } (1^2+1)(2^2+1)\dots(1261^2+1) : 1297^2.$$

Vậy $n \geq 649$.

b) Đặt $p = a-b$ và $d = (a, b)$, suy ra $a-b : d$ hay $p : d$.

Trường hợp 1: $d = p$ thì đặt $a = dx^2, b = dy^2$, với x, y nguyên dương và $(x, y) = 1$.

$$\text{Ta có } p = a-b = d(x^2 - y^2) = d(x-y)(x+y) \Rightarrow (x-y)(x+y) = 1.$$

Từ đây tính được $x = 1, y = 0$. (vô lý)

Trường hợp 2: $d = 1$ thì đặt $a = x^2, b = y^2$, với x, y nguyên dương và $(x; y) = 1$.

Ta có $p = a - b = (x - y)(x + y)$ suy ra $x - y = 1, x + y = p$.

Khi đó $x = \frac{p+1}{2}, y = \frac{p-1}{2}$. Do đó $a + b = x^2 + y^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2}$.

Mà $a + b - 3 = \frac{p^2+1}{2} - 3 = \frac{p^2-5}{2} : 5 \Rightarrow p^2 - 5 : 5$. Do vậy $p = 5$.

Khi đó $x = 3, y = 2$ thì $a = 9, b = 4$.

Câu 37. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $2xy + 2x + x + y = 0$.

Lời giải

Ta có: $2xy + 6x + y = 0$

$$4xy + 6x + 2y = 0$$

$$2x(2y + 3) + (2y + 3) = 3$$

$$(2x + 1)(2y + 3) = 3$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $2x + 1 \in \mathbb{Z}, 2y + 3 \in \mathbb{Z}$

Do đó ta có các trường hợp sau:

$$\text{Trường hợp 1: } \begin{cases} 2x + 1 = 1 \\ 2y + 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 2: } \begin{cases} 2x + 1 = 3 \\ 2y + 3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 3: } \begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ 2y + 3 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$\text{Trường hợp 4: } \begin{cases} 2x + 1 = -3 \\ 2y + 3 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

Vậy có 4 cặp số nguyên thỏa mãn là: $(0; 0), (2; -1), (-1; -3), (-2; -2)$

Câu 38. (Trường chuyên Phú Thọ năm 2025 – 2026)

a) Cho p là số nguyên tố; a, b là các số nguyên dương thỏa mãn $\frac{p}{a} + \frac{p}{b} = 1$ và $a + b$ chia hết cho p .

Chứng minh rằng $\frac{a+b}{p} = 4$.

b) Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương $n \geq 100$ sao cho $2^n + 3^n + 6^n - 1$ chia hết cho 2026.

Lời giải

a) Không mất tính tổng quát, giả sử $a \leq b$.

Từ đề bài, ta có:

$$\frac{p}{a} + \frac{p}{b} = 1$$

$$p(a+b) = ab$$

$$(a-p)(b-p) = p^2$$

$$\begin{cases} a-p=1, b-p=p^2 \\ a-p=b-p=p \end{cases}$$

Để ý rằng nếu $a = p+1, b = p^2 + p$ thì $a+b = p^2 + 2p + 1$ nên $a+b$ không chia hết cho p , dẫn đến mâu thuẫn.

Từ đó $a = b = 2p$ nên ta có ngay $\frac{a+b}{p} = 4$.

b) Trước hết, với mỗi số nguyên dương n , ta có ngay $2^n + 3^n + 6^n - 1$ chia hết cho 2.

Giờ ta cần chỉ ra n để $H_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ chia hết cho 1013.

$$\text{Chọn } n = 1011 \text{ thì ta có } 6H_{1011} = 3 \cdot 2^{1012} + 2 \cdot 3^{1012} + 6^{1012} - 6$$

Theo định lý Fermat nhỏ, ta có $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ với mọi p nguyên tố lẻ.

$$\text{Do đó, ta có ngay } 2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

$$\text{Do đó } 6H_{1011} \equiv 2 + 3 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod{1013}$$

Suy ra $2^{1011} + 3^{1011} + 6^{1011} - 1 \equiv 0 \pmod{1013}$ nên $n = 1011$ là số nguyên thỏa mãn đề bài.

Câu 39. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho các số nguyên a, b, c, d thỏa mãn $a^3 + 64b^3 - 2024c^3 + 2026d^3 = 0$.

Chứng minh rằng $(a + b + c + d)^2$ chia hết cho 9.

Lời giải

Giả sử a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a^3 + 64b^3 - 2024c^3 + 2026d^3 = 0$. (*)

Ta có $a^3 - a = (a-1)a(a+1):3$ khi đó $a^3 \equiv a \pmod{3}, b^3 \equiv b \pmod{3}, c^3 \equiv c \pmod{3}, d^3 \equiv d \pmod{3}$.

Ta lấy mod3 hai vế của (*) thì $a + b + c + d \equiv 0 \pmod{3}$.

Suy ra $(a + b + c + d)^2 \equiv 0 \pmod{9}$.

Câu 40. (Trường chuyên Quảng Bình năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình: $(x - y)(x + y) + x^2(1 - y) = 17 - 2y$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $\frac{p+1}{2}$ và $\frac{p^2+1}{2}$ là các số chính phương.

Lời giải

a) Giả sử tồn tại cặp số nguyên $(x; y)$ sao cho thỏa mãn

$$(x - y)(x + y) + x^2(1 - y) = 17 - 2y. (1)$$

Khi đó (1) trở thành $2x^2 - y^2 - x^2y + 2y = 17$ hay $(x^2 + y)(2 - y) = 17$.

Ta chú ý $(x^2 + y) + (2 - y) = x^2 + 2 > 0$, nên ta xét hai trường hợp sau

Trường hợp 1. $\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ 2 - y = 17 \end{cases}$ thì ta thu được $x^2 = 16, y = -15$.

Suy ra $(x; y) = (4; -15)$ hoặc $(x; y) = (-4; -15)$.

Trường hợp 2. $\begin{cases} x^2 + y = 17 \\ 2 - y = 1 \end{cases}$ thì ta thu được $x^2 = 16, y = 1$.

Suy ra $(x; y) = (4; 1)$ hoặc $(x; y) = (-4; 1)$.

Thử lại các bộ $(4; -15), (-4; -15), (4; 1), (-4; 1)$ đều thỏa mãn.

Vậy $(4; -15), (-4; -15), (4; 1), (-4; 1)$ là các cặp số nguyên cần tìm.

b) Giả sử tồn tại số nguyên tố p sao cho $\frac{p+1}{2}, \frac{p^2+1}{2}$ đều là số chính phương.

Khi đó, ta đặt $x^2 = \frac{p+1}{2}, y^2 = \frac{p^2+1}{2}$, với x, y là các số nguyên dương. Ta có
$$\begin{cases} p+1 = 2x^2 \\ p^2+1 = 2y^2 \\ x < y < p \end{cases}$$

Ta thấy $p+1 \equiv p^2+1 \equiv 1 \pmod{p}$ nên $2x^2 \equiv 2y^2 \pmod{p}$ và hiển nhiên p lẻ.

Suy ra: $(x-y)(x+y) \equiv 0 \pmod{p}$.

Mà $x < y < p$ nên $y-x$ không chia hết cho p , suy ra $x+y$ chia hết cho p . Và cũng do $0 < x+y < 2p$ nên $x+y = p$. Từ đó ta có: $p^2+1 = 2(p-x)^2 = 2p^2 - 4px + 2x^2 = 2p^2 - 4px + p+1$.

Hay $4x = p+1 = 2x^2$, khi đó $x = 2$ do x nguyên dương.

Như vậy $x = 2$ thì $p = 7$ kéo theo $y = 5$.

Vậy số nguyên tố p cần tìm là 7.

Câu 41. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x; y)$ của phương trình $6xy - 3x + 2y - 8 = 0$.

b) Cho $A = (9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n)$ với m và n là hai số nguyên dương. Chứng minh rằng nếu A chia hết cho 19 thì A có ít nhất một ước số là số chính phương khác 1.

Lời giải

a) $6xy - 3x + 2y - 8 = 0$

$$6xy - 3x + 2y - 1 = 7$$

$$(2y-1) \cdot (3x+1) = 7$$

Kẻ bảng các trường hợp

$3x+1$	-7	-1	1	7
$2y-1$	-1	-7	7	1

Giải các trường hợp trên với $(x; y)$ là cặp số nguyên, ta được các nghiệm của phương trình đã cho là: $(0; 4)$ và $(2; 1)$.

b) Giả sử $(9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n) : 19 \Rightarrow \begin{cases} (9m + 2024n) : 19 \\ (2024m + 9n) : 19 \end{cases}$, vì 19 là số nguyên tố.

Trường hợp 1: $(9m + 2024n) : 19$

Vì $(9m + 2024n) + (2024m + 9n) = 2033(m + n) = 19 \cdot 107(m + n) \div 19$ nên $(2024m + 9n) \div 19$

Do đó, $(9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n) \div (19 \cdot 19)$ hay $A \div 19^2$.

Trường hợp 2: $(2024m + 9n) \div 19$, tương tự ta cũng thu được $(9m + 2024n) \cdot (2024m + 9n) \div 19^2$

Vậy nếu A chia hết cho 19 thì A có ít nhất một ước số là số chính phương khác 1.

Câu 42. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho ba số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $a > 1, b > c > 1$ và $abc + 1$ chia hết cho $ab - b + 1$. Chứng minh b chia hết cho a .

Lời giải

Ta có: $(abc + 1) - (ab - b + 1) = b(ac - a + 1)$

Vì $(abc + 1) \div (ab - b + 1)$ nên $b(ac - a + 1) \div (ab - b + 1)$ (1)

Vì $ab - b + 1 = (a - 1)b + 1$ nên $ab - b + 1$ và b là hai số nguyên tố cùng nhau.

Do đó (1) $\Rightarrow (ac - a + 1) \div (ab - b + 1)$ hay $(ac - a + 1) = k \cdot (ab - b + 1), k \in \mathbb{N}^*$. (2)

Ta có: $ac - a + 1 = a(c - 1) + 1 > 0$;

$2(ab - b + 1) - (ac - a + 1) = ab - ac + ab - 2b + a + 1 = a(b - c) + (a - 2)b + a + 1 > 0$.

Do đó $0 < ac - a + 1 < 2(ab - b + 1) \Rightarrow 0 < k \cdot (ab - b + 1) < 2(ab - b + 1) \Rightarrow k = 1$ (3)

Từ (2) và (3) suy ra: $ac - a + 1 = ab - b + 1 \Rightarrow b = ab - ac + a = a(b - c + 1) \Rightarrow b \div a$.

Câu 43. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

a) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn $y^3 + 3y^2 + 3y + x^2 - 6x = 23$.

b) Tìm các số nguyên tố p, q với $p < q$ thỏa mãn số $A = 2(p^2 + 1)(5q^2 + 29)$ có thể viết được dưới dạng tích của từ hai số nguyên liên tiếp trở lên.

Lời giải

a) Ta có:

$$y^3 + 3y^2 + 3y + x^2 - 6x = 23$$

$$(y + 1)^3 + (x - 3)^2 = 23$$

Khi đó do $y + 1$ nguyên dương nên $(y + 1)^3 \leq 23 \Rightarrow y + 1 \leq \sqrt[3]{23} \Rightarrow y \leq 2$

Nếu $y=1$ thì $(x-3)^2 = 25 \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ x=-2 \end{cases} \Rightarrow x=8$

Nếu $y=2$ thì $(x-3)^2 = 6$ suy ra không có giá trị x thoả mãn.

Vậy cặp số thoả mãn đề bài là $(x; y) = (8; 1)$.

b) Ta thấy nếu A là tích của ít nhất của ba số tự nhiên liên tiếp thì A chia hết cho 3.

Ta thấy $p^2, q^2 \equiv 0, 1 \pmod{3} \Rightarrow p^2 + 1, 5q^2 + 29 \equiv 1; 2 \pmod{3}$

Như vậy A không chia hết cho 3.

Suy ra A chỉ có thể là tích của hai số tự nhiên liên tiếp.

Giả sử $A = 2(p^2 + 1)(5q^2 + 29) = n(n+1) \Rightarrow 8(p^2 + 1)(5q^2 + 29) + 1 = (2n+1)^2 \quad (1)$

Ta xét $q > p > 3$, thì $p^2 \equiv q^2 \equiv 1 \pmod{3}$.

Khi đó $VT(1) = 8(1+1)(5+29) + 1 \equiv 2 \pmod{3}$.

Mà $VP(1)$ là số chính phương, như vậy vô lý. Khi đó có ít nhất một số bằng 3.

Nếu $q=3$ thì $p=2$, ta có $A=740=n(n+1)$.

Ta thấy phương trình này không có nghiệm nguyên.

Nếu $p=3$ thì $20(5q^2 + 29) = n(n+1) \Rightarrow 100q^2 + 580 = n(n+1)$

$(20q)^2 + 2321 = (2n+1)^2$

$2321 = (2n+1-20q)(2n+1+20q)$

Ta thấy $2n+1-20q < 2n+1+20q$ ta có bảng sau:

$2n+1+20q$	2321	211
$2n+1-20q$	1	11
n	580	55
q	58 (loại)	6

Như vậy $q=5$. Thử lại thì $55 \cdot 56 = 3080 = n(n+1)$.

Vậy $(p; q) = (3; 5)$ là bộ số ta cần tìm.

Câu 44. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)

a) Giả sử a và b là các số nguyên sao cho phương trình $x^2 + ax + b = 0$ nhận số hữu tỉ $\frac{p}{q}$ làm nghiệm (p và q nguyên tố cùng nhau). Chứng minh p chia hết cho q .

b) Tìm tất cả các số hữu tỉ dương x, y sao cho xy và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ đều là các số nguyên.

Lời giải

a) Ta thấy $\frac{p}{q}$ là nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$ nên $\left(\frac{p}{q}\right)^2 + a \cdot \frac{p}{q} + b = 0$

Suy ra: $p^2 + apq + bq^2 = 0$ nên $p^2 : q$ mà $(p; q) = 1$ dẫn đến $q = 1$.

Như vậy p chia hết cho q .

b) Giả sử tồn tại x, y thỏa mãn điều kiện bài toán

Đặt $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d}$ với $(a; b) = 1, (c; d) = 1, a, b, c, d$ là các số nguyên dương.

Khi đó: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{bc + ad}{ac}$ nguyên dương nên $bc + ad : ac$

Do đó: $\begin{cases} bc + ad : a \\ bc + ad : c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} bc : a \\ ad : c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a : c \\ c : a \end{cases} \Rightarrow a = c$

Mà $xy = \frac{ac}{bd}$ nên $ac : bc$ hay $a^2 : b \Rightarrow b = 1$ do $(a; b) = 1$

Tương tự $d = 1$. Như vậy x, y nguyên dương. Ta có $1 \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = 2$

TH1: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 2 \Rightarrow x = y = 1$ (thỏa mãn)

TH2: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1 \Rightarrow x + y = xy \Rightarrow 1 = (x - 1)(y - 1) \Rightarrow x = y = 2$ (thỏa mãn)

Như vậy các bộ $(x; y)$ thỏa mãn bài toán là $(1; 1)$ và $(2; 2)$

Câu 45. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thoả mãn điều kiện $x^2 - xy - x + 2y + 1 = 0$.

Lời giải

Ta có $x^2 - xy - x + 2y + 1 = 0$

$$(x-2)y = x^2 - x + 1 \quad (1)$$

Khi $x = 2$ phương trình (1) trở thành $0 \cdot y = 3$ (vô nghiệm)

Khi $x \neq 2$ phương trình (1) tương đương với

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} \text{ hay } y = x + 1 + \frac{3}{x - 2}$$

Mà x, y là các số nguyên nên $x - 2$ là ước của 3. Khi đó

$$x - 2 = 1 \text{ hay } x = 3. \text{ Suy ra } y = 7$$

$$x - 2 = -1 \text{ hay } x = 1. \text{ Suy ra } y = -1$$

$$x - 2 = 3 \text{ hay } x = 5. \text{ Suy ra } y = 7$$

$$x - 2 = -3 \text{ hay } x = -1. \text{ Suy ra } y = -1$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên là $(3; 7), (1; -1), (5; 7), (-1; -1)$.

Câu 46. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$.

b) Cho số nguyên dương n và biểu thức $A = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$. Chứng minh: $3A$ chia hết cho $2n + 1$ và $\frac{24A + 2n + 1}{2n + 1}$ là một số chính phương.

Lời giải

$$a) 3x^2 - y^2 - 2xy - 2x - 2y + 8 = 0$$

$$y^2 + 2xy - 3x^2 + 2x + 2y - 8 = 0$$

$$(y + x)^2 - 4x^2 + 2(x + y) + 1 - 9 = 0$$

$$(x + y + 1)^2 = 4x^2 + 9$$

$$(y - x + 1)(3x + y + 1) = 9$$

Do $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $y - x + 1; 3x + y + 1$ đều là số nguyên

Đến đây chia các trường hợp giải hệ phương trình ta được

$$(x; y) \in \{(2; 2); (-2; 6); (0; 2); (-2; 4); (2; -8); (0; -4)\}$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(2; 2); (-2; 6); (0; 2); (-2; 4); (2; -8); (0; -4)\}$.

b) $A = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

$$= 1(2-1) + 2(3-1) + \dots + n(n+1-1)$$

$$= 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) - (1+2+3+\dots+n)$$

Đặt $B = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1)$

$$\Rightarrow 3B = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot (4-1) + \dots + n(n+1)(n+2-n+1) = n(n+1)(n+2)$$

$$\Rightarrow B = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\Rightarrow A = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3A = n(n+1)\left(n+2-\frac{3}{2}\right)$$

$$= n(n+1) \cdot \frac{2n+1}{2} \text{ do } 3A \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3A : 2n+1 \text{ (đpcm)}$$

Ta có: $\frac{24A+2n+1}{2n+1} = \frac{8 \cdot 3A+2n+1}{2n+1}$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)+2n+1}{2n+1}$$

$$= \frac{4n^2+4n+1}{1} = (2n+1)^2 \text{ là số chính phương do } n \in \mathbb{Z}^+$$

$$\Rightarrow \frac{24A+2n+1}{2n+1} \text{ là số chính phương (đpcm).}$$

Câu 47. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

a) Cho số nguyên dương n là tích của ba số nguyên tố phân biệt. Biết rằng, tổng tất cả các ước nguyên dương của n bằng $2n - 16$. Chứng minh rằng $n - 8$ chia hết cho 6.

b) Cho p là số nguyên tố thoả mãn $p - 1$ chia hết cho 4. Chứng minh rằng $p^3 - p^2 - 4$ không phải là số chính phương.

Lời giải

a) Giả sử $n = pqr$, với p, q, r là các số nguyên tố phân biệt.

Ta có các ước dương của n là $1, p, q, r, pq, qr, pr, pqr$. Theo giả thiết thì

$$2n - 16 = 1 + p + q + r + pq + qr + rp + pqr = (1 + p)(1 + q)(1 + r).$$

Tức là $(1 + p)(1 + q)(1 + r).2pqr - 16 = (1 + p)(1 + q)(1 + r) : 4$.

Trong p, q, r phải có ít nhất hai số nguyên tố lẻ. Suy ra $(1 + p)(1 + q)(1 + r) = 2(n - 8) : 4$.

Hay nói cách khác $n - 8 : 2$. (1)

Giả sử ta p, q, r là các số nguyên tố chia cho 3 dư 1, thì có $p + 1, q + 1, r + 1$ chia cho 3 dư 2.

Do đó $(1 + p)(1 + q)(1 + r)$ chia cho 3 dư 2 và $2pqr$ chia cho 3 dư 2.

Suy ra $16 = 2pqr - (1 + p)(1 + q)(1 + r)$ chia hết cho 3. Dẫn đến điều vô lý.

Như vậy trong ba số tồn tại một số chia cho 3 dư 2.

Khi đó $(1 + p)(1 + q)(1 + r) = 2(n - 8) : 3$ hay $n - 8 : 3$. (2)

Từ (1) và (2) ta có $n - 8$ chia hết cho 6.

b) Giả sử $p^3 - p^2 - 4$ là số chính phương, đặt $p^3 - p^2 - 4 = a^2$.

Khi đó $a^2 = (p - 2)(p^2 + p + 2)$.

Đặt $d = \text{ƯCLN}(p - 2; p^2 + p + 2)$. Suy ra $(p - 2)(p + 3) + 8 : d \Rightarrow 8 : d$.

Nếu d chẵn thì $p - 2$ chẵn và kéo theo $p - 1$ lẻ, vô lý do $p - 1 : 4$.

Nếu $d = 1$. Khi đó $p - 2, p^2 + p + 2$ đều là số chính phương.

Do $p - 1$ chia hết cho 4 nên $p - 2$ chia cho 4 dư 3, suy ra $p - 2$ không thể là số chính phương (do số chính phương chia cho 4 chỉ dư 0 hoặc 1). Như vậy điều giả sử là sai.

Vậy $p^3 - p^2 - 4$ không thể là số chính phương.

Câu 48. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $2x^3 + y^3 + 2x^2y + xy^2 = 2xy - 5$.

b) Tìm tất cả các bộ số $(x; y; p)$ thỏa mãn $\frac{xy^3}{x+y} = p$, biết x, y, p là các số nguyên dương và p là số nguyên tố.

Lời giải

a) Ta có: $2x^3 + y^3 + 2x^2y + xy^2 = 2xy - 5$ hay $(2x^2 + y^2)(x + y) = 2xy - 5$.

Suy ra $2xy - 5 : 2x^2 + y^2$. Ta thấy $2xy - 5 \neq 0$.

Nếu $2xy - 5 > 0$ thì $2x^2 + y^2 \leq 2xy - 5 \Rightarrow x^2 + (x - y)^2 \leq -5$.

Nếu $2xy - 5 < 0$, khi đó $5 - 2xy : 2x^2 + y^2$ thì $2x^2 + y^2 \leq 5 - 2xy \Rightarrow (x + y)^2 + x^2 \leq 5$.

Suy ra $x^2 \leq 5 \Rightarrow x \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Mặt khác $2x^3 + 2x^2y + xy^2 - 2xy = -y^3 - 5$.

Trường hợp 1: $x = -2 \Rightarrow y^3 - 2y^2 + 12y - 11 = 0 \Rightarrow (y - 1)(y^2 - y + 11) = 0$.

Vì $y^2 - y + 11 > 0$ nên $y = 1$.

Trường hợp 2: $x = 2 \Rightarrow y^3 + 2y^2 + 4y + 21 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y^2 - y + 7) = 0$.

Vì $y^2 - y + 7 > 0$ nên $y = -3$.

Trường hợp 3: $x = -1 \Rightarrow y^3 - y^2 + 4y + 3 = 0$.

Ta thấy $-3 = y^3 - y^2 + 4y = y^2(y - 1) + 4y : 2$ (vô lý)

Vậy phương trình này không có nghiệm nguyên.

Trường hợp 4: $x = 1 \Rightarrow y^3 + y^2 + 7 = 0$. Ta thấy $-7 = y^3 + y^2 = y^2(y + 1) : 2$ (vô lý)

Vậy phương trình này không có nghiệm nguyên.

Trường hợp 5: $x = 0 \Rightarrow y^3 = -5$. (vô lý do -5 không là lập phương của số nguyên)

Vậy $(-2; 1)$ và $(2; -3)$ là các nghiệm nguyên của phương trình đã cho.

b) Đặt $d = (x, y)$ khi đó tồn tại a, b nguyên dương sao cho $x = da, y = db$ với $(a; b) = 1$.

Khi đó $p = \frac{d^3 ab^3}{a + b}$. Giả sử $(ab^3, a + b) > 1$ và gọi q là ước nguyên tố của $(ab^3, a + b)$.

Nếu $b^3 \vdots q$ thì $a + b \vdots q$, $b \vdots q \Rightarrow a \vdots q$, suy ra $(a; b) \vdots p$, vô lý do $(a; b) = 1$.

Tương tự nếu thì suy ra $a \vdots q$ được điều vô lý. Như vậy $(ab^3; a + b) = 1$.

Suy ra $d^3 \vdots a + b$. Ta có: $p = \frac{d^3}{a+b} \cdot ab^3$.

Ta thấy khi $b^3 > 1$ thì $b^3 = p$, vô lý. Như vậy $b^3 = 1 \Rightarrow b = 1$. Khi đó $p = \frac{d^3}{a+1} \cdot a$.

Nếu $a = 1$ thì $p = \frac{d^3}{2} \Rightarrow d^3 = 2p$. Ta có $d^3 \vdots 2$ hay $d^3 \vdots 8 \Rightarrow 2p \vdots 4 \Rightarrow p \vdots 2$.

Như vậy $d^3 = 4$, vô lý.

Nếu $d^3 = a + 1$ và $p = a$ thì $d^3 = p + 1 \Rightarrow p = (d - 1)(d^2 + d + 1)$.

Do đó $\begin{cases} d - 1 = 1 \\ d^2 + d + 1 = p \end{cases} \Rightarrow d = 2, p = 7$.

Suy ra $a = 7, b = 1, d = 2, p = 7$. Hay $x = 14, y = 2, p = 7$.

Thử lại ta thấy thoả mãn. Như vậy bộ $(14; 2; 7)$ thoả mãn yêu cầu bài toán.

Câu 49. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$, trong đó x và y là số nguyên tố thoả mãn $x^4 + 227 = y^5$.

Lời giải

Ta xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: $x = 3$. Khi đó: $y^5 = 3^4 + 227 = 308$

Mặt khác $3^5 < y^5 < 4^5$ nên $3 < y < 4$ (vô lý vì y là số nguyên).

Trường hợp 2: $x \neq 3$. Khi đó: $x^4 \equiv 1 \pmod{3}$

Suy ra $x^4 + 227$ chia hết cho 3. Do đó y^5 chia hết cho 3, suy ra y chia hết cho 3.

Do y là số nguyên tố nên $y = 3$, dẫn đến: $x^4 = 3^5 - 227 = 16$

suy ra $x = 2$ (do x là số nguyên tố).

Vậy có một cặp số $(x; y)$ duy nhất thoả mãn là $(2; 3)$.

Câu 50. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng:

- a) $A = 4^p - 3^p - 1$ chia hết cho $3p$.
 b) $A = 4^p - 3^p - 1$ chia hết cho $39p$.

Lời giải

a) Ta có $A = 4^p - 3^p - 1 \equiv 1^p - 0 - 1 \pmod{3} \equiv 0 \pmod{3}$ suy ra $A \vdots 3$. (1)

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $(4; p) = (3; p) = 1$. Áp dụng định lý Fermat ta có:

$$4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}; 3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow A = 4^p - 3^p - 1 \equiv 4 - 3 - 1 \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$$

Hay $A \vdots p$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $A = 4^p - 3^p - 1$ chia hết cho $3p$.

b) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p = 3k + i, i \in \{1; 2\}$.

$$\text{Suy ra } 3^p = 3^{3k+i} = 3^i \cdot 3^{3k} = 3^i \cdot 27^k \equiv 3^i \cdot 1^k \pmod{13} \equiv 3^i \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$$

Do đó $3^p - 1$ không chia hết cho 13. (3)

$$\text{Khi đó: } A \cdot (3^p - 1) = -(1 + 3^p - 4^p)(3^p - 1) \equiv -(1 + 3^p - (-9)^p)(3^p - 1) \pmod{13}$$

$$\equiv (9^p + 3^p + 1)(1 - 3^p) \pmod{13} \equiv 1 - (3^p)^3 \pmod{13} \equiv 1 - 27^p \pmod{13} \equiv 0 \pmod{13}.$$

$$\text{Hay } A \cdot (3^p - 1) \equiv 0 \pmod{13} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra $A \equiv 0 \pmod{13}$ hay $A \vdots 13$. (5)

Nếu $(p; 13) = 1$ thì theo (1), (2), (5) suy ra $A \vdots 39p$.

Nếu $p = 13$ thì ta có $4^{13} - 3^{13} - 1 = 65514540$ chia hết cho $39p = 507$.

II. Tổ hợp

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Cho đa giác đều $A_1, A_2, \dots, A_{2026}$. Tại mỗi đỉnh A_k , người ta ghi một số nguyên a_k ($k = 1; 2; \dots; 2026$) sao cho $a_i \neq a_j; \forall i, j \in \{1; 2; \dots; 2026\}, i \neq j$ và giá trị tuyệt đối của hiệu hai số ghi trên hai đỉnh kề nhau là một số không lớn hơn 5. Tìm giá trị lớn nhất của $|a_i - a_j|; \forall i, j \in \{1; 2; \dots; 2026\}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử $a_1 = 0$ là số nhỏ nhất trên đa giác, và a_k là số lớn nhất.

Ta thấy cách điền $a_1; a_2; \dots; a_{2026} = 0; 5; 10; 15; \dots; 5060; 5064; 5059; 5054; \dots; 9; 4$ thỏa mãn điều kiện đề bài và có $\max |a_i - a_j| = 5064$.

Ta chứng minh đây là giá trị lớn nhất có thể đạt được.

Thật vậy, giả sử $a_k \geq 5065$. Có tổng cộng 2024 đỉnh khác a_1, a_k , nên tồn tại một bên (trái hoặc phải so với a_k) chứa không quá 1012 đỉnh, giả sử là bên chứa a_2 .

$$\text{Khi đó: } a_2 = a_k - (a_k - a_{k-1} + a_{k-1} - a_{k-2} + \dots + a_3 - a_2) \geq 5065 - 5 \cdot 1012 = 5 \Rightarrow a_2 - a_1 \geq 5$$

Mà $|a_2 - a_1| \leq 5$ do đó dấu bằng xảy ra khi $a_k = 5065$ và $a_2 = 5, a_3 = 10, \dots$ do đó $k = 1014$.

Đến đây lập luận tương tự ta có

$$a_{2026} = a_{1014} - (a_{1014} - a_{1015} + a_{1015} - a_{1016} + \dots + a_{2025} - a_{2026}) \geq 5065 - 5 \cdot 1012 = 5a_{2026} - a_1 \geq 5$$

Mà $|a_{2026} - a_1| \leq 5$ nên dấu bằng xảy ra khi $a_{2026} = 5 = a_2$, mâu thuẫn.

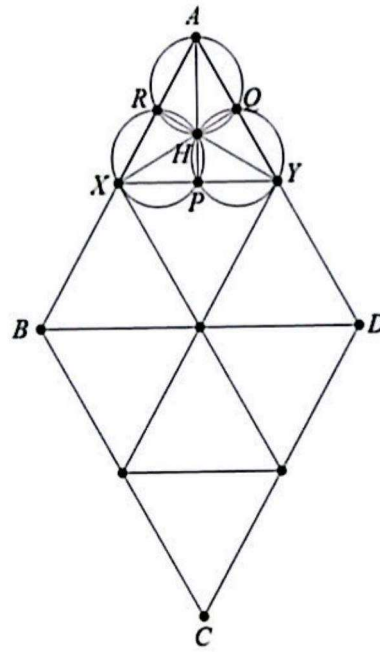
Vậy giá trị lớn nhất của $|a_i - a_j|$ là 5064.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

Cho hình thoi $ABCD$ có $\hat{A} = 60^\circ$ và $AC = 6$ cm. Chứng minh rằng, với 25 điểm bất kì trong hình thoi này thì luôn tồn tại hai điểm có khoảng cách không vượt quá 1 cm.

Lời giải

Hình thoi $ABCD$ có cạnh độ dài là $2\sqrt{3}$.



Ta chia tam giác đều ABD thành 4 hình tam giác bằng nhau như hình. Mỗi tam giác đều bằng nhau đó có cạnh $\sqrt{3}$.

Ta chứng minh rằng mỗi tam giác đều đó có thể phủ kín được bởi 3 hình tròn đường kính 1. Xét tam giác AXY như hình có 3 đường cao AP, XQ, YR thì 3 đường tròn ngoại tiếp 3 tứ giác $ARHQ, XRHP, YQHP$ có đường kính là 1. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Vậy hình thoi $ABCD$ có thể phủ được bởi 24 hình tròn đường kính 1.

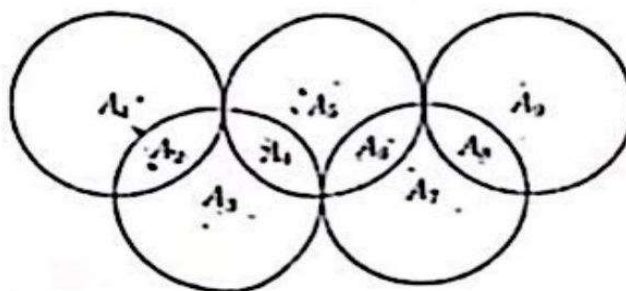
Có 25 điểm trong hình thoi, nói cách khác có 2 điểm nằm trong 1 hình tròn.

Khoảng cách giữa 2 điểm đó cùng lắm là 1.

Do đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

Cho 5 đường tròn có cùng bán kính và sắp xếp để tạo thành 9 miền được kí hiệu là $A_1, A_2, \dots, A_9$ (như hình vẽ). Sau đó, điền vào 9 miền trên các số được lấy từ 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9 sao cho mỗi miền được điền bởi một số, hai miền khác nhau được điền bởi hai số khác nhau và tổng các số trong mỗi hình tròn đều bằng 14.



a) Tính tổng các số ở các miền A_2, A_4, A_6, A_8 .

b) Hỏi có bao nhiêu cách điền thỏa mãn điều kiện trên? Vì sao?

Lời giải

a) Gọi $x_1, \dots, x_9$ lần lượt là các số được điền vào miền $A_1, A_2, \dots, A_9$ ($a_i \in \{1; \dots; 9\}, \forall i$).

Khi đó tổng các số trên cả 5 đường tròn sẽ là $5 \cdot 14 = 70$. Ta có thể viết lại thành:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_9) + (x_2 + x_4 + x_6 + x_8) = 70$$

$$\text{Mà } x_1 + \dots + x_9 = 1 + \dots + 9 = 45 \Rightarrow x_2 + x_4 + x_6 + x_8 = 70 - 45 = 25$$

b) Ta có nhận xét sau: (x_1, x_2) và (x_8, x_9) chỉ có thể nhận hoán vị của bộ số $(5; 9)$ hoặc $(6; 8)$. Thật vậy vì $x_1 + x_2 = x_8 + x_9 = 14$ mà $14 = 9 + 5 = 8 + 6 = 7 + 7 = 6 + 8 = 5 + 9 = 4 + 10 = \dots$, do đó nếu không nhận hai cặp trên thì tồn tại x_j mà $x_j \geq 10$, vô lý. Khi đó $x_2 + x_8$ chỉ có thể nhận các giá trị 11; 13; 15; 17. Đến đây ta chỉ cần xét các trường hợp:

$$x_2 + x_8 = 11 \Rightarrow x_4 + x_6 = 25 - 11 = 14 \Rightarrow x_5 = 0, \text{ vô lý}$$

$$x_2 + x_8 = 13 \Rightarrow x_4 + x_6 = 12 = 9 + 3 = 8 + 4 = 7 + 5, \text{ dễ thấy đều vô lý do các số trong cặp đều đã sử dụng}$$

$$x_2 + x_8 = 17 \Rightarrow x_4 + x_6 = 25 - 17 = 8 = 1 + 7 = 2 + 6 = 3 + 5, \text{ mà } x_2 + x_8 = 17 \text{ thì } x_2, x_8 \text{ là hoán vị của } (9; 8), \text{ khi đó tổng ở một vòng tròn vượt quá } 14.$$

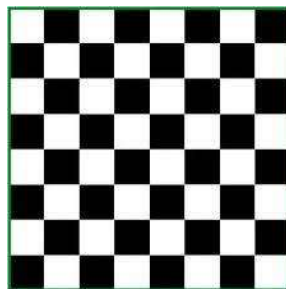
$$x_2 + x_8 = 15 \Rightarrow x_4 + x_6 = 10 \text{ chỉ có cặp } (3; 7) \text{ thỏa. Giả sử } (x_4; x_6) = (7; 3) \text{ thì ta dễ dàng chọn được } x_1 = 8, x_2 = 6, x_3 = 1, x_4 = 7, x_5 = 4, x_6 = 3, x_7 = 2, x_8 = 9, x_9 = 5$$

và bộ $(x_4; x_6) = (3; 7)$ ta thực hiện tương tự thỏa mãn.

Vậy chỉ có hai cách điền thỏa bài toán

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Cho bàn cờ vua có 64 ô vuông như hình vẽ. Trong mỗi ô vuông của bàn cờ ghi ngẫu nhiên một số nguyên dương nhỏ hơn 10 đồng thời hai số được ghi trong hai ô vuông có chung cạnh hoặc chung đỉnh là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh rằng trên bàn cờ tồn tại một số xuất hiện ít nhất 11 lần.



Lời giải

Bàn cờ vua có kích thước 8×8 ;

Xét hình vuông kích thước 2×2 (gồm bốn hình vuông nhỏ kích thước 1×1), trong hình vuông này, mỗi hình vuông 1×1 luôn có chung cạnh hoặc chung đỉnh với ba hình vuông còn lại, nên trong 4 số nguyên dương được viết trong bốn hình vuông nhỏ này chỉ có nhiều nhất một số chẵn (vì nếu có 2 số chẵn sẽ mâu thuẫn với giả thiết nguyên tố cùng nhau) và cũng có nhiều nhất một số chia hết cho 3. Do đó trong bốn hình vuông 1×1 này chắc chắn có ít nhất hai số lẻ không chia hết cho 3.

Bàn cờ vua có kích thước 8×8 có $64 : 4 = 16$ hình vuông 2×2 không giao nhau, nên có ít nhất $2 \times 16 = 32$ số lẻ không chia hết cho 3.

Trong 9 số nguyên dương nhỏ hơn 10 chỉ có 3 số lẻ không chia hết cho 3 là 1; 5; 7 nên theo nguyên lí Dirichlet tồn tại một trong ba số 1; 5; 7 xuất hiện ít nhất $\left\lceil \frac{32}{3} \right\rceil + 1 = 11$ lần.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Cho bảng ô vuông có kích thước 4×4 như hình sau:

Mỗi ô trong bảng này được viết một số nguyên dương sao cho 16 số trên bảng đôi một khác nhau. Trong mỗi hàng, mỗi cột luôn tồn tại một số bằng tổng ba số còn lại trong hàng, trong cột đó. Gọi M là số lớn nhất trong 16 số trên bảng. Tìm giá trị nhỏ nhất của M .

Lời giải

Gọi a_1, a_2, a_3, a_4 là các số lớn nhất trong các cột 1; 2; 3; 4 và gọi $b_1, b_2, \dots, b_{12}$ là các số trong các ô còn lại. Khi đó $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + \dots + b_{12}$.

Do các số trong 16 ô vuông đôi một khác nhau nên $b_1 + b_2 + \dots + b_{12} \geq 1 + 2 + \dots + 12 = 78$

và $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq M + (M - 1) + (M - 2) + (M - 3) = 4M - 6$

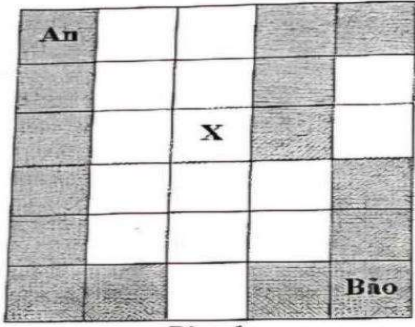
Suy ra $4M - 6 \geq 78 \Rightarrow M = 21$.

Xây dựng một bảng ô vuông ứng với $M = 21$

1	8	12	21
7	9	20	4
10	19	3	6
18	2	5	11

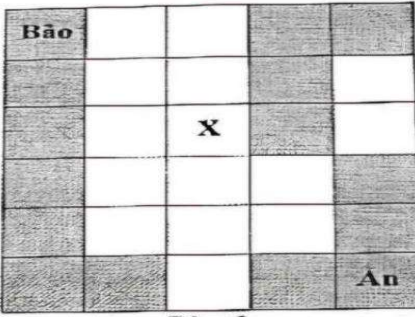
Câu 6. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

Trên sân trường có một bảng ô vuông kích thước 6 m x 5 m. Có 15 học sinh mặc áo màu xanh (trong đó chỉ có đúng một học sinh tên An và một học sinh tên Bảo) và 14 học sinh mặc áo màu trắng xếp hình thành chữ LS (viết tắt chữ Lam Sơn) sao cho mỗi học sinh đứng ở một ô vuông 1 m x 1 m, dư lại một ô vuông trống (đánh dấu X), hai học sinh mặc áo xanh tên An và Bảo đứng ở hai ô vuông góc đối diện như hình vẽ (bảng 1).



An					
		X			
				Bao	

Bảng 1



Bao					
		X			
				An	

Bảng 2

Cho phép đổi vị trí các học sinh trong bảng theo quy tắc: Mỗi lần, chọn một học sinh đứng ở ô vuông kề với ô vuông trống rồi chuyển học sinh đó sang ô vuông trống. Hỏi bằng cách thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép chuyển học sinh theo quy tắc trên đối với bảng 1 ta có thể nhận được cách xếp sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí như hình vẽ (bảng 2) hay không? Vì sao?

Lời giải

Tại thời điểm ban đầu ta gán cho 29 học sinh đứng trên sân trường các số 1;2;3;...;29 như trong bảng sau:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	X	13	14
15	16	17	18	19
20	21	22	23	24
25	26	27	28	29

Xét dãy $S = \{a_1; a_2; \dots; a_{28}; a_{29}\}$ gồm các số được gán cho 29 học sinh trên sân trường theo thứ tự từ trái sang phải và từ trên xuống dưới. Tại thời điểm đầu dãy S là $1; 2; 3; \dots; 28; 29$ với $a_1 = 1; a_2 = 2; \dots; a_{28} = 28; a_{29} = 29$.

Nếu sau một số phép chuyển mà An và Bảo đổi chỗ cho nhau thì ta có dãy S là $29; 2; 3; \dots; 28; 1$. Khi đó $a_1 = 29; a_2 = 2; \dots; a_{28} = 28; a_{29} = 1$.

Xét n là số các cặp $(i; j)$ trong đó $1 \leq i < j \leq 29$ nhưng $a_i > a_j$.

Tại thời điểm đầu ta có $n = 0$.

Tại thời điểm cuối cùng với dãy S là $29; 2; 3; \dots; 28; 1$ thì ta có 55 cặp $(i; j)$ như trên là $(1; 2), (1; 3), \dots, (1; 28), (1; 29), (2; 29), (3; 29), \dots, (28; 29)$. Do đó $n = 55$.

Chú ý rằng với mỗi phép chuyển học sinh sang ô vuông trống thì chỉ có 2 khả năng xảy ra:

Nếu học sinh di chuyển sang trái hoặc phải trên cùng 1 hàng của bảng thì dãy S không thay đổi, nên n không thay đổi.

Nếu học sinh di chuyển lên hàng trên hoặc xuống hàng dưới thì số được gán cho học sinh đó đã tiến 4 vị trí hoặc lùi 4 vị trí trong dãy S . Khi đó n tăng 4 hoặc giảm 4.

Ví dụ khi học sinh gán số 8 chuyển sang ô X thì dãy S mới là $1; 2; \dots; 7; 9; 10; 11; 12; 8; 13; 14; \dots; 28; 29$, ta thấy có thêm 4 cặp $(i; j)$ trong đó $1 \leq i < j \leq 29$ nhưng $a_i > a_j$ là $(8; 12), (9; 12); (10; 12), (11; 12)$.

Vậy lúc đầu $n = 0$ thì sau một số hữu hạn phép chuyển không thể nhận được $n = 55$. Do đó không thể nhận được cách xếp sao cho An và Bảo đổi chỗ cho nhau còn các học sinh khác giữ nguyên vị trí.

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Cho tập hợp $A = \{201; 203; \dots; 2021; 2023\}$ gồm 912 số tự nhiên lẻ. Cần chọn ra ít nhất bao nhiêu số từ tập hợp A sao cho trong các số được chọn luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288?

Lời giải

Xét các cặp số $(a; b)$ trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là:

$$(2023; 265), (2021; 267), (2019; 269), \dots, (1147; 1141), (1145; 1143) \quad (*)$$

Số các cặp số $(a; b)$ trong tập hợp A có tổng bằng 2288 là:

$$\frac{2023 - 1145}{2} + 1 = 440.$$

Số các số trong tập hợp A mà không có số ghép đôi để tổng bằng 2288 là:

$$912 - 2 \cdot 440 = 32.$$

Chọn ra 441 số từ $(*)$, theo Dirichlet tồn tại một nhóm chứa 2 số có tổng bằng 2288.

Vậy cần chọn ít nhất $441 + 32 = 473$ số từ tập hợp A luôn tồn tại hai số có tổng bằng 2288.

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

Trong giải bóng đá B-League có n đội tham gia, thi đấu vòng tròn một lượt (mỗi đội bất kỳ thi đấu với nhau đúng một lần). Ở mỗi trận thắng - thua, đội thắng được 3 điểm và đội thua không được điểm. Ở mỗi trận hòa, mỗi đội được 1 điểm. Kết thúc giải, người ta thống kê thấy rằng số trận thắng - thua gấp 3 lần số trận hòa và tổng số điểm của tất cả các đội là 330. Tìm số trận hòa và số đội tham gia giải bóng B-League.

Lời giải

Gọi x (trận, $x \in \mathbb{N}$) là số trận hòa, suy ra số trận thắng thua là $3x$ (trận).

Tổng số điểm của các đội là $2 \cdot x + 3 \cdot 3x = 11x \Rightarrow 11x = 330$ hay $x = 30$ (thỏa mãn)

Số trận đấu của giải là $x + 3x = 4x = 120$ trận.

Mặt khác, số trận đấu của n đội là $(n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$

$$\text{Do đó } \frac{n(n-1)}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n - 240 = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 16 \\ n = -15(l) \end{cases}$$

Vậy giải đấu có 30 trận hòa và 16 đội tham dự.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách lấy k số thuộc S luôn tồn tại hai số x, y với $x > y$ trong k số đã lấy sao cho $x + y$ chia hết cho $x - y$.

Lời giải

Xét các trường hợp:

$k = 1$: loại

$k = 2$: Lấy 5 và 2 có $5 + 2$ không chia hết cho $5 - 2$ nên loại trường hợp này

$k = 3$: Lấy bộ $(4; 7; 11)$ có $7 + 4$ không chia hết cho $7 - 4$, $11 + 4$ không chia hết cho $11 - 4$, $11 + 7$ không chia hết cho $11 - 7$ nên loại trường hợp này.

$k = 4$: Lấy bộ $(1; 4; 7; 10)$ ta thấy không thỏa mãn nên loại trường hợp này.

Với $k \geq 5$. Ta chứng minh $k = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán tức là luôn tồn tại hai số x, y mà $x > y$ trong 5 số đã lấy sao cho $x + y$ chia hết cho $x - y$.

Trước hết, ta có một nhận xét: Nếu tồn tại hai số a, b thuộc S thỏa mãn $a - b$ không là ước của $a + b$ với $a > b$ thì $a \geq b + 3$

Thật vậy, ta có:

Nếu $a - b = 1$ thì $a + b : 1 = a - b$ (vô lý)

Nếu $a - b = 2$ thì $a + b = a - b + 2b = 2 + 2b : 2 = a - b$ (vô lý)

Do đó $a - b \geq 3$ nên $a \geq b + 3$

Giả sử tồn tại tập $T = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ với $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ là tập con của S thỏa mãn với mọi $u, v \in T, u > v$ thì $u - v$ không là ước của $u + v$

Áp dụng nhận xét trên, ta thu được

$$x_5 \geq x_4 + 3 \geq x_3 + 6 \geq x_2 + 9 \geq x_1 + 12 \geq 13 \text{ (vô lý)}$$

Từ đó, giả sử sai vậy nên $k = 5$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Vậy $k_{\min} = 5$

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Hà Nội năm 2025 – 2026)

Hai trường trung học cơ sở A và B tổ chức chung một buổi liên hoan cho các học sinh tiêu biểu. Biết rằng trong buổi liên hoan này:

- Mỗi học sinh trường A quen với đúng 5 học sinh khác cũng của trường A ;
- Mỗi học sinh trường A quen với đúng 4 học sinh trường B ;

- c) Mỗi học sinh trường B quen với đúng 3 học sinh trường A ;
 d) Tổng số học sinh của hai trường tham dự không vượt quá 80.
 (1). Số học sinh trường A tham dự buổi liên hoan có thể là 25 học sinh được không? Vì sao?
 (2). Tổng số học sinh của hai trường tham dự buổi liên hoan có thể nhiều nhất là bao nhiêu? Vì sao?

Lời giải

Gọi số học sinh trường A tham dự buổi liên hoan là a (học sinh), số học sinh trường B tham dự buổi liên hoan là b (học sinh) ($a, b \in \mathbb{N}^*$)

Từ khẳng định (d), ta có $a + b \leq 80$.

Gọi S là số cặp hai bạn học sinh trong buổi liên hoan quen nhau, trong đó có một bạn đến từ trường A , một bạn đến từ trường B .

Từ khẳng định (b), do mỗi học sinh trường A quen đúng 4 bạn học sinh trường B nên $S = 4a$. Từ khẳng định (c), do mỗi học sinh trường B quen đúng 3 bạn học sinh trường A nên $S = 3b$. Ta suy ra $S = 4a = 3b$

Ta suy ra a chia hết cho 3.

Gọi T là số cặp hai bạn học sinh trong buổi liên hoan quen nhau, trong đó cả hai bạn đều đến từ trường A .

Từ điều kiện (a), ta có mỗi bạn học sinh trường A quen với đúng 5 bạn khác cũng của trường A . Mặt khác, để ý rằng mỗi cặp như vậy được đếm 2 lần (do nếu X quen Y thì Y cũng quen X), nên ta phải có $T = \frac{5a}{2}$. Mà T là số nguyên dương nên a chẵn. Như vậy, ta có a chia hết cho 6.

(1). Số học sinh trường A tham dự không thể là 25, do a là số chẵn.

(2). Ta có $4a = 3b, a + b \leq 80$ nên $80 \geq a + b = a + \frac{4a}{3} = \frac{7a}{3}$ suy ra $a \leq \frac{240}{7} < 35$.

Mà $a : 6$ theo chứng minh trên nên $a \leq 30$.

Vậy $a \leq 30, b = \frac{4a}{3} \leq 40$, suy ra số người ở buổi liên hoan là không quá 70.

Ta sẽ chỉ ra rằng có thể có 70 học sinh ở buổi liên hoan.

Thật vậy, đánh số 30 bạn học sinh trường A từ 1 đến 30, đánh số 40 bạn học sinh trường B từ 1 đến 40. Xét trường hợp ta có:

Hai bạn học sinh trường A có số thứ tự i, j quen nhau khi và chỉ khi $i \equiv j \pmod{6}$,

Với mỗi $1 \leq i \leq 10$, các bạn học sinh trường A có số thứ tự $i, i+10, i+20$ đều quen các bạn học sinh trường B có số thứ tự $4i-3, 4i-2, 4i-1, 4i$.

Khi đó các điều kiện đề bài đều được thỏa mãn.

Vậy có tối đa 70 học sinh hai trường tham dự buổi liên hoan.

Câu 11. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Một tập M các số thực phân biệt được gọi là tập đặc biệt nếu nó có những tính chất sau:

- a) Với mỗi $x, y \in M$, $x=y$ thì $xy \neq 0, x+y \neq 0$ và đúng một trong hai số $xy, x+y$ là số hữu tỷ;
 b) với mỗi $x \in M$ thì x^2 là số vô tỷ. Hãy tìm số phần tử lớn nhất có thể có của tập đặc biệt.

Lời giải

Rõ ràng tập đặc biệt có số phần tử lớn nhất là tập khác rỗng.

Để ý $x \in M$ là số vô tỉ.

Tô màu các phần tử trong M như sau: Với hai phần tử x và y , coi đây là các đỉnh của đa giác và tô màu đỏ cho đoạn thẳng này nếu $x+y$ là số hữu tỷ và tô màu xanh nếu xy là số hữu tỷ.

Để ý cứ với 3 số $x, y, z \in M$ thì các đoạn thẳng nối bởi 3 đỉnh này được tô bởi cả màu xanh lẫn đỏ.

Thật vậy nếu $x+y, y+z, z+x \in \mathbb{Q}$ thì $x = \frac{1}{2}[(x+y) + (z+x) - (y+z)] \in \mathbb{Q}$

Còn nếu $xy, yz, zx \in \mathbb{Q}$ thì $x^2 = \frac{(xy) \cdot (zx)}{yz} \in \mathbb{Q}$

Trong ba đỉnh $x, y, z \in M$ bất kì thì có đúng một đoạn thẳng được tô màu xanh

Thật vậy nếu $xy, xz \in \mathbb{Q}$ thì $\frac{y}{z} = r \in \mathbb{Q}$, khi đó $y+z = z(r+1) \in \mathbb{Q}$ nên $z \in \mathbb{Q}$

Giả sử $|M| \geq 5$, lấy $x, y, z, u, t \in M$.

Giả sử đoạn thẳng xy và đã được tô màu đỏ, khi đó đoạn thẳng đã được tô màu xanh.

Khi đó yu, yt được tô màu đỏ, và từ đó xu, xt được tô màu xanh, khi đó các cạnh nối bởi x, u, t tạo ra điều vô lý.

Vậy $|M| \leq 4$, và giá trị lớn nhất của tập đặc biệt bằng 4.

Tập hợp thỏa mãn chẳng hạn khi $M = \{1+\sqrt{2}; -1+\sqrt{2}; 2-\sqrt{2}; -2-\sqrt{2}\}$

Câu 12. (Trường chuyên Tin KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Xét bảng ô vuông kích thước $n \times n$, với n là số nguyên dương. Biết rằng bảng ô vuông đó có thể được phủ kín bởi hai loại mảnh ghép 1×1 và 8×8 sao cho không có hai mảnh ghép nào chồng lên

nhau, số lượng hai loại mảnh ghép được dùng là bằng nhau và mỗi ô vuông nhỏ của các mảnh ghép chồng khít với một ô vuông của bàn cờ.

a) Chứng minh n chia hết cho 5.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của n .

Lời giải

a) Gọi k là số mảnh ghép mỗi loại được dùng để phủ bảng $n \times n$. Khi đó số ô vuông được phủ là $64k + k = 65k$. Mà các miếng ghép phải phủ kín bảng ô vuông, nên suy ra $n^2 = 65k$, suy ra n^2 chia hết cho $65 = 5 \cdot 13$, dẫn đến n phải chia hết cho 5 và 13.

b) Ta có nhận xét sau: Nếu như $n = 8l + r$ (với $0 \leq r < 8$) thì bảng $n \times n$ có thể chứa tối đa l^2 mảnh ghép 8×8 .

Thật vậy, đánh số các hàng từ trên xuống dưới, các cột từ trái sang phải lần lượt các số $1; 2; \dots; n$. Gọi ô $(x; y)$ là ô nằm trên hàng x , cột y . Ta sẽ tô đen các ô có dạng $(r+1+8a; r+1+8b)$ với $0 \leq a, b \leq l-1$, có tổng cộng l^2 ô đen tất cả. Không khó để thấy mỗi miếng ghép 8×8 dù đặt ở đâu trên bảng thì phải phủ chính xác 1 ô đen, cho nên số miếng ghép tối đa có thể có trong bảng là l^2 . Quay lại bài toán, ta đặt $n = 65t$ (theo câu a thì n phải chia hết cho 65). Khi đó số mảnh ghép phải dùng mỗi loại là $\frac{n^2}{65} = 65t^2$.

Đặt $t = 8u + v$ (với $0 \leq v < 8$). Khi đó $n = 65t = 65(8u + v) = 8(65u + 8v) + v$. Khi đó, theo nhận xét trên, số mảnh ghép 8×8 tối đa có thể dùng là $(64u + 8v)^2$.

Từ đó, ta suy ra $(65u + 8v)^2 \geq 65t^2 = 65(8u + v)^2$, tương đương với $64u^2 \geq v^2$. Khi đó $u \geq 1$ (nếu $u = 0$ thì $v = 0$, suy ra $n = 0$, vô lý). Vậy $n = 65(8u + v) \geq 65(8 \cdot 1 + 0) = 520$.

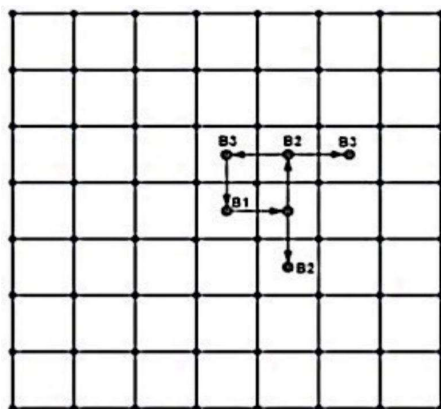
Với bảng 520×520 , ta cần phủ bảng bởi $\frac{520^2}{65} = 4160$ miếng ghép mỗi loại 1×1 và 8×8 . Ta sẽ làm như sau: Do $520 = 65 \cdot 8$ nên ta có thể coi nó như bảng 65×65 , mỗi ô của bảng này tương ứng với một miếng ghép 8×8 . Dùng 4160 miếng ghép 8×8 để phủ 4160 ô vuông con của bảng này (lưu ý $65^2 > 4160$ nên có thể làm vậy). Phần còn lại sẽ được phủ bởi 1×1 .

Như vậy, min $n = 520$.

Câu 13. (Trường chuyên Hải Dương năm 2025 – 2026)

Cho bảng ô vuông 7×7 gồm 9 ô vuông đơn vị như hình vẽ. Có 37 con robot được đặt vào tâm của các ô vuông đơn vị sao cho không có 2 con robot cùng nằm trong một ô. Các con robot được lập trình để di chuyển đồng loạt, với cùng tốc độ theo nguyên tắc như sau: Ban đầu, mỗi con đều di chuyển sang tâm của một ô vuông đơn vị bất kỳ chung cạnh với ô vuông nó đang đứng. Sau đó, mỗi khi chạm vào tâm của ô vuông đến, nó sẽ quay một góc 90° và di chuyển tiếp theo hướng đó sang

tâm của ô tiếp theo và cứ tiếp tục di chuyển như thế (một ví dụ về cách di chuyển của một con robot như hình vẽ). Chứng minh rằng dù ban đầu có đặt các con robot như thế nào thì vẫn luôn có một thời điểm mà có hai con robot ở cùng một ô vuông không.



Lời giải

Giả sử tồn tại một cách xếp mà với mọi thời điểm thì không tồn tại 2 con robot đứng cùng 1 ô.

Ta điền cách số 1,2,3,4 cho bảng 7×7 như sau:

1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1
4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1

Nhận xét 1. Sau mỗi bước di chuyển thì đó là ô con robot đứng lúc sau khác tính chẵn lẻ với số ở ô con robot đứng lúc trước.

Chứng minh. Do các ô chung cạnh với các ô số lẻ (1,3) đều là các ô số chẵn (2,4) và ngược lại, nếu sau mỗi bước số ở ô con robot đứng sau thay đổi tính chẵn lẻ.

Nhận xét 2. Sau 2 bước di chuyển thì số ở ô con robot đứng lúc sau sẽ bằng 2 cộng với số ở con robot đứng lúc trước theo mod 4.

Chứng minh. Xét hình vuông 3×3 mà có 1 con robot làm tâm, sau 2 bước di chuyển thì con robot đó chỉ có thể di chuyển đến các ô ở góc của hình vuông 3×3 . Ta thấy các số ở các ô góc đó không

bằng với số ở tâm. Theo Nhận xét 1 thì sau 2 bước số ở ô sau và trước cùng tính chẵn lẻ, từ đó ta có Nhận xét 2.

Nhận xét 3. Sau lượt đầu tiên (lượt đầu tiên này các con robot đi không có quy luật) có không quá 9 con robot cùng đứng ở các ô số 1.

Chứng minh. Giả sử sau lượt đầu có lớn hơn hoặc bằng 10 con robot cùng đứng ở các ô có được điền số 1. Xét 2 lượt tiếp theo và sử dụng Nhận xét 2 thì lớn hơn bằng 10 con robot đó sẽ cùng đi vào các ô số 3. Để ý rằng trên bảng 7×7 ta chỉ có đúng 9 ô được điền số 3 nên theo nguyên lý Dirichlet thì tồn tại một ô số 3 mà có 2 con robot, mâu thuẫn với giả sử ban đầu. Nên giả sử ở trên là sai, suy ra Nhận xét 3

Nhận xét 4. Sau lượt đầu tiên có không quá 18 con robot đứng ở vị trí các ô số lẻ.

Chứng minh. Áp dụng Nhận xét 3 thì chỉ có nhỏ hơn hoặc bằng 9 robot đứng ở vị trí được điền số 1, để ý thêm rằng chỉ có tất cả 9 ô được điền số 2 nên khi kết hợp lại ta thấy có không quá 18 con robot đứng ở vị trí các ô số lẻ.

Nhận xét 5. Sau lượt đầu tiên có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot đứng ở vị trí các ô số chẵn.

Chứng minh. Áp dụng Nhận xét 4 và chỉ có 37 con robot nên có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot đứng ở vị trí các ô số chẵn.

Quay trở lại bài toán

Sau lượt đầu tiên, kết hợp Nhận xét 5 và Nhận xét 1 thì ngay ở lượt thứ 2, có lớn hơn hoặc bằng 19 con robot ở vị trí các ô số lẻ. Tuy nhiên điều này lại mâu thuẫn với Nhận xét 4 nên suy ra giả sử ở đầu lời giải là sai. Từ đó rút ra kết luận rằng với mọi cách xếp thì tồn tại một thời điểm.

Câu 14. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Cho tập hợp $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq x \leq 15\}$. Xét T là một tập con của S và có tính chất: với a, b, c bất kì thuộc T (a, b, c đôi một khác nhau) thì tích abc không là số chính phương. Hỏi T có nhiều nhất bao nhiêu phần tử? (Tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B nếu mọi phần tử của A đều là phần tử của B).

Lời giải

Ta chứng minh T có nhiều nhất 10 phần tử

Để thấy tập $T = \{1; 4; 5; 6; 7; 10; 11; 12; 13; 14\}$ thỏa mãn đề bài

Ta chứng minh tập có 11 phần tử không thỏa mãn đề bài.

Xét các nhóm ba số sau có tích là số chính phương $(1; 4; 9), (2; 7; 14), (3; 6; 8), (5; 12; 15)$. Vì vậy tập T thỏa mãn đề bài chỉ được chứa tối đa 2 số mỗi nhóm, kết hợp với các số 10; 11; 13 là 11 phần tử. Ta chứng minh 11 số này không thỏa mãn đề bài.

Nếu $5 \notin T$ thì $12; 15 \in T \Rightarrow 6 \notin T$ (vì $6 \cdot 10 \cdot 15 = 30^2$) $\Rightarrow 3; 8 \in T$.

Mà $3 \cdot 12 = 6^2$ là số chính phương nên T không thể chứa số nào trong các số 1; 4; 9. (loại)

Nếu $12 \notin T$ thì $5; 15 \in T \Rightarrow 3 \notin T$ (vì $3 \cdot 5 \cdot 15 = 15^2$) $\Rightarrow 6; 8 \in T$. Suy ra $2 \notin T$ ($2 \cdot 5 \cdot 10 = 10^2$) $\Rightarrow 7; 14 \in T$.

Mà $7 \cdot 8 \cdot 14 = 28^2$ (loại)

Nếu $15 \notin T$ thì $5; 12 \in T \Rightarrow 2 \notin T$ (vì $2 \cdot 5 \cdot 10 = 10^2$) $\Rightarrow 7; 14 \in T$. Suy ra $8 \notin T$ (vì $8 \cdot 7 \cdot 14 = 28^2$) $\Rightarrow 3; 6 \in T$.

Mà $3 \cdot 12 = 6^2$ là số chính phương nên T không thể chứa số nào trong các số 1; 4; 9 (loại)

Vậy T có nhiều nhất 10 phần tử

Hoàn tất bài toán.

Câu 15. (Trường chuyên Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

a) Cho S là tập hợp các số nguyên $|a| \leq 100$. Lấy a ngẫu nhiên thuộc S , tính xác suất để a thỏa mãn phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ có các nghiệm nguyên.

b) Cho $A = \{1; 2; 3; \dots; 100\}$ và B là các tập hợp con chứa 11 phần tử thuộc A . Chứng minh rằng B luôn chứa a, b, c đôi một phân biệt sao cho a, b, c là độ dài ba cạnh tam giác.

Lời giải

a) Phương trình $x^2 - ax + 2a + 10 = 0$ có nghiệm nguyên thì $\Delta = a^2 - 4(2a + 10) = a^2 - 8a - 40$ là một số chính phương.

Đặt $\Delta = k^2$ ($k \in \mathbb{N}$). Biến đổi ta được $(a - 4 - k)(a - 4 + k) = 56$

Chú ý $(a - 4 - k) + (a - 4 + k) = 2(a - 4)$ nên $a - 4 - k$ và $a - 4 + k$ cùng tính chẵn lẻ. Hơn nữa $k \geq 0$ nên $a - 4 + k \geq a - 4 - k$. Từ các nhận xét này ta có các trường hợp sau

$a - 4 - k$	$a - 4 + k$	a	k
2	28	19	13
4	14	13	5
-28	-2	-11	13
-14	-4	-5	5

Thử lại, cả 4 giá trị a này thỏa mãn đề bài. Hơn nữa $n(S) = 201$ nên xác suất cần tìm là $\frac{4}{201}$.

b) Gọi 11 phần tử của tập B đã cho lần lượt là

$$1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_{11} \leq 100$$

Giả sử trong 11 số này không có ba số nào lập thành ba cạnh của một tam giác. Ta có nhận xét sau: $a_i \leq a_j \leq a_k$ không lập thành ba cạnh của một tam giác khi và chỉ khi $a_k \geq a_i + a_j$. Vì vậy ta thu được:

$$a_3 \geq a_2 + a_1 \geq 3,$$

$$a_4 \geq a_3 + a_2 \geq 5,$$

$$a_5 \geq a_4 + a_3 \geq 8,$$

$$a_6 \geq a_5 + a_4 \geq 13,$$

$$a_7 \geq a_6 + a_5 \geq 21,$$

$$a_8 \geq a_7 + a_6 \geq 34,$$

$$a_9 \geq a_8 + a_7 \geq 55,$$

$$a_{10} \geq a_9 + a_8 \geq 89,$$

$$a_{11} \geq a_{10} + a_9 \geq 144.$$

Điều trên mâu thuẫn vì $a_{11} \leq 100$. Vậy điều giả sử là sai, ta có điều phải chứng minh

Câu 16. (Trường chuyên PTNK Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Cho bảng ô vuông kích thước 2×9 và số nguyên dương $k \leq 18$. Hai ô của bảng được gọi là kề nhau nếu chúng có một cạnh chung. Hai bạn An và Bình chơi trò “Truy Tìm Tàu Ngầm” như sau: Trước khi trò chơi bắt đầu, An chọn một ô trên bảng và không cho Bình biết. Ở mỗi lượt chơi:

An phải chọn một ô mới, kề bên với ô đã chọn trước đó, và không cho Bình biết;

Sau khi An chọn xong, Bình chọn k ô của bảng và hỏi An: trong k ô này có ô An vừa chọn hay không? Nếu có thì Bình thắng, nếu không thì hai bạn lại chơi lượt tiếp theo.

a) Chứng minh rằng với $k=4$. Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt.

b) Chứng minh rằng với $k=2$. Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt.

Lời giải

Trước hết ta đánh tọa độ các ô như hình vẽ sau:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1									
2									

Ta kí hiệu $(i; j)$ là ô tại vị trí hàng i cột j .

a) Ở các lượt chơi, bạn Bình sẽ chọn các ô như sau

Lượt 1. Chọn $(1;1), (1;2), (2;1), (2;2);$

Lượt 2. Chọn $(1;2), (1;3), (2;2), (2;3);$

Lượt 3. Chọn $(1;3), (1;4), (2;3), (2;4);$

Lượt 4. Chọn $(1;4), (1;5), (2;4), (2;5);$

Lượt 5. Chọn $(1;5), (1;6), (2;5), (2;6);$

Lượt 6. Chọn $(1;6), (1;7), (2;6), (2;7);$

Lượt 7. Chọn $(1;7), (1;8), (2;7), (2;8);$

Lượt 8. Chọn $(1;8), (1;9), (2;8), (2;9)$.

Với mỗi $1 < i \leq 8$, gọi $(a_i; b_i)$ là ô An chọn ở lượt thứ i . Do hai ô được chọn ở hai lượt liên tiếp có chung cạnh nên ta có $|b_i - b_{i+1}| \leq 1$ với mọi $1 \leq i \leq 7$.

Nếu $b_1 = 1$ hoặc $b_1 = 2$ thì Bình thắng ở ngay lượt đầu tiên.

Ngược lại, ta có $b_1 > 2$ và $b_8 \leq 9$.

Gọi i là số nguyên dương lớn nhất sao cho $b_i > i+1$,

Ta có $b_{i+1} \geq b_i - 1 \geq i + 2 - 1 = i + 1$ và $b_{i+1} \leq (i+1) + 1 = i + 2$, do đó $b_{i+1} \in \{i+1; i+2\}$ và ở lượt thứ $i+1$, trong các ô Bình chọn có ô An vừa chọn ở lượt trước đó. Vậy với cách chơi như trên thì Bình có thể chiến thắng sau không quá 8 lượt.

b) Tương tự như câu a), ta sẽ chỉ ra sau không quá 16 lượt là Bình có thể dành được chiến thắng.

Ở các lượt chọn, bạn Bình sẽ đánh dấu các ô như sau

Lượt 1. Chọn $(1;1), (2;2)$;

Lượt 2. Chọn $(1;2), (2;3)$;

Lượt 3. Chọn $(1;3), (2;4)$;

Lượt 4. Chọn $(1;4), (2;5)$;

Lượt 5. Chọn $(1;5), (2;6)$;

Lượt 6. Chọn $(1;6), (2;7)$;

Lượt 7. Chọn $(1;7), (2;8)$;

Lượt 8. Chọn $(1;8), (2;9)$;

Lượt 9. Chọn $(1;2), (2;1)$;

Lượt 10. Chọn $(1;3), (2;2)$;

Lượt 11. Chọn $(1;4), (2;3)$;

Lượt 12. Chọn $(1;5), (2;4)$;

Lượt 13. Chọn $(1;6), (2;5)$;

Lượt 14. Chọn $(1;7), (2;6)$;

Lượt 15. Chọn $(1;8), (2;7)$;

Lượt 16. Chọn $(1;9), (2;8)$.

Tương tự như trên, với mỗi $1 \leq i \leq 16$, gọi $(a_i; b_i)$ là ô An chọn ở lượt thứ i . Ta xét 2 trường hợp sau.

Trường hợp 1. $a_i + b_i$ chẵn. Do ở mỗi lượt, An chọn một ô chung cạnh với ô An chọn ở lượt ngay trước đó nên trong trường hợp này, ta có $a_i + b_i \equiv i \pmod{2}$ với mọi $1 \leq i \leq 16$. Nếu $b_1 = 1$, ta có $a_1 = 1$ và Bình thắng ở ngay lượt đầu tiên.

Nếu $b_1 = 2$, ta có $a_1 = 2$ và Bình thắng ở ngay lượt đầu tiên. Còn nếu $b_1 \geq 3$ thì tương tự như trên, gọi $i \leq 7$ là số nguyên dương lớn nhất sao cho $b_i > i+1$, ta có $b_{i+1} \in \{i+1; i+2\}$. Nếu $b_{i+1} = i+1$ thì $a_{i+1} = 2$, còn nếu $b_{i+1} = i+2$ thì $a_{i+1} = 1$. Do Bình chọn hai ô $(2; i+1)$ và $(1; i+2)$ ở lượt thứ $i+1$ nên trong cả hai trường hợp, ta đều suy ra Bình thắng sau lượt thứ $i+1$.

Trường hợp 2. $a_i + b_i$ lẻ. Trong trường hợp này, ta có $a_i + b_i \equiv i+1 \pmod{2}$ với mọi $1 \leq i \leq 16$. Tương tự như trên, nếu $b_1 = 1$ hoặc $b_1 = 2$ thì Bình thắng ngay sau Lượt 9. Ngược lại, gọi i là số nguyên dương lớn nhất sao cho $b_i > i-6$, ta suy ra Bình thắng sau lượt thứ $i+1$.

Hoàn tất bài toán.

Câu 17. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

Cho bảng vuông kích thước 8×8 gồm 64 ô vuông, có 8 hàng và 8 cột. Ta điền vào tất cả các ô vuông của bảng, mỗi ô vuông điền đúng một số nguyên dương thuộc tập $S = \{1; 2; 3; \dots; 64\}$ (hai ô vuông khác nhau điền hai số khác nhau).

- Ta gọi một thanh dọc là hình gồm 7 ô vuông liên tiếp thuộc cùng một cột. Xét một cách điền sao cho mọi thanh dọc đều chứa tối đa 3 số chẵn. Chứng minh mỗi cột chứa ít nhất 4 số lẻ.
- Với cách điền như câu a), chứng minh tồn tại ít nhất hai hàng chứa toàn số chẵn.
- Một cặp số gọi là “không thân thiện nhau” nếu chúng nằm ở hai ô vuông kề nhau (là hai ô vuông có chung cạnh) và hiệu của chúng (số lớn trừ số bé) lớn hơn 4. Chứng minh với mọi cách điền số, có thể tìm được một cặp số “không thân thiện nhau”.

Lời giải

- Lấy một cột bất kì, xét thanh dọc từ ô thứ nhất đến thứ 7, chứa tối đa 3 số chẵn, nếu ta xét thêm ô thứ 8, cột đó chứa tối đa 4 số chẵn.

Vậy mỗi cột chứa ít nhất 4 số lẻ.

- Mỗi ô trên bảng ô vuông đều chứa một số phân biệt nên có 32 ô chứa số chẵn và 32 ô chứa số lẻ. Theo cách điền như vậy và kết quả câu a thì mỗi cột có 4 số chẵn và 4 số lẻ. Mặt khác do mỗi cột có hai thanh dọc nên để điền sao cho thoả mãn bài toán thì, ta điền hai số chẵn ở ô số 1 và 8, và hai số lẻ ở các vị trí bất kì từ 2 đến 6 của cột. Như vậy mỗi cột đều được tiến hành như thế thì ta thấy hàng 1 và hàng 8 của bảng đều chứa toàn số chẵn. Vậy ta có ít nhất hai hàng chứa toàn số chẵn.

- Ta gọi chứa số 1 là A. ô chứa số 64 là B. Xét hàng chứa A và cột chứa ô B. Không mất tính tổng quát, ta quy ước ô A ở trên B (xét theo vị trí các hàng).

Giả sử có một con kiến đi từ A đến B và đường đi của nó là L, mỗi bước chỉ tính sang ngang hoặc đi xuống. Xuất phát từ A đến B, với cách đi trên thì số lần kiến đi từ ô này sang ô kề nó tối đa là 14.

Giả sử không tồn tại một cặp số “không thân thiện nhau” trên bảng. Khi đó hiệu của hai số x, y kề nhau không vượt quá 4, hay $|x - y| \leq 4$.

Ta kí hiệu các số được ghi trên đường đi L mà con kiến đi qua là $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k$

và $k < 15$. Như vậy $x_k - x_1 \leq |x_k - x_{k-1}| + \dots + |x_3 - x_2| + |x_2 - x_1| \leq 14 \cdot 4 = 56$

Từ đây ta có điều vô lý.

Vậy với mọi các điền số, có thể tìm được một cặp số “không thân thiện nhau”.

Câu 18. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

Cho đa giác $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ là đa giác đều 2024 đỉnh, trong đó đỉnh A_{2009} được tô đỏ, các đỉnh còn lại được tô xanh. Đổi màu các đỉnh của đa giác theo quy tắc:

Mỗi lần chọn 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật rồi đổi màu đồng thời 4 đỉnh ấy (đỏ thành xanh và xanh thành đỏ).

Hỏi sau một số hữu hạn lần đổi màu như vậy, có thể thu được kết quả đỉnh A_{2009} và A_{997} cùng màu hay không? Vì sao?

Lời giải

Vì $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ là đa giác đều nên đa giác này nội tiếp đường tròn đường kính tâm O . Gọi A_k là điểm đối xứng với A_1 qua tâm O .

Đường kính $A_1 A_k$ chia đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2024}$ thành 2 phần bằng nhau, số lượng các đỉnh 2 bên là 1011 đỉnh. Suy ra $A_k \equiv A_{1013}$

Từ đó, ta có quy luật về đường kính của đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1 A_2 \dots A_{2024}$:

A_1 đối xứng với A_{1013} qua O : đường kính $A_1 A_{1013}$

Đường kính $A_2 A_{1014}$

...

Đường kính $A_k A_{k+1012}$

Suy ra: A_m đối xứng với A_{2009} qua tâm O ,

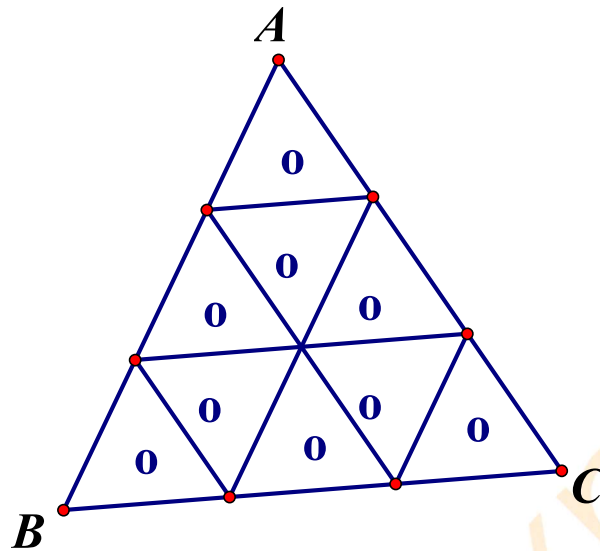
Nghĩa là, một hình chữ nhật có đỉnh A_{997} thì A_{2009} cũng là đỉnh của hình chữ nhật đó,

Mà ban đầu, A_{997} được tô màu xanh, A_{2009} được tô màu đỏ

Vậy theo quy tắc đổi màu như trên thì A_{2009} và A_{997} không thể cùng màu sau một số hữu hạn lần đổi màu.

Câu 19. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Chia tam giác đều ABC thành 9 tam giác con, rồi điền vào mỗi tam giác con một số 0, như ở hình dưới đây.

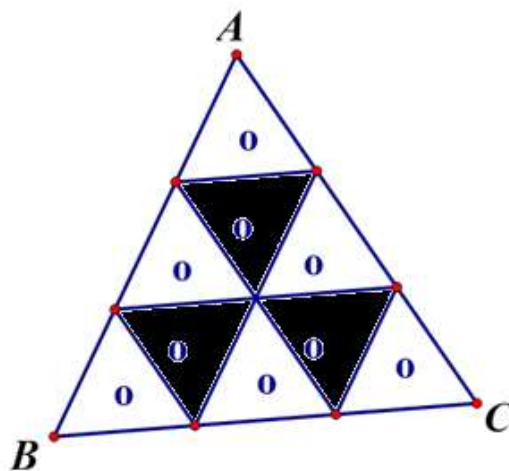


Cho phép thay đổi các số trong tam giác ABC , theo qui ước: Mỗi lần, lấy hai số nằm ở hai tam giác con có chung cạnh, rồi tăng mỗi số lên 1 đơn vị, hoặc giảm mỗi số đi 1 đơn vị.

Nằm trong tam giác ABC là 9 số tự nhiên liên tiếp từ 4 đến 12 được hay không? Vì sao?

Lời giải

Tô ba tam giác con bởi màu đen, như ở hình dưới đây; các tam giác con còn lại được coi là có màu trắng.



Khi đó, do hai tam giác con bất kì có cạnh chung là hai tam giác khác màu, nên từ nội dung của phép thay đổi số suy ra, hiệu giữa tổng các số nằm ở các tam giác đen và tổng các số nằm ở các tam giác trắng không thay đổi, sau mỗi lần thực hiện phép thay đổi số. Mà ở thời điểm ban đầu, trong các số

nằm ở các tam giác đen bằng tổng các số nằm ở các tam giác trắng (vì cùng bằng 0), nên ở mọi thời điểm, tổng các số nằm ở các tam giác đen bằng tổng các số nằm ở các tam giác trắng (*)

Giả sử, sau khi thực hiện liên tiếp một số hữu hạn lần phép thay đổi đã cho, 9 số nằm trong tam giác ABC là 9 số tự nhiên liên tiếp, từ 4 đến 12. Khi đó, kí hiệu S là tổng các số nằm ở các tam giác đen, và I là tổng các số nằm ở tam giác trắng, theo (*), ta có: $10 + 11 + 12 \geq S = I \geq 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

Là điều vô lí (vì $10 + 11 + 12 = 33$ và $4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 39$).

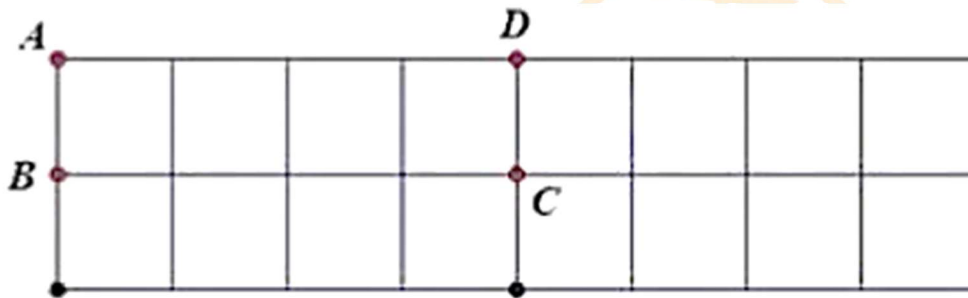
Vì vậy, câu trả lời cho câu hỏi của bài ra là "không".

Câu 20. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Tô màu mỗi điểm trong mặt phẳng bởi một trong hai màu xanh hoặc đỏ, mỗi điểm được tô bởi đúng một màu. Chứng minh rằng tồn tại một đoạn thẳng mà hai đầu mút và trung điểm của nó được tô cùng màu.

Lời giải

Xét bảng lưới ô vuông 2×8 (gồm 3 đường ngang và 9 đường dọc) giao điểm của các đường ngang và đường dọc gọi là nút lưới.

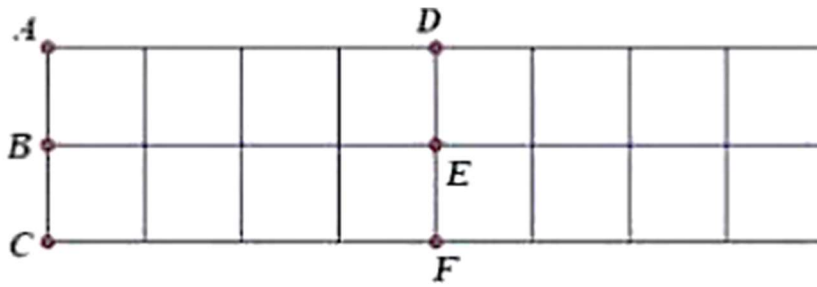


Xét một cột (mỗi cột có 3 nút lưới) mỗi nút lưới có hai cách tô, do đó một cột (gồm 3 nút lưới đó sẽ có 8 cách tô màu một cột)



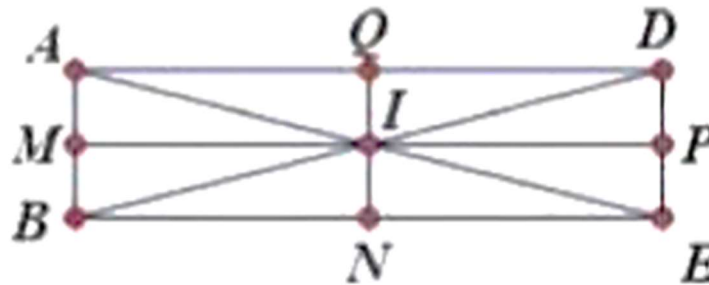
Vì có 9 đường lưới dọc, mỗi đường lưới dọc có 8 cách tô màu nên theo Dirichlet phải có ít nhất hai đường lưới dọc có cách tô giống nhau, mỗi đường lưới này có cách tô nút lưới cùng nhau.

Giả sử hai đường lưới đó là $(A; B; C)$ và $(D; E; F)$. Trong đó ba điểm A, B, C có hai điểm được tô cùng màu, giả sử A, B được tô bởi màu đỏ khi đó D, E cũng được tô bởi màu đỏ.



Như vậy, $ABED$ là hình chữ nhật có 4 đỉnh cùng màu đỏ. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BE, ED, DA và I là giao của hai đường chéo AE và BD thì I cũng là giao điểm của MP và NQ .

Nếu một M, N, P, Q, I có cùng màu đỏ thì ta có ngay điều phải chứng minh.



Câu 21. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Cho X là tập hợp gồm 700 số nguyên dương đôi một khác nhau, mỗi số không lớn hơn 2025. Chứng minh rằng trong tập hợp X luôn tồn tại hai phần tử x, y sao cho $x - y$ thuộc tập hợp $E = \{3; 6; 9\}$.

Lời giải

Ta chia 2025 số nguyên dương đầu tiên thành các tập như sau:

$$\{9k + 1; 9k + 4; 9k + 7\}$$

$$\{9k + 2; 9k + 5; 9k + 8\}$$

$$\{9k + 3; 9k + 6; 9k + 9\}$$

Với $k = 1; 2; \dots; 225$. Khi đó ta có $225 \cdot 3 = 675$ tập như vậy. Mặt khác, từ định nghĩa tập X , ta nhận thấy phần tử tập X thuộc một trong các tập trên, nên theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại ít nhất 1 tập

có ít nhất: $\frac{700}{625} + 1 = 2$ phần tử của X

Như vậy, không mất tính tổng quát, giả sử 2 phần tử đó thuộc tập $\{9k + 1; 9k + 4; 9k + 7\}$. Dễ thấy với mọi cách chọn 2 số trong tập này thì hiệu của chúng luôn thuộc tập E . Vậy bài toán được chứng minh.

Câu 22. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

Cho bảng hình chữ nhật gồm 2 dòng và n cột, được chia đều thành $2n$ ô vuông đơn vị. Ban đầu, trong mỗi ô vuông đơn vị người ta đặt đúng một viên bi có kích thước rất nhỏ. Ta gọi mỗi biến đổi (T) là việc thực hiện các thao tác sau: Chọn ra hai ô vuông đơn vị tùy ý có chứa bi, chuyển từ mỗi ô vuông đó đi một viên bi sang ô vuông đơn vị liền kề (hai ô vuông đơn vị gọi là liền kề nếu chúng có chung cạnh). Tìm tất cả các số nguyên dương n để sau hữu hạn lần chỉ thực hiện biến đổi (T), ta có thể đưa hết tất cả các viên bi có trên bảng lúc đầu về nằm trong cùng một ô vuông đơn vị của bảng.

Lời giải

Xét n là số lẻ:

Ta tô màu các ô vuông đơn vị theo kiểu xen kẽ như bàn cờ vua bởi hai màu đen, trắng. Gọi B, W lần lượt là số bi nằm ở ô đơn vị màu đen, số bi mà ô đơn vị màu trắng.

Lúc đầu: $B = n$ và $W = n$. Như vậy B, W là các số lẻ.

Chỉ ra được bất biến: Sau mỗi lần thực biến đổi (T) thì tính chẵn lẻ của B, W là không thay đổi.

Suy ra lúc nào cũng có bi nằm ở ô đen và lúc nào cũng có bi nằm ở ô trắng (vì B, W luôn là số lẻ), vậy không thể dồn hết tất cả các viên bi về một ô vuông đơn vị.

Xét n là số chẵn: Ta chỉ ra cách dồn được bi theo yêu cầu.

Đầu tiên ta chọn hai ô vuông phân biệt mà mỗi ô vuông tương ứng đều nằm ở cuối cùng của mỗi dòng và phải có bi, thực hiện biến đổi (T) để dồn hết bi từ hai ô này về hai ô đứng liền trước chúng.

Lại thực hiện tiếp biến đổi (T) với hai ô đơn vị có bi mà mỗi ô nằm ở đầu ngoài cùng của mỗi dòng để dồn hết bi của hai ô này về hai ô đứng liền sau chúng. Tiếp tục với hai cách chọn ô như vậy (chọn cặp ô có bi ở cuối dòng rồi lại chọn cặp ô có bi ở đầu dòng) ta đi đến trạng thái bi chỉ còn nằm ở bảng con 2×2 ở chính giữa của bảng ban đầu như hình 1 (các chữ cái ghi trong ngoặc là để chỉ tên của ô, các số chỉ số lượng bi đang có ở ô tương ứng đó).

$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$
(A)	(B)
$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}$
(C)	(D)

Hình 1

Tiếp theo chọn cặp ô B,C và thực hiện $\frac{n}{2}$ lần biến đổi (T) (bi từ ô B đưa sang ô A, bi từ ô C đưa sang ô D) thì thu được trạng thái như hình 2.

n	0
(A)	(B)
0	n
(C)	(D)

Hình 2

Tiếp tục, ta liên tục chọn cặp ô A,D cho đến khi hết bi và chuyển bi ở hai ô này sang ô C thì sau cùng đưa được $2n$ viên bi về hết ô C.

Vậy tập hợp tất cả các số n cần tìm là tập các số nguyên dương chẵn.

Câu 23. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Trên bảng có dãy số $1; 2; 3; \dots; 2025$ ta thực hiện như sau: Nếu trên bảng có 4 số $a; b; c; d$ sao cho $d = a + b + c$ thì ta xóa 4 số đó và viết 3 số $a + b; b + c; c + a$ lên bảng. Giả sử tại một thời điểm trên bảng còn n số: $a_1; a_2; \dots; a_n$. Chứng minh rằng $a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \dots + a_n^4 - 9$ chia hết cho 12 và $n \geq 1520$.

Lời giải

Ta có nhận xét về bất biến như sau:

Tổng của ba số mới là $(a + b) + (b + c) + (c + a) = 2(a + b + c) = a + b + c + d$.

Tổng bình phương của ba số mới là:

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

Như vậy ta có:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + 2 + \dots + 2025 = \frac{2025 \cdot 2026}{2}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + 2025^2 = \frac{2025 \cdot 2026 \cdot (2 \cdot 2025 + 1)}{6} = 675 \cdot 1013 \cdot 5051.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức Cauchy - Schwars thì

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

$$\Rightarrow n \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \geq 1520$$

Ta thấy $a_1^4 - a_1^2 = a_1^2(a_1 - 1)(a_1 + 1) : 3$. Như vậy a_1^4, a_1^2 cùng số dư khi chia cho 3.

Như vậy $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4$ cùng số dư khi chia cho 3.

Mà $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 : 3$.

Do đó $a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 - 9 : 3$ (1).

Ta thấy $a_1^4 - a_1^2 = a_1^2(a_1 - 1)(a_1 + 1) : 4$.

Như vậy a_1^4, a_1^2 cùng số dư khi chia cho 4.

Như vậy $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2, a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4$ cùng số dư khi chia cho 4.

Mà $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$ chia 4 dư 1. Suy ra $a_1^4 + a_2^4 + \dots + a_n^4 - 9 : 4$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

Câu 24. (Trường chuyên Phú Thọ năm 2025 – 2026)

An có 10 hộp đựng bi, mỗi hộp có 3 viên bi. Các viên bi được tô bởi một trong 5 màu: xanh, đỏ, tím, vàng, nâu; sao cho các viên bi trong cùng hộp có màu khác nhau và không có 2 hộp nào có 3 màu bi tương ứng giống nhau.

An nói rằng mình muốn lấy ra từ mỗi hộp 1 viên bi. Bình nghe thấy thế khẳng định: "Sau khi An lấy bi, chắc chắn sẽ có 2 hộp bi mà 2 viên bi còn lại trong mỗi hộp có màu tương ứng giống nhau."

Theo em, Bình nói đúng hay sai? Em hãy giải thích khẳng định của mình.

Lời giải

Đánh số các màu xanh, đỏ, tím, vàng, nâu lần lượt là 1; 2; 3; 4; 5 và S_i là tập màu của các viên bi hộp i .

Ta sẽ khẳng định Bình nói sai.

Cụ thể, do có đúng 10 hộp đựng bi nên không mất tính tổng quát, giả sử trạng thái ban đầu của 10 hộp lần lượt như sau

$$S_1 = \{1; 2; 3\}, S_2 = \{1; 2; 4\}, S_3 = \{1; 2; 5\}, S_4 = \{1; 3; 4\}, S_5 = \{1; 3; 5\}, \\ S_6 = \{1; 4; 5\}, S_7 = \{2; 3; 4\}, S_8 = \{2; 3; 5\}, S_9 = \{2; 4; 5\}, S_{10} = \{3; 4; 5\}.$$

Khi này, An bốc hộp 5, 6 bốc bi màu 1; hộp 2, 3 bốc bi màu 2; hộp 1, 8 bốc bi màu 3; hộp 4, 7 bốc bi màu 4; hộp 9, 10 bốc bi màu 5.

Khi này, màu bi mà mỗi hộp còn lại lần lượt là 12; 14; 15; 13; 35; 45; 23; 25; 24; 34 nên không có 2 hộp nào có 2 màu bi tương ứng giống nhau. Từ những lí lẽ trên ta có thể khẳng định rằng Bình nói sai.

Câu 25. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

Bạn Bình có 18 thẻ gỗ, mỗi thẻ được đánh một số bất kì từ 1 đến 2526 (mỗi số trên mỗi thẻ là một số tự nhiên). Chứng minh rằng bạn Bình có thể chọn ra 3 thẻ sao cho ba số trên 3 thẻ đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Lời giải

Giả sử các số được ghi trên thẻ gỗ là $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{18}$, đồng thời ta coi $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{18} \leq 2526$

Ta thấy $a_i \leq a_j \leq a_k$ không lập thành độ dài ba cạnh của tam giác khi và chỉ khi $a_i + a_j \leq a_k$

Từ đây suy ra $a_2 \geq 2, a_3 \geq a_2 + a_1 \geq 3, a_4 \geq a_3 + a_2 \geq 5, \dots$

Lập lại dãy bất đẳng thức trên ta thấy là các phần tử của dãy Fibonacci nên với $a_{18} \geq a_{17} \geq 2584$

Dẫn đến điều vô lý. Như vậy bạn Bình có thể chọn ra 3 thẻ sao cho ba số trên 3 thẻ đó là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Câu 26. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Một cây khế có 20 quả khế màu xanh và 25 quả khế màu vàng. Một con quạ đến ăn mỗi ngày đúng 3 quả khế. Tuy nhiên cây khế sẽ ra quả mới như sau:

- Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu xanh thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh.
- Nếu con quạ ăn 2 quả khế màu xanh và 1 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng.
- Nếu con quạ ăn 1 quả khế màu xanh và 2 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu xanh.
- Nếu con quạ ăn 3 quả khế màu vàng thì cây khế sẽ ra lại 1 quả khế màu vàng.

Cuối cùng trên cây khế còn lại đúng 1 quả. Hỏi quả khế cuối cùng màu gì? Giải thích?

Lời giải

Sau mỗi lần quạ ăn số quả khế màu vàng hoặc giữ nguyên hoặc giảm đi 2 quả

Mà số quả khế màu vàng lúc đầu là số lẻ nên quả khế cuối cùng còn lại trên cây là quả khế màu vàng.

Câu 27. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

Cho đa giác đều 2025 cạnh. Người ta sơn các đỉnh của đa giác bằng hai màu xanh hoặc đỏ. Chứng minh tồn tại ba đỉnh được sơn cùng một màu tạo thành một tam giác cân.

Lời giải

Đa giác đều có 2025 cạnh nên có 2025 đỉnh (số lẻ đỉnh)

⇒ Tồn tại 2 đỉnh kề nhau là A và B được sơn cùng một màu (nguyên lý Dirichlet) giả sử 2 đỉnh ấy được sơn màu đỏ

Do số đỉnh lẻ nên tồn tại 1 điểm thuộc đường trung trực cạnh AB gọi là điểm C

Nếu C sơn màu đỏ

$\Rightarrow \triangle ABC$ cân và sơn cũng màu đỏ

Nếu C sơn màu xanh

Lúc đó gọi D, E là các đỉnh khác nhau của đa giác kề với A và B

Nếu D, E cùng sơn màu xanh

$\Rightarrow \triangle CDE$ cân và cùng sơn xanh

Nếu D, E có 1 đỉnh tô màu đỏ thì $\triangle DAB$ hoặc $\triangle EAB$ là tam giác cân cùng sơn đỏ

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Câu 28. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

Bạn Thái viết ra bảng 100 số nguyên dương đôi một phân biệt, mỗi số không lớn hơn 2^{98} . Đối với mỗi cặp số $(a; b)$ được bạn Thái viết ra, bạn Nguyên viết số $a + b - \text{UCLN}(a, b)$ trên bảng. Chứng minh rằng, có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các số mà bạn Thái viết.

Lời giải

Ta thấy các số mà bạn Nguyên viết ra đều là số nguyên dương. Gọi 100 số mà Thái viết ra bảng là $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}, (a_i \in \mathbb{N}^*)$. Giả sử không tồn tại số nào trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các số mà bạn Thái viết.

Như vậy với mọi $1 \leq i < j \leq 100$, thì $a_i + a_j - \text{UCLN}(a_i, a_j) \in S, S = \{a_1; a_2; \dots; a_{100}\}$.

Khi đó $a_{99} + a_{100} - \text{gcd}(a_{99}, a_{100}) \in S$. Ta thấy $a_{99} < a_{99} + a_{100} - \text{gcd}(a_{99}, a_{100})$.

Suy ra $a_{99} + a_{100} - \text{gcd}(a_{99}, a_{100}) = a_{100} \Leftrightarrow \text{gcd}(a_{99}, a_{100}) = a_{99} \Rightarrow a_{99} \mid a_{100}$. # (1)

Bây giờ, $a_{98} < a_{98} + a_{99} - \text{gcd}(a_{98}, a_{99})$.

Nếu $a_{98} + a_{99} - \text{UCLN}(a_{98}, a_{99}) = a_{100} \Rightarrow a_{98} - \text{UCLN}(a_{98}, a_{99}) \vdots a_{99}$, do (1)

Suy ra $a_{99} \leq a_{98} - \text{UCLN}(a_{98}, a_{99}) < a_{98}$, vô lý.

Như vậy $a_{98} + a_{99} - \text{UCLN}(a_{98}, a_{99}) = a_{90} \Rightarrow a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}$.

Bây giờ, $a_{97} < a_{97} + a_{98} - \text{UCLN}(a_{97}, a_{98}) \Rightarrow a_{97} + a_{98} - \text{UCLN}(a_{97}, a_{98}) \in \{a_{98}, a_{99}, a_{100}\}$.

Tương tự như trên thì $a_{97} \mid a_{98} \mid a_{99} \mid a_{100}$.

Lặp lại quá trình như vậy thì ta có $a_1 | a_2 | \dots | a_{98} | a_{99} | a_{100}$.

Ta đặt $a_{i+1} = q_i \cdot a_i$ với $q_i \in \mathbb{N}^*, q_i \neq 1, \forall i = \overline{1, 99}$.

Ta thấy $a_{100} = q_{99} q_{98} \dots q_1 a_1 \geq 2^{99}$. Mà a_{100} không lớn hơn 2^{98} . Suy ra mâu thuẫn.

Như vậy có ít nhất một số trong các số mà bạn Nguyên viết khác với tất cả các mà bạn Thái viết.



MathExpress
Sáng mãi niềm tin