

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN VỀ ĐA THỨC VÀ XÁC SUẤT THỐNG KÊ

CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

I. Đa thức

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực dương.

Biết $P(1)=12$ và $P(2)=16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^3 + a^2b + 3b^3}{ab^2} + \frac{ab^2}{a^3 + a^2b + 3b^3}.$$

Câu 2. (Trường chuyên Hà Nam năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số nguyên. Biết $Q(x)$ có một nghiệm là $x_0 = \sqrt{3}$ và $Q(1) = 4$, tính giá trị $Q(-2)$.

Câu 3. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^5$ và số $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. Tính $P(a)$.

Câu 4. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Xác định các hệ số a, b để đa thức $f(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ chia cho đa thức $x - 2$ dư 3 và chia cho đa thức $x + 2$ thì dư -5 .

Câu 5. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

Xét đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(1 + \sqrt{2}) = 2024$ thì $P(1 - \sqrt{2}) = 2024$.

Câu 6. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c| \leq 4$ và $|P(4)|$ là số nguyên tố.

Xác định các hệ số b và c của đa thức $P(x)$.

Câu 7. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Xác định a, b để $f(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + 4x + b$ là bình phương của một đa thức.

Câu 8. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

Cho $P(x)$ là đa thức có tất cả các hệ số nguyên. Biết rằng, $P(2025)$ và $P(2026)$ là các số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng, đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Câu 9. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mỗi lần thay đa thức này bởi một trong hai đa thức $cx^2 + bx + a$ hoặc $(a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$. Nếu cho đa thức $f(x) = x^2 + 4x + 3$ thì sau một số lần thay đổi có được đa thức $g(x) = x^2 + 10x + 9$ không? Vì sao?

II. Xác suất và thống kê**Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)**

Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{7; 8; 9; 10; 12\}$; Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5; 6; 8; 9; 13; 14\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn thì sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất để bạn Minh không thua cuộc.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Xếp ngẫu nhiên 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ đứng thành 1 hàng dọc. Tính xác suất để học sinh nữ đứng xen kẽ với nhau.

Câu 3. (Trường chuyên Hà Nam năm 2025 – 2026)

Bạn Hà chọn ngẫu nhiên một số a thuộc S và nhỏ hơn 8, bạn Nam chọn ngẫu nhiên một số b thuộc S và lớn hơn 7. Sau đó các bạn Hà, Nam ghép hai số đã chọn thành số $\overline{ab}$. Tính xác suất $\overline{ab}$ chia hết cho 3.

Câu 4. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A : “Tích của hai số chấm xuất hiện trên mặt xúc xắc trong hai lần gieo bằng 6”.

Câu 5. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau, tạo thành từ các chữ số 0; 1; 2; 3; 4; 5 và 6. Mỗi bạn An và Bình viết ngẫu nhiên một số thuộc tập S lên bảng. Tính xác suất để tổng hai số được viết lên bảng là số chẵn.

Câu 6. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Trong một lần bốc thăm trúng thưởng, người tham gia chọn ngẫu nhiên một quả cầu từ một hộp đựng 100 quả cầu ghi các số 1; 2; 3; ...; 99; 100, hai quả cầu khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Người tham gia sẽ trúng thưởng khi chọn được quả cầu ghi số lẻ mà số đó chia cho 3 và 5 đều có số dư là 2. Bạn Nam tham gia lần bốc thăm đó, tính xác suất để bạn Nam trúng thưởng.

Câu 7. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số và các chữ số đều khác 0. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp A .

a) Tính xác suất của biến cố “Chọn được số chia hết cho 4”.

b) Tính xác suất của biến cố “Chọn được số $\overline{ab}$ sao cho tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương”.

Câu 8. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Một thùng có 40 quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có một số quả bóng màu đỏ, một số quả bóng màu xanh, còn lại là những quả bóng màu khác. Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng trong thùng. Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\frac{3}{10}$, xác suất để lấy quả bóng màu xanh là $\frac{3}{8}$.

Tìm số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh.

Câu 9. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Trên kệ có 10 quyển sách khác nhau, trong đó có 5 quyển sách Toán, 3 quyển sách Văn và 2 quyển sách Lý. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách Toán.

Câu 10. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

Cho một chiếc hộp chứa 80 quả cầu trong đó có 50 quả cầu xanh được đánh số lần lượt từ 1 đến 50 và 30 quả cầu đỏ đánh số lần lượt từ 1 đến 30 (các quả cầu cùng kích thước và khối lượng). Chọn ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp. Tính xác suất để quả cầu được chọn mang số chia hết cho 3.

Câu 11. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Ba bạn An, Bình, Hưng được xếp ngẫu nhiên ngồi trên một hàng ghế có ba chỗ ngồi.

- Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.
- Tính xác suất của biến cố E : "Bình và Hưng không ngồi cạnh nhau".

Câu 12. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Kết thúc năm học, thầy giáo chọn ngẫu nhiên bốn trong năm bạn lớp 9A gồm: An, Bình, Cường, Dũng, Thảo để dự hội nghị tuyên dương.

- Tính xác suất để trong bốn bạn được chọn có bạn An.
- Ban tổ chức chuẩn bị bốn phần quà khác nhau dành riêng cho mỗi bạn lớp 9A tham dự. Tại hội nghị, do quên ghi tên trên quà nên ban tổ chức đã phát ngẫu nhiên quà cho bốn bạn, mỗi bạn nhận một phần quà. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một bạn nhận đúng phần quà của mình".

Câu 13. (Trường chuyên Quảng Bình năm 2025 – 2026)

Một hộp đựng 9 thẻ có kích thước và hình dạng giống nhau được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên từ hộp hai thẻ và ghép thành số có hai chữ số. Tính xác suất của các biến cố sau

- A : "Số tạo thành là số nguyên tố".
- B : "Số tạo thành là số khi chia cho 3 dư 2 và khi chia cho 7 dư 3".

Câu 14. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

Thầy giáo có 12 câu hỏi khác nhau dùng để kiểm tra vấn đáp, trong đó có 5 câu hỏi ở mức độ nhận biết, 4 câu hỏi ở mức độ thông hiểu và 3 câu hỏi ở mức độ vận dụng. Một học sinh được chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 câu hỏi trong số 12 câu hỏi trên để thực hiện kiểm tra. Tính xác suất để 2 câu hỏi học sinh đó chọn được thuộc hai mức độ khác nhau.

Câu 15. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)

An và Bình mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 10 lên bảng.

a) Tính xác suất để số An viết bé hơn số Bình viết;

b) Tính xác suất để An viết được số a và Bình viết được số b thoả mãn điều kiện: $a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là một số nguyên tố.

Câu 16. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Trong lớp bạn An có 12 học sinh nữ và một số học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng xác suất để học sinh đó là nam là 0,625. Hỏi lớp bạn An có bao nhiêu học sinh?

Câu 17. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

Lớp 9D có 45 học sinh, mỗi bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: đá cầu, bóng đá. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp đó. Xét các biến cố:

A : "Học sinh được chọn biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá"

B : "Học sinh được chọn biết chơi môn đá cầu"

Biết rằng, xác suất của biến cố A bằng $\frac{2}{9}$, xác suất của biến cố B bằng $\frac{2}{3}$. Tính xác suất của biến cố

C : "Học sinh được chọn biết chơi môn bóng đá".

Câu 18. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

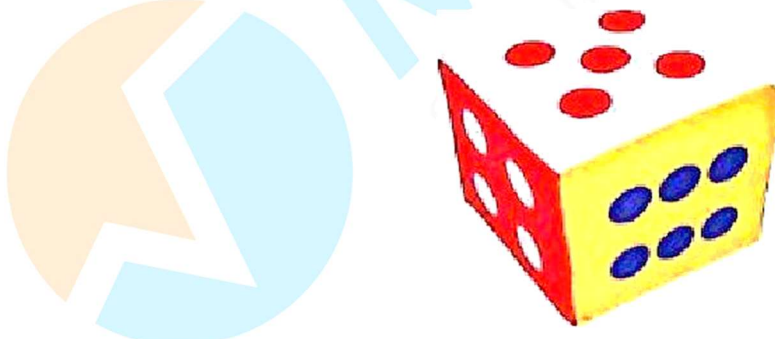
Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số 1;2;3;4;5;6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp M , tính xác suất chọn được số chia hết cho 3.

Câu 19. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

a) A : "Hiệu số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo có giá trị tuyệt đối bằng 2";

b) B : "Hiệu số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo có giá trị tuyệt đối là số nguyên tố".

**Câu 20. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)**

Cho hai hộp đựng thẻ: hộp I gồm 5 thẻ được đánh số 1;2;3;4;5; hộp II gồm 5 thẻ được đánh số 6;7;8;9;10 (các thẻ khác nhau được đánh số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ở mỗi hộp một thẻ, tính xác suất để tích hai số trên các thẻ rút được là số chẵn.

HƯỚNG DẪN GIẢI

I. Đa thức

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Cho đa thức bậc hai $P(x) = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các số thực dương.

Biết $P(1)=12$ và $P(2)=16$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{a^3 + a^2b + 3b^3}{ab^2} + \frac{ab^2}{a^3 + a^2b + 3b^3}.$$

Lời giải

$$\text{Đặt } t = \frac{a}{b} > 0 \Rightarrow B = t^2 + t + \frac{3}{t}$$

$$\text{Ta có: } A = \frac{a^3 + a^2b + 3b^3}{ab^2} + \frac{ab^2}{a^3 + a^2b + 3b^3}$$

$$A = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + \frac{3}{\frac{a}{b}} + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{a}{b} + \frac{3}{\frac{a}{b}}}$$

$$A = t^2 + t + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2 + t + \frac{3}{t}}$$

$$A = B + \frac{1}{B}$$

Để ý rằng theo bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$B = t^2 + t + \frac{3}{t} = (t-1)^2 + 3t + \frac{3}{t} - 1 \geq 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} - 1 = 5$$

Tiếp tục sử dụng AM-GM, ta có:

$$A = B + \frac{1}{B} = \frac{24}{25}B + \frac{1}{25}B + \frac{1}{B} \geq \frac{24}{25} \cdot 5 + 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{25} \cdot B \cdot \frac{1}{B}} = \frac{26}{5}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $t=1$ hay $a=b$.

Để ý $P(1)=12$, $P(2)=16$ nên $a+b+c=12$, $4a+2b+c=16$

Do đó $a=b=1$, $c=10$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $A = \frac{26}{5}$ khi $a=b=1$, $c=10$.

Câu 2. (Trường chuyên Hà Nam năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $Q(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số nguyên. Biết $Q(x)$ có một nghiệm là $x_0 = \sqrt{3}$ và $Q(1) = 4$, tính giá trị $Q(-2)$.

Lời giải

Thay $x = \sqrt{3}$ vào $Q(x)$ có:

$$0 = Q(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 + a(\sqrt{3})^2 + b \cdot \sqrt{3} + c$$

$$0 = 3\sqrt{3} + 3a + b\sqrt{3} + c$$

$$0 = \sqrt{3}(3 + b) + 3a + c$$

$$-(3a + c) = \sqrt{3}(3 + b)$$

$$\text{Xét } b + 3 \neq 0 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{-(3a + c)}{3 + b},$$

$$\text{mà } a, b, c \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-(3a + c)}{3 + b} \in \mathbb{Q}, \text{ kết hợp } \sqrt{3} \in \mathbb{I} \text{ nên giả thiết trên vô lý}$$

$$\Rightarrow 3 + b = 0 \Rightarrow b = -3$$

$$\Rightarrow 3a + c = 0 \Rightarrow c = -3a$$

$$\Rightarrow Q(x) = x^3 + ax^2 - 3x - 3a$$

Do $Q(1) = 4$ nên thay $x = 1$ có:

$$4 = 1^3 + a \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 3a$$

$$4 = -2 - 2a$$

$$6 = -2a$$

$$\Rightarrow a = -3 \Rightarrow c = -3(-3) = 9$$

$$\Rightarrow Q(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 9$$

Thay $x = -2$ có:

$$Q(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 3(-2) + 9 = -8 - 12 + 6 + 9 = -5$$

Vậy $Q(-2) = -5$.

Câu 3. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $P(x) = (x^2 - 2x + 3)^5$ và số $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$. Tính $P(a)$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra: $a = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$.

$$\Rightarrow a - 1 = \sqrt{2} \Rightarrow (a - 1)^2 = 2 \Rightarrow a^2 - 2a = 1.$$

$$\text{Khi đó: } P(a) = (a^2 - 2a + 3)^5 = (1 + 3)^5 = 4^5 = 1024.$$

Câu 4. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Xác định các hệ số a, b để đa thức $f(x) = x^3 + 5x^2 + ax + b$ chia cho đa thức $x - 2$ dư 3 và chia cho đa thức $x + 2$ thì dư -5 .

Lời giải

Ta thấy rằng phần dư trong phép chia đa thức $f(x)$ cho $x - a$ đúng bằng $f(a)$ nên từ giả thiết ta

$$\text{có: } \begin{cases} f(2) = 3 \\ f(-2) = -5 \end{cases}$$

Do đó:

$$\begin{cases} 8 + 20 + 2a + b = 3 \\ -8 + 20 - 2a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -25 \\ -2a + b = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a = -25 - b \\ 2b = -25 - 17 = -42 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -21 \end{cases}$$

Vậy đa thức $f(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 21$.

Câu 5. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

Xét đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$ với a, b là các hệ số nguyên. Chứng minh rằng nếu $P(1 + \sqrt{2}) = 2024$ thì $P(1 - \sqrt{2}) = 2024$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } P(1 + \sqrt{2}) = 2024 \Rightarrow (1 + \sqrt{2})^2 + a(1 + \sqrt{2}) + b = 2024$$

$$\Rightarrow (a + 2)\sqrt{2} = 2021 - a - b$$

$$\text{Do } a + 2, 2021 - a - b \text{ là các số nguyên trong khi } \sqrt{2} \text{ là số vô tỉ nên } \begin{cases} a + 2 = 0 \\ 2021 - a - b = 0 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} a = -2 \\ b = 2023. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } P(1 - \sqrt{2}) = (1 - \sqrt{2})^2 - 2(1 - \sqrt{2}) + 2023$$

$$= 3 - 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} + 2023 = 2024, \text{ có điều phải chứng minh.}$$

Câu 6. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $P(x) = x^2 + bx + c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $|c| \leq 4$ và $|P(4)|$ là số nguyên tố. Xác định các hệ số b và c của đa thức $P(x)$.

Lời giải

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm nguyên của phương trình $P(x) = 0$. Giả sử $x_1 \leq x_2$.

Suy ra $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)$. Theo định lý Vi - ét, ta có: $|x_1 x_2| = |c| \leq 4$. (1)

Mà $|P(4)| = |4 - x_1||4 - x_2|$ là số nguyên tố.

Trường hợp 1: Nếu $|4 - x_1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_1 = 3 \end{cases}$.

Với $x_1 = 3$. Như vậy $|x_2| \leq \frac{4}{3} < x_1$, vô lý.

Với $x_1 = 5$. Như vậy $|x_2| \leq \frac{4}{5} \Rightarrow x_2 = 0 < x_1$, vô lý.

Trường hợp 2: Nếu $|4 - x_2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 5 \\ x_2 = 3 \end{cases}$.

Với $x_2 = 3$. Như vậy $x_1 = 1$ hoặc $x_1 = 0$.

Khả năng 1: $x_1 = 0$ thì $|P(4)| = 4$ không là số nguyên tố.

Khả năng 2: $x_1 = 1$ thì $b = -(x_1 + x_2) = -4, c = x_1 x_2 = 3$.

Với $x_2 = 5$. Như vậy $|x_1| \leq \frac{4}{5} \Rightarrow x_1 = 0$. Khi đó $|P(4)| = 4$ không là số nguyên tố.

Vậy $b = -4, c = 3, P(x) = x^2 - 4x + 3$.

Câu 7. (Trường chuyên Tây Ninh năm 2025 – 2026)

Xác định a, b để $f(x) = x^4 - 4x^3 + ax^2 + 4x + b$ là bình phương của một đa thức.

Lời giải

Do giả thiết ta có $f(x) = (x^2 + cx + d)^2$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + 2cx^3 + (c^2 + 2d)x^2 + 2cdx + d^2$$

$$\text{Từ đó ta có hệ } \begin{cases} 2c = -4 \\ c^2 + 2d = a \\ 2cd = 4 \\ d^2 = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -2 \\ d = -1 \\ a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $a = 2, b = 1$ là giá trị cần tìm

Câu 8. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

Cho $P(x)$ là đa thức có tất cả các hệ số nguyên. Biết rằng, $P(2025)$ và $P(2026)$ là các số tự nhiên lẻ. Chứng minh rằng, đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Lời giải

Giả sử đa thức $P(x)$ bậc $n \geq 1$ thỏa mãn $P(2025), P(2026)$ là số tự nhiên lẻ và có nghiệm nguyên a .

Khi đó theo định lý Bezout thì $P(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, với $\deg Q(x) = n - 1$.

Ta có: $P(2025)P(2026) = (2025 - a) \cdot Q(2025) \cdot (2026 - a) \cdot Q(2026)$.

Do $2025 - a, 2026 - a$ là hai số nguyên liên tiếp nên $(2025 - a)(2026 - a)$ chẵn.

Mặt khác $P(2025)P(2026)$ lẻ. Do đó xảy ra điều mâu thuẫn.

Vậy đa thức $P(x)$ không có nghiệm nguyên.

Câu 9. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$. Mỗi lần thay đa thức này bởi một trong hai đa thức $cx^2 + bx + a$ hoặc $(a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$. Nếu cho đa thức $f(x) = x^2 + 4x + 3$ thì sau một số lần thay đổi có được đa thức $g(x) = x^2 + 10x + 9$ không? Vì sao?

Lời giải

Với mỗi đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$, ta xét đại lượng $\Delta = b^2 - 4ac$.

Đa thức $cx^2 + bx + a$ có

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Đa thức $(a + b + c)x^2 + (2a + b)x + a$ có

$$\Delta = (2a + b)^2 - 4a(a + b + c) = 4a^2 + 4ab + b^2 - 4a^2 - 4ab - 4ac = b^2 - 4ac.$$

Suy ra sau các bước biến đổi thì Δ không đổi.

Mà đa thức $f(x) = x^2 + 4x + 3$ có $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4$

Đa thức $g(x) = x^2 + 10x + 9$ có $\Delta = 10^2 - 4 \cdot 9 = 64 \neq 4$

Do đó từ đa thức đã cho không thể biến đổi về đa thức $g(x) = x^2 + 10x + 9$.

II. Xác suất và thống kê

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

Hai bạn Minh và Huy chơi một trò chơi như sau: Minh chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{7;8;9;10;12\}$; Huy chọn ngẫu nhiên một số trong tập hợp $\{5;6;8;9;13;14\}$. Bạn nào chọn được số lớn hơn thì sẽ là người thắng cuộc. Nếu hai số chọn được bằng nhau thì kết quả là hoà. Tính xác suất để bạn Minh không thua cuộc.

Lời giải

Tổng số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = 5 \times 6 = 30$.

Gọi A là biến cố "Bạn Minh không thua cuộc". Điều này xảy ra khi số Minh chọn lớn hơn hoặc bằng số Huy chọn. Ta có các trường hợp sau:

Nếu Minh chọn số 7, để không thua thì Huy phải chọn các số trong tập $\{5;6\}$.

Có 2 trường hợp

Nếu Minh chọn số 8, để không thua thì Huy phải chọn các số trong tập $\{5;6;8\}$.

Có 3 trường hợp.

Nếu Minh chọn số 9, để không thua thì Huy phải chọn các số trong tập $\{5;6;8;9\}$.

Có 4 trường hợp.

Nếu Minh chọn số 10, để không thua thì Huy phải chọn các số trong tập $\{5;6;8;9\}$.

Có 4 trường hợp.

Nếu Minh chọn số 12, để không thua thì Huy phải chọn các số trong tập $\{5;6;8;9\}$.

Có 4 trường hợp.

Tổng số trường hợp thuận lợi cho biến cố A là: $n(A) = 2 + 3 + 4 + 4 + 4 = 17$.

Xác suất để bạn Minh không thua cuộc là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{17}{30}$.

Vậy xác suất để bạn Minh không thua cuộc là $\frac{17}{30}$.

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Xếp ngẫu nhiên 2 học sinh nam và 3 học sinh nữ đứng thành 1 hàng dọc. Tính xác suất để học sinh nam và học sinh nữ đứng xen kẽ với nhau.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu là cách xếp 5 học sinh thành hàng dọc:

Xếp học sinh thứ nhất có 5 cách xếp;

Xếp học sinh thứ hai có 4 cách xếp;

Xếp học sinh thứ ba có 3 cách xếp;

Xếp học sinh thứ tư có 2 cách xếp;
Xếp học sinh thứ năm có 1 cách xếp.
Suy ra $N(\Omega) = 5.4.3.2.1 = 120$.

Gọi A là biến cố : “Học sinh nam và nữ đứng xen kẽ”.

Để nam và nữ đứng xen kẽ thì thứ tự đứng phải có dạng NỮ – NAM – NỮ – NAM – NỮ

Xếp bạn nữ thứ nhất vào chỗ ngồi có 3 cách;
Xếp bạn nữ thứ hai vào chỗ ngồi có 2 cách;
Xếp bạn nữ thứ ba vào chỗ ngồi có 1 cách;
Xếp bạn nam thứ nhất vào chỗ ngồi có 2 cách;
Xếp bạn nam thứ hai vào chỗ ngồi có 1 cách.
Suy ra $n(A) = 3.2.1.2.1 = 12$.

Vậy xác suất A là $P(A) = \frac{12}{120} = \frac{1}{10}$.

Câu 3. (Trường chuyên Hà Nam năm 2025 – 2026)

Cho tập $S = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$. Bạn Hà chọn ngẫu nhiên một số a thuộc S và nhỏ hơn 8, bạn Nam chọn ngẫu nhiên một số b thuộc S và lớn hơn 7. Sau đó các bạn Hà, Nam ghép hai số đã chọn thành số $\overline{ab}$. Tính xác suất $\overline{ab}$ chia hết cho 3.

Lời giải

Gọi tập các a có thể chọn là S_1 , với $S_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$.

Gọi tập các b có thể chọn là S_2 , với $S_2 = \{8; 9; 10; 11; 12\}$.

Do S_1 có 7 phần tử, S_2 có 5 phần tử nên số cách chọn $\overline{ab}$ là: $5.7 = 35$ (cách).

Suy ra số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = 35$.

Xét S_1 có:

1;4;7 chia 3 dư 1
2;5 chia 3 dư 2
3;6 chia hết cho 3

Xét S_2 có:

10 chia 3 dư 1
8;11 chia 3 dư 2
9;12 chia hết cho 3

Trường hợp 1. $\overline{ab}$ là số có hai chữ số

Tức là chỉ chọn b thuộc tập $\{8;9\}$

Nếu $b = 8$, ta phải chọn a chia 3 dư 1 để $\overline{ab}$ chia hết cho 3 nên a có 2 cách chọn

Suy ra có $1.3 = 3$ (cách chọn $\overline{ab}$)

Nếu $b = 9$, ta phải chọn a chia hết 3 để $\overline{ab}$ chia hết cho 3 nên a có 2 cách chọn

Suy ra có $1.2 = 2$ (cách chọn $\overline{ab}$)

Trường hợp 2. $\overline{ab}$ là số có ba chữ số

Tức là chỉ chọn b thuộc tập $\{10;11;12\}$

Nếu $b = 10$ thì $\overline{a10}$ là số cần tìm nên ta phải chọn a chia 3 dư 2 để $\overline{ab}$ chia hết cho 3

Suy ra a có 2 cách chọn

Khi đó, có $1.2 = 2$ (cách chọn $\overline{ab}$)

Nếu $b = 11$ thì $\overline{a11}$ là số cần tìm nên ta phải chọn a chia 3 dư 1 để $\overline{ab}$ chia hết cho 3

Suy ra a có 1 cách chọn

Khi đó, có $1.3 = 3$ (cách chọn $\overline{ab}$)

Nếu $b = 12$ thì $\overline{a12}$ là số cần tìm nên ta phải chọn a chia hết cho 3 để $\overline{ab}$ chia hết cho 3

Suy ra a có 2 cách chọn

Khi đó, có $1.2 = 2$ (cách chọn $\overline{ab}$)

Vậy có tất cả $2 + 2 + 3 + 3 + 2 = 12$ số thoả mãn đề bài.

Gọi A là biến cố " $\overline{ab}$ chia hết cho 3"

Suy ra số kết quả thuận lợi cho A là 12 hay $n(A) = 12 \Rightarrow P(A) = \frac{12}{35}$.

Vậy xác suất $\overline{ab}$ chia hết cho 3 là $\frac{12}{35}$.

Câu 4. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Gieo một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất của biến cố A : "Tích của hai số chấm xuất hiện trên mặt xúc xắc trong hai lần gieo bằng 6".

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $6 \cdot 6 = 36$.

Chú ý rằng $6 = 1 \cdot 6 = 6 \cdot 1 = 2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$.

Số kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Tích của hai số chấm xuất hiện trên mặt xúc xắc trong hai lần gieo bằng 6" là : 4 .

Nên xác suất của biến cố A : "Tích của hai số chấm xuất hiện trên mặt xúc xắc trong hai lần gieo bằng 6" là $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Câu 5. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số khác nhau, tạo thành từ các chữ số 0;1;2;3;4;5 và 6. Mỗi bạn An và Bình viết ngẫu nhiên một số thuộc tập S lên bảng. Tính xác suất để tổng hai số được viết lên bảng là số chẵn.

Lời giải

Số phần tử của S là $|S| = 6 \cdot 5 = 30$ số. Trong đó có $3 \cdot 5 = 15$ số lẻ (chữ số hàng đơn vị có 3 lựa chọn là 1;3;5, chữ số hàng chục có 5 lựa chọn) và 15 số chẵn.

Xét phép thử: "Mỗi bạn An và Bình viết ngẫu nhiên một số thuộc tập S lên bảng" và gọi A là biến cố "Tổng của hai số được viết lên bảng là số chẵn".

Mỗi bạn có 30 cách viết số lên bảng nên $n(\Omega) = 30 \cdot 30$.

Biến cố A có hai trường hợp xảy ra là cả hai bạn An và Bình cùng viết số chẵn hoặc cùng viết số lẻ

$$\text{nên } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{15 \cdot 15 + 15 \cdot 15}{30 \cdot 30} = \frac{1}{2}.$$

Câu 6. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Trong một lần bốc thăm trúng thưởng, người tham gia chọn ngẫu nhiên một quả cầu từ một hộp đựng 100 quả cầu ghi các số 1;2;3;...;99;100, hai quả cầu khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Người tham gia sẽ trúng thưởng khi chọn được quả cầu ghi số lẻ mà số đó chia cho 3 và 5 đều có số dư là 2. Bạn Nam tham gia lần bốc thăm đó, tính xác suất để bạn Nam trúng thưởng.

Lời giải

Do 100 quả cầu có khối lượng và kích thước như nhau nên các khả năng là đồng xảy ra. Do đó số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 100$.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố A : "Bốc được quả cầu ghi số lẻ, chia cho 3 và 5 đều dư 2 là: $\{17;47;77\}$. Số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 3$.

Xác suất của biến cố là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{100}$.

Vậy xác suất để bạn Nam trúng thưởng là $\frac{3}{100}$.

Câu 7. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

Gọi A là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số và các chữ số đều khác 0. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp A .

a) Tính xác suất của biến cố “Chọn được số chia hết cho 4”.

b) Tính xác suất của biến cố “Chọn được số $\overline{ab}$ sao cho tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương”.

Lời giải

A là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số và các chữ số đều khác 0.

Suy ra $n(A) = 9 \cdot 9 = 81$.

a) Gọi X là biến cố “Chọn được số chia hết cho 4”, tức là phần tử của X là các số có hai chữ số có các chữ số khác 0 và chia hết cho 4.

Tập các số có hai chữ số chia hết cho 4 là $X_1 = \{12; 16; 20; \dots; 92; 96\}$, suy ra

$$n(X_1) = \frac{96 - 12}{4} - 1 = 22.$$

Tập các số có hai chữ số, chia hết cho 4, có chữ số 0 là $X_2 = \{20; 40; 60; 80\}$, suy ra $n(X_2) = 4$.

Suy ra $n(X) = n(X_1) - n(X_2) = 22 - 4 = 18$.

Vậy xác suất của biến cố X là $\frac{n(X)}{n(A)} = \frac{18}{81} = \frac{2}{9}$.

b) Gọi Y là biến cố “Chọn được số $\overline{ab}$ sao cho tổng $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương”.

Ta có $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a + b)$.

Để $\overline{ab} + \overline{ba}$ là số chính phương thì $11(a + b)$ là số chính phương.

Mà 11 là số nguyên tố và $2 < a + b < 18$. Suy ra $a + b = 11$.

Suy ra tập các số thỏa mãn biến cố Y là $\{92; 83; 74; 65; 56; 47; 38; 29\}$.

Suy ra $n(Y) = 8$.

Vậy xác suất của biến cố Y là $\frac{n(Y)}{n(A)} = \frac{8}{81}$.

Câu 8. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Một thùng có 40 quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có một số quả bóng màu đỏ, một số quả bóng màu xanh, còn lại là những quả bóng màu khác. Lấy ngẫu nhiên 1 quả bóng trong thùng. Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ là $\frac{3}{10}$, xác suất để lấy quả bóng màu xanh là $\frac{3}{8}$. Tìm số quả bóng có màu khác màu đỏ và màu xanh.

Lời giải

Chọn ngẫu nhiên một quả bóng trong thùng có 40 quả.

Số phần tử của không gian mẫu là $n = 40$.

Gọi x, y lần lượt là số quả bóng màu đỏ và số quả bóng màu xanh trong thùng ($x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 40$).

Xác suất để lấy được quả bóng màu đỏ và màu xanh lần lượt là $\frac{x}{40}; \frac{y}{40}$.

$$\text{Theo giả thiết ta có } \begin{cases} \frac{x}{40} = \frac{3}{10} \\ \frac{y}{40} = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 12 \\ y = 15 \end{cases} \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy trong thùng có số quả bóng khác màu đỏ và màu xanh là : $40 - 12 - 15 = 13$ (quả bóng).

Câu 9. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Trên kệ có 10 quyển sách khác nhau, trong đó có 5 quyển sách Toán, 3 quyển sách Văn và 2 quyển sách Lý. Lấy ngẫu nhiên hai quyển sách từ trên kệ. Tính xác suất để lấy được hai quyển sách Toán.

Lời giải

Gọi A là biến cố lấy được hai quyển sách Toán.

Số kết quả không gian mẫu là $n(\Omega) = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

Số kết quả thuận lợi là $n(A) = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$.

Xác suất để lấy được hai quyển sách Toán là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

Câu 10. (Trường chuyên Lào Cai năm 2025 – 2026)

Cho một chiếc hộp chứa 80 quả cầu trong đó có 50 quả cầu xanh được đánh số lần lượt từ 1 đến 50 và 30 quả cầu đỏ đánh số lần lượt từ 1 đến 30 (các quả cầu cùng kích thước và khối lượng). Chọn ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp. Tính xác suất để quả cầu được chọn mang số chia hết cho 3.

Lời giải

Ta có $n(\Omega) = 80$.

Goi A là biến cố "Số được chọn là số chia hết cho 3".

Trong 50 quả cầu xanh có $\frac{48-3}{3} + 1 = 16$ quả mang số chia hết cho 3.

Trong 30 quả cầu đỏ có $\frac{30-3}{3} + 1 = 10$ quả mang số chia hết cho 3.

$$\Rightarrow n(A) = 16 + 10 = 26 \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{26}{80} = \frac{13}{40}.$$

Câu 11. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Ba bạn An, Bình, Hưng được xếp ngẫu nhiên ngồi trên một hàng ghế có ba chỗ ngồi.

a) Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.

b) Tính xác suất của biến cố E : "Bình và Hưng không ngồi cạnh nhau".

Lời giải

a) Ta giả sử sẽ xếp bạn An ngồi trước rồi sau đó sẽ xếp Bình rồi đến Hưng vào hàng ghế. Ban đầu An có 3 cách chọn, sau khi An ngồi thì Bình còn 2 cách chọn rồi Hưng còn 1 cách chọn. Có tất cả 6 cách xếp 3 bạn vào hàng ghế gồm:

$AHB, ABH, BHA, BAH, HBA, HAB$ (với A là An, B là Bình, H là Hưng).

Vậy $n(\Omega) = 6$.

b) Các khả năng thuận lợi cho biến cố là BAH, HAB .

Vậy $n(E) = 2$.

$$\text{Vậy } P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Câu 12. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Kết thúc năm học, thầy giáo chọn ngẫu nhiên bốn trong năm bạn lớp 9A gồm: An, Bình, Cường, Dũng, Thảo để dự hội nghị tuyên dương.

a) Tính xác suất để trong bốn bạn được chọn có bạn An.

b) Ban tổ chức chuẩn bị bốn phần quà khác nhau dành riêng cho mỗi bạn lớp 9A tham dự. Tại hội nghị, do quên ghi tên trên quà nên ban tổ chức đã phát ngẫu nhiên quà cho bốn bạn, mỗi bạn nhận một phần quà. Tính xác suất của biến cố "Có ít nhất một bạn nhận đúng phần quà của mình".

Lời giải

a) Có 5 cách chọn ngẫu nhiên 4 bạn trong 5 bạn: An, Bình, Cường, Dũng; An, Bình, Cường, Thảo; Bình, Cường, Dũng, Thảo; An, Bình, Dũng, Thảo; An, Cường, Dũng, Thảo.

Để chọn 4 bạn mà trong đó có bạn An thì ta chọn An có 1 cách.

Ta chọn 3 bạn trong 4 bạn còn lại có 4 cách, bao gồm: Dũng, Bình, Cường; Dũng, Bình, Thảo; Bình, Cường, Thảo; Cường, Dũng, Thảo.

Như vậy số trường hợp để chọn 4 bạn mà trong đó có bạn An là 4.

Xác suất chọn 4 bạn mà trong đó có bạn An là $\frac{4}{5}$.

b) Tính trực tiếp. Giả sử 4 bạn được trao giải là A, B, C, D.

Ký hiệu các phần thưởng là số 1; 2; 3; 4 tương ứng với 4 bạn A, B, C, D. Ta xét 3 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Chỉ có 1 bạn nhận đúng phần thưởng, chọn 1 bạn trong 4 bạn có 4 cách chọn. Giả sử bạn đó là A, 3 bạn còn lại là B, C, D, chọn B để trao có 2 cách (nhận phần thưởng số 3 hoặc 4. Nếu B nhận số 3 thì D nhận số 2 và C nhận số 4. Nếu B nhận số 4 thì D nhận số 3, C nhận số 2). Như vậy trường hợp này có $2 \times 4 = 8$ cách.

Trường hợp 2: Có 2 bạn nhận đúng phần thưởng, có 6 cách chọn 2 trong 4 bạn. Giả sử hai bạn nhận đúng phần thưởng là A (nhận số 1) và B (nhận số 2), khi đó C, D chỉ có 1 cách trao phần thưởng (C nhận số 4, D nhận số 3).

Trường hợp 3: Cả 4 bạn đều trao đúng phần thưởng (nếu 3 bạn trao đúng thì cả 4 bạn trao đúng). Như vậy có $8 + 6 + 1 = 15$ (cách).

Số cách để phát 4 phần quà tùy ý cho 4 bạn $4.3.2.1 = 24$ (cách).

Vậy xác suất để "có ít nhất một bạn nhận đúng quà của mình" là: $\frac{15}{24} = \frac{5}{8}$.

Câu 13. (Trường chuyên Quảng Bình năm 2025 – 2026)

Một hộp đựng 9 thẻ có kích thước và hình dạng giống nhau được đánh số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên từ hộp hai thẻ và ghép thành số có hai chữ số. Tính xác suất của các biến cố sau

a) A : "Số tạo thành là số nguyên tố".

b) B : "Số tạo thành là số khi chia cho 3 dư 2 và khi chia cho 7 dư 3".

Lời giải

Số cách rút ngẫu nhiên hai chiếc thẻ từ 9 thẻ trong hộp là $9.8 = 72$ (cách).

a) Ta có thể liệt kê các số nguyên tố có hai chữ số bao gồm

11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97.

Do rút ngẫu nhiên 2 thẻ nên ta sẽ loại đi số 11. Số khả năng thuận lợi cho biến cố B là 20.

Như vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$.

b) Với số nguyên dương a chia cho 3 dư 2, chia cho 7 dư 3.

Khi đó $a + 4$ sẽ chia hết cho 3 và chia hết cho 7.

Mà $(3, 7) = 1$ nên $a + 4$ chia hết cho 21. Hay là a chia cho 21 dư 17. Ta có thể liệt kê các số nguyên dương hai chữ số chia cho 21 dư 17 bao gồm 17; 38; 59; 80.

Các khả năng có thể xảy ra là 17; 38; 59. Nên số khả năng thuận lợi cho biến cố là 3.

Như vậy xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{3}{72} = \frac{1}{24}$.

Câu 14. (Trường chuyên Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

Thầy giáo có 12 câu hỏi khác nhau dùng để kiểm tra vấn đáp, trong đó có 5 câu hỏi ở mức độ nhận biết, 4 câu hỏi ở mức độ thông hiểu và 3 câu hỏi ở mức độ vận dụng. Một học sinh được chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 câu hỏi trong số 12 câu hỏi trên để thực hiện kiểm tra. Tính xác suất để 2 câu hỏi học sinh đó chọn được thuộc hai mức độ khác nhau.

Lời giải

Phép thử "Chọn ngẫu nhiên đồng thời 2 câu hỏi trong số 12 câu hỏi thực hiện bài kiểm tra".

Số kết quả có thể xảy ra là $\frac{12.11}{2} = 66$.

Biến cố A : "Chọn hai câu sao cho chọn được 2 mức độ khác nhau".

Có 5 cách chọn 1 câu mức độ nhận biết, 4 cách chọn 1 câu mức độ thông hiểu, 3 cách chọn 1 câu mức độ vận dụng.

Số kết quả thuận lợi biến cố là: $5.4 + 4.3 + 5.3 = 47$.

Xác suất để 2 câu hỏi được chọn thuộc hai mức độ khác nhau là $P(A) = \frac{47}{66}$.

Câu 15. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)

An và Bình mỗi bạn viết ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 10 lên bảng.

a) Tính xác suất để số An viết bé hơn số Bình viết;

b) Tính xác suất để An viết được số a và Bình viết được số b thỏa mãn điều kiện: $a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là một số nguyên tố.

Lời giải

Xét phép thử: “An và Bình, mỗi bạn biết ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 10 lên bảng”. Không gian mẫu của phép thử đó là: $10 \cdot 10 = 100$.

a) Xét biến cố A : “Số của An viết ra bé hơn số của Bình”.

Nếu Bình viết số $a > 1$ thì An có $a - 1$ khả năng để viết ra số bé hơn Bình.

Như vậy số kết quả thuận lợi là: $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$.

Như vậy xác suất để An viết số bé hơn của Bình là $\frac{45}{100} = \frac{9}{20}$.

b) Xét biến cố B : “Số của An và Bình viết ra là a và b thỏa mãn $a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là số nguyên tố”.

Giả sử $p = a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là số nguyên tố. Khi đó

$$p = a^3 + b^3 - 6ab + 8 = (a + b + 2)(a^2 + b^2 + 4 - 2a - 2b - ab)$$

Do $a + b + 2 > 1$ nên $a + b + 2 = p, a^2 + b^2 + 4 - 2a - 2b - ab = 1$

$$\text{Mà } 2 = 2(a^2 + b^2 + 4 - 2a - 2b - ab) = (a - 2)^2 + (b - 2)^2 + (a - b)^2$$

Suy ra hai trong ba số $(a - 2)^2, (b - 2)^2, (a - b)^2$ là 1 và số còn lại là 0.

Giải các trường hợp ta nhận được các cặp số $(a; b)$ thỏa mãn là $\{(1; 2); (2; 1); (2; 3); (3; 2)\}$

Như vậy có 4 kết quả thuận lợi cho biến cố B

Vậy xác suất để số của An và Bình viết ra là a và b , thỏa mãn $a^3 + b^3 - 6ab + 8$ là số nguyên tố là

$$\frac{4}{100} = \frac{1}{25}.$$

Câu 16. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Trong lớp bạn An có 12 học sinh nữ và một số học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Biết rằng xác suất để học sinh đó là nam là 0,625. Hỏi lớp bạn An có bao nhiêu học sinh?

Lời giải

Gọi x (học sinh) là số học sinh nam của lớp bạn An ($x \in \mathbb{N}$)

Số các kết quả có thể xảy ra là $n(\Omega) = x + 12$

Gọi A là biến cố "Chọn được học sinh nam"

Số các kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = x$

Ta có $P(A) = 0,625$ hay $\frac{x}{x+12} = 0,625$ hay $x = 20$ (thỏa mãn)

Vậy lớp bạn An có $12 + 20 = 32$ học sinh.

Câu 17. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

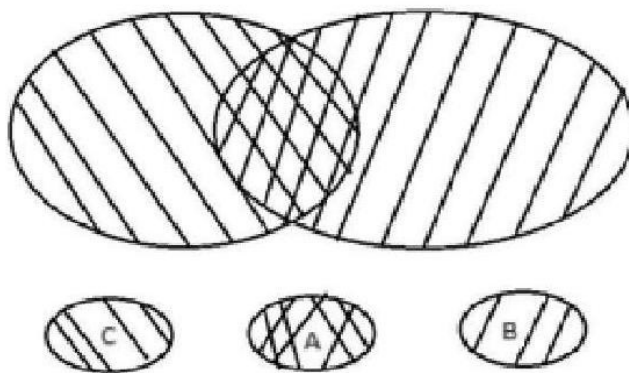
Lớp 9D có 45 học sinh, mỗi bạn đều biết chơi ít nhất một trong hai môn thể thao: đá cầu, bóng đá. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp đó. Xét các biến cố:

A : "Học sinh được chọn biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá"

B : "Học sinh được chọn biết chơi môn đá cầu"

Biết rằng, xác suất của biến cố A bằng $\frac{2}{9}$, xác suất của biến cố B bằng $\frac{2}{3}$. Tính xác suất của biến cố

C : "Học sinh được chọn biết chơi môn bóng đá".

Lời giải

Hình chứa C, B lần lượt là tập các học sinh biết chơi môn đá cầu và bóng đá. Hình chứa A là tập các học sinh biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá. Gọi số phần tử tập của các tập hợp A, B, C lần lượt là n_A, n_B, n_C .

Gọi xác suất của biến cố A, B, C lần lượt là p_A, p_B, p_C . Theo giả thiết thì $p_A = \frac{2}{9}, p_B = \frac{2}{3}$.

Số học sinh biết chơi cả hai môn đá cầu và bóng đá là $n_A = p_A \cdot 45 = \frac{2}{9} \cdot 45 = 10$ học sinh.

Số học sinh biết chơi môn đá cầu là $n_B = p_B \cdot 45 = \frac{2}{3} \cdot 45 = 30$ học sinh.

$\Rightarrow$ Số học sinh biết chơi môn đá bóng là: $n_C = 45 - 30 + 10 = 25$ học sinh.

$\Rightarrow$ Xác suất biến cố C là: $p_C = \frac{n_C}{45} = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$.

Câu 18. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

Gọi M là tập hợp tất cả các số tự nhiên có bốn chữ số được lập từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp M , tính xác suất chọn được số chia hết cho 3.

Lời giải

Số các số có 4 chữ số được lập thành từ 1; 2; 3; 4; 5; 6, tức là số phần tử tập M là $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$.

Biến cố: "Số chọn được là số chia hết cho 3".

Giả sử số cần tìm là: $\overline{abcd}$. Đặt $M = a + b + c$.

Ta chọn bộ số $(a; b; c)$ có $6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^3$ cách.

Nếu $M \equiv 0 \pmod{3}$ thì chọn $d \in \{3, 6\}$.

Nếu $M \equiv 1 \pmod{3}$ thì chọn $d \in \{2, 5\}$.

Nếu $M \equiv 2 \pmod{3}$ thì chọn $d \in \{1, 4\}$.

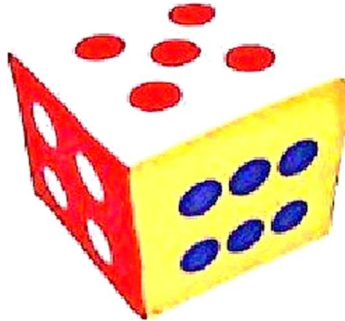
Như vậy khi ta chọn bộ số $(a; b; c)$ bất kỳ thì chỉ có 2 cách chọn d nên số cách chọn bộ số $(a; b; c; d)$ để $\overline{abcd}$ chia hết cho 3 là $2 \cdot 6^3$.

Vậy xác suất để chọn được một số trong tập M và chia hết cho 3 là $\frac{2 \cdot 6^3}{6^4} = \frac{1}{3}$.

Câu 19. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Gieo một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A : "Hiệu số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo có giá trị tuyệt đối bằng 2";
 b) B : "Hiệu số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo có giá trị tuyệt đối là số nguyên tố".

**Lời giải**

Kí hiệu $(i; j)$ là kết quả lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt có i chấm, lần gieo thứ hai xuất hiện mặt có j chấm. Không gian mẫu của phép thử là: $\Omega = \{(i; j) | 1 \leq i \leq 6; 1 \leq j \leq 6\}$.

Do đó $n(\Omega) = 36$.

a) Các kết quả thuận lợi cho biến cố A là: $(1; 3); (3; 1); (2; 4); (4; 2); (3; 5); (5; 3); (4; 6); (6; 4)$.

Khi đó số kết quả thuận lợi cho biến cố A là $n(A) = 8$.

Vậy xác suất của biến cố A là: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

b) Theo đề bài, $|i - j|$ là số nguyên tố nên ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $|i - j| = 2$. Theo ý 1), ta có 8 cặp số thỏa mãn.

Trường hợp 2: $|i - j| = 3$. Ta có 6 cặp số thỏa mãn là $(4; 1); (1; 4); (5; 2); (2; 5); (3; 6); (6; 3)$.

Trường hợp 3: $|i - j| = 5$. Ta có 2 cặp số thỏa mãn là $(6; 1); (1; 6)$.

Do đó số kết quả thuận lợi cho biến cố B là: $n(B) = 8 + 6 + 2 = 16$.

Vậy xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$.

Câu 20. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho hai hộp đựng thẻ: hộp I gồm 5 thẻ được đánh số 1;2;3;4;5; hộp II gồm 5 thẻ được đánh số 6;7;8;9;10 (các thẻ khác nhau được đánh số khác nhau). Rút ngẫu nhiên ở mỗi hộp một thẻ, tính xác suất để tích hai số trên các thẻ rút được là số chẵn.

Lời giải

Vì mỗi số được chọn ở hộp I thì có tương ứng 5 số có thể chọn ở hộp II nên ta có $n(\Omega) = 5.5 = 25$.

Gọi A là biến cố tích hai số trên các thẻ rút được là số chẵn. Nếu tích hai số rút được là số lẻ thì cả hai lần đều phải rút được số lẻ.

Ở hộp I có 3 số lẻ, mỗi số lẻ này có tương ứng 2 số lẻ có thể chọn ở hộp II nên ta có $3.2 = 6$ cách rút ra hai thẻ có tích các số ghi trên đó là số lẻ.

Do đó $n(A) = 25 - 6 = 19$. Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{19}{25}$.