

TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN HÌNH HỌC TRONG CÁC KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2025 – 2026

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Đường thẳng AI cắt đường thẳng BC tại điểm X .

a) Kẻ đường kính DH của đường tròn (I) , tiếp tuyến tại H của đường tròn (I) cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại các điểm P, Q . Gọi M, N tương ứng là các điểm đối xứng với X qua các đường thẳng IC, IB . Chứng minh rằng: MN vuông góc với DH và $QH \cdot BD = PH \cdot CD$.

b) Đường thẳng AI cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại các điểm G, J . Gọi K là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng $QH \cdot BD = IG \cdot IJ$ và tam giác KGJ cân.

c) Biết tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Đường thẳng BI cắt đường thẳng CA tại điểm Y , đường thẳng CI cắt đường thẳng AB tại điểm Z . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} < \frac{2}{R - OI}.$$

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại điểm K (K khác A). Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại điểm S . Giao điểm của hai đường thẳng SO, BC là M . Đường thẳng SK cắt (O) tại điểm L (L khác K). Chứng minh rằng:

a) $SB^2 = SL \cdot SK$.

b) MB là tia phân giác của $\widehat{KML}$ và $\widehat{SKB} = \widehat{MKC}$.

c) Đường thẳng KD đi qua trung điểm của SM .

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BE, CF cắt nhau tại H , AH cắt BC tại D . Gọi M là trung điểm của HC , N là trung điểm của AC , AM cắt HN tại G . Đường thẳng qua M vuông góc với HC và đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K .

a) Chứng minh tứ giác $AFDC$ nội tiếp.

b) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{GA^2 + 2GB^2 + 3GH^2}{GM^2 + 2GK^2 + 3GN^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{GA \cdot GB \cdot GH}{GM \cdot GK \cdot GN}$.

c) Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, AO cắt BC tại P , BO cắt AC tại Q , CO cắt AB tại T . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AP + BQ + CT$ theo R .

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi S là giao điểm của AI và DE .

a) Chứng minh $IECD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K, O lần lượt là trung điểm của AB và BC . Chứng minh K, O, S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC . Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N . Chứng minh $\widehat{HNM} = \widehat{EMN}$.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

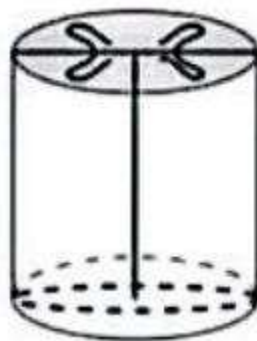
a) Cho tam giác nhọn MAB nội tiếp đường tròn (O) , đường cao MH . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF và cắt AB tại D .

(1). Chứng minh rằng $\widehat{EMD} = \widehat{BHF}$ và ba điểm M, O, D thẳng hàng.

(2). Chứng minh rằng $\frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{AH}{BH} \cdot \frac{AD}{BD}}$.

b) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có các đường cao AD, BE, CF . Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\frac{AB + BC + CA}{AD + BE + CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Bạn Nga dùng một dây vải màu để buộc một gói quà có dạng hình trụ (như hình vẽ). Hình trụ có bán kính đáy 5 cm và diện tích xung quanh $376,8 \text{ cm}^2$. Biết rằng cần 10 cm dây vải dùng để thắt nơ, giao điểm của hai vòng dây vải là tâm các đường tròn đáy của gói quà. Hỏi bạn Nga cần phải chọn dây vải có chiều dài ít nhất là bao nhiêu (lấy $\pi \approx 3,14$)?



Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (với $D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng với H qua D và E ; M là trung điểm của BC . Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại điểm P .

- a) Chứng minh các điểm A, B, C, A_1, B_1 cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh $PE \cdot PF = PM \cdot PD$ và H là trực tâm của tam giác APM .

Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

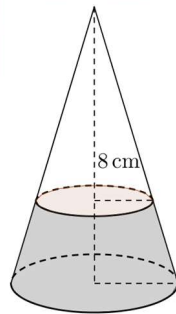
Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC , cắt đường tròn (O) tại A và D . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD , N là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC .

- a) Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{ACD}$.
b) Chứng minh $2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1$.

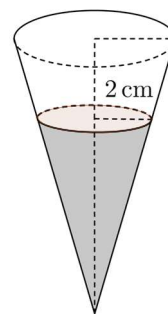
- c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AN tại E . Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO .

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Một cái bình hình nón được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang sao cho đỉnh của nó hướng lên trên. Người ta rót nước vào bình cho đến khi mực nước dâng cao cách đỉnh 8 cm (như hình 1). Sau đó, người ta đảo ngược cái bình lại sao cho đỉnh bình hướng xuống (như hình 2). Khi đó, người ta đo được phần không gian trống của bình có chiều cao 2 cm. Biết rằng lượng nước bên trong bình không thay đổi. Tính chiều cao của cái bình đã cho.



Hình 1



Hình 2

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Trên tia phân giác của góc nhọn xAy lấy điểm O (khác A) và vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các tia Ax, Ay lần lượt tại B, C . Trên các tia Ax, Ay lần lượt lấy các điểm D, E sao cho $AB < AD < AE$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE . Các đoạn thẳng AM, BC cắt nhau tại N . Chứng minh rằng ON vuông góc với DE .

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ (với $R_1 > R_2$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Qua A kẻ đường thẳng cắt $(O_1); (O_2)$ lần lượt tại C, D (đều khác A) sao cho A là trung điểm của đoạn CD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt đường thẳng AB tại điểm E (khác B), đường thẳng EC cắt đường tròn (O_1) tại điểm P (khác C), đường thẳng ED cắt đường tròn (O_2) tại điểm Q (khác D).

- Chứng minh rằng: $\triangle BCP \sim \triangle BDQ$.
- Chứng minh rằng: Ba điểm A, P, Q thẳng hàng.
- Vẽ phân giác trong EI của tam giác EPQ ; vẽ PM, QN lần lượt là phân giác trong của tam giác CPI và tam giác DQI . Chứng minh rằng $MN \parallel CD$.

Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và BC .

- Chứng minh rằng $\triangle MFN$ là tam giác vuông.
- Chứng minh $\triangle FMN \sim \triangle FAC$.
- Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ .

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

- Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF .
- Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.
- Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME . Chứng minh $AM \perp PQ$.
- Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < BC < CA$) có I, J, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Gọi D là giao điểm của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(J; JA)$, với D khác A .

- Chứng minh tứ giác $AIMJ$ là hình bình hành và ba điểm B, D, C thẳng hàng.
- Tiếp tuyến của $(I; IA)$ tại A cắt đường thẳng MJ tại điểm K và cắt $(J; JA)$ tại điểm P , với P khác A . Tiếp tuyến của $(J; JA)$ tại A cắt $(I; IA)$ tại điểm Q , với Q khác A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua D . Chứng minh tứ giác $ADMK$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.
- Gọi S và T lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với hai đường thẳng BC và AD . Chứng minh $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AH và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC , D là giao điểm của OH và (O') (D khác O).

- Chứng minh rằng $OH \cdot OD = OB^2$.
- Chứng minh rằng $\widehat{OAH} = \widehat{ADH}$.
- Gọi E là giao điểm của AD và (O') (E thuộc cung nhỏ OB và khác với O, B). Tính số đo góc $\widehat{AOE}$.

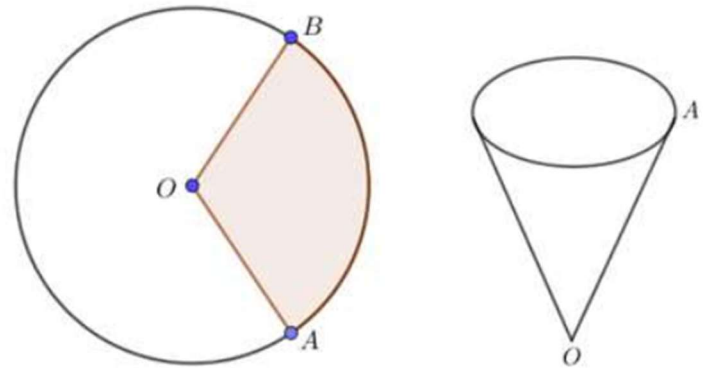
Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C trên đường tròn (O) sao cho $AC > BC$. Kẻ CH vuông góc với AB (H thuộc AB), HE vuông góc với AC (E thuộc AC) và HF vuông góc với BC (F thuộc BC).

- Chứng minh $CEHF$ là hình chữ nhật và OC vuông góc với EF .
- Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (E nằm giữa M và F). Chứng minh $CM^2 = CE \cdot CA$.
- Gọi D là giao điểm của MN và AB , K là giao điểm của CD và đường tròn (O) (K khác C). Chứng minh EKF là tam giác vuông.

Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Từ một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 15\text{cm}$, người ta làm một hình nón bằng cách cắt một phần của hình tròn dạng hình quạt có diện tích bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình tròn. Tính thể tích của hình nón tạo thành (như hình bên.)

**Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)**

Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Xét dây cung CD không đi qua O , không vuông góc với AB và CD cắt AB tại I . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AC và AD .

a) Chứng minh hai tam giác IHK và BCD đồng dạng.

b) Chứng minh $S_{\Delta ACD} > 4S_{\Delta IHK}$.

c) Tiếp tuyến tại điểm A của (O) cắt CD tại T . Hai đường thẳng BC và BD cắt tia TO lần lượt tại E và F , AF cắt (O) tại P , AE cắt (O) tại Q . Chứng minh tứ giác $CDPQ$ là hình chữ nhật.

Câu 18. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao AD, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm T . Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) .

a) Chứng minh ba điểm T, H, K thẳng hàng.

b) Đường thẳng qua B và vuông góc với đường thẳng AM tại điểm E , cắt đường thẳng AD tại điểm G . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC tại hai điểm D và N . Chứng minh đường thẳng NE song song với đường thẳng BF .

c) Kẻ dây cung AX của đường tròn (O) sao cho đường thẳng AX song song với đường thẳng BC . Chứng minh ba đường thẳng MX, TD và AN đồng quy.

Câu 19. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC và $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Xét đường tròn (O) tiếp xúc các cạnh CA, AB theo thứ tự tại R, Q . Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy E, F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho EF tiếp xúc (O) tại P và EF không song song BC . Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác OFB, OEC . Gọi giao điểm của FH, EK với BC lần lượt là M, N .

a) Chứng minh rằng hai tam giác OHM , OKN đồng dạng và $\frac{OK}{OH} = \frac{AE}{AF}$.

b) Dựng điểm G sao cho $OHGK$ là hình bình hành. Chứng minh rằng O, G, P thẳng hàng.

c) Lấy S, T lần lượt đối xứng với Q, R qua BC . Giả sử X là giao điểm của SF và TE , D là giao điểm của BS và CT . Chứng minh rằng AX song song với PD .

Câu 20. (Trường chuyên Tin KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC , cắt đường tròn (O) tại điểm $I (I \neq A)$. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ IC của đường tròn (O) sao cho $MB < MC$. Kẻ dây cung MN của đường tròn (O) sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BC . Tia phân giác của góc ACB cắt hai đường thẳng AM và AN lần lượt tại hai điểm P và Q .

a) Chứng minh $CM \cdot CQ = CP \cdot NQ$.

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MQ với đường thẳng BC . Chứng minh đường thẳng PE song song với đường thẳng AN .

c) Gọi H là điểm đối xứng với điểm P qua đường thẳng BC . Gọi S là giao điểm của đường thẳng MI với đường thẳng BC . Chứng minh đường thẳng SH vuông góc với đường thẳng IQ .

Câu 21. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại D (khác A), đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt đường thẳng BC tại S . Gọi J là điểm đối xứng của I qua O .

a) Chứng minh D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC và SDJ là tam giác vuông.

b) Gọi P là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng OI . Gọi M là trung điểm BC và Q là giao điểm (khác M) của MI với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMS . Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

Câu 22. (Trường chuyên Hải Dương năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O) , các điểm B, C thay đổi trên (O) sao cho B, C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BI cắt AC tại D . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC .

a) Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.

b) Gọi P là giao điểm khác I của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID , đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N . Chứng minh rằng bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC . Chứng minh khi B, C thay đổi trên (O) thì T luôn thuộc một đường cố định.

Câu 23. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, AC, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF , tia DM cắt đường tròn (I) tại điểm H (H khác D)

a) Chứng minh rằng $MD \cdot MH = MI \cdot MA$.

b) Tia AH cắt đường tròn (I) tại điểm P (P khác H) Chứng minh rằng hai đường thẳng DP và EF song song

c) Gọi X là trung điểm của đoạn thẳng BC , đoạn thẳng AX cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm N (N khác A), tia DI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm G (G khác I) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại G , tiếp tuyến tại N của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường thẳng EF đồng quy.

Câu 24. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , ($AB > AC$). Lấy E là điểm chính giữa của cung BC (cung BC không chứa điểm A), đoạn thẳng AE cắt cạnh BC tại D . Gọi F là điểm đối xứng với D qua E . Qua điểm D kẻ đường thẳng d vuông góc với BC . Kẻ FG vuông góc với d (G thuộc d). Gọi H là giao điểm của đường thẳng d với đoạn thẳng OA .

a) Chứng minh: $HA = HD$ và tam giác DHA đồng dạng với tam giác DEG .

b) Chứng minh: $BCGF$ là hình thang cân.

c) Đoạn thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH tại K , đường thẳng HK cắt đường thẳng BC tại M . Chứng minh: MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Câu 25. (Trường chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

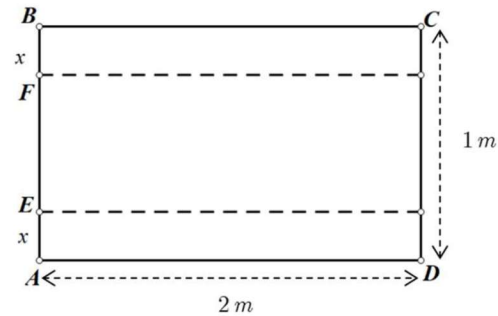
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) , có các đường cao BE, CF . Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và EF , N là giao điểm của AM và EF . Kẻ ND vuông góc với BC tại D .

a) Chứng minh $\widehat{AKE} = \widehat{AMB}$ và A, K, D thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại Q . Chứng minh $QB \cdot DC = QC \cdot DB$.

Câu 26. (Trường chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Anh Hà dự định làm một cái máng nước có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân từ một miếng tôn có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài 2 m và chiều rộng 1 m. Anh Hà gấp máng nước bằng cách gấp đều 2 bên chiều rộng AB của miếng tôn, mỗi bên x (m) lên một góc 60° như hình vẽ. Tìm x để diện tích $EFGH$ lớn nhất?

**Câu 27. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)**

Cho tam giác nhọn ABC , có $AC > AB$. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D , M là trung điểm BC . Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác ADM cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F ($E, F \neq A$). Gọi N là trung điểm EF và J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

- Chứng minh các đẳng thức $BE \cdot BA = BD \cdot BM$; $CF \cdot CA = CM \cdot CD$ và $BE = CF$.
- Gọi B' là điểm đối xứng với B qua N , chứng minh $B'C \parallel AD$ và ba điểm M, A, J thẳng hàng.
- Đường thẳng MN cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai P , đường thẳng DP cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại K và L . Chứng minh P là trung điểm KL .

Câu 28. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I cố định nằm trên đường tròn $(O; R)$. Gọi A, B là các giao điểm của hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; R)$. P là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I; R)$. Đường thẳng qua P và vuông góc với IP cắt đường tròn $(O; R)$ tại M, N . Kẻ PH vuông góc với IM tại H , PK vuông góc với IN tại K .

- Chứng minh rằng bốn điểm I, H, P, K cùng thuộc một đường tròn và HK vuông góc với OI .
- Khi P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I; R)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IHK .

Câu 29. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

Cho A, B là hai điểm cố định trên đường tròn $(O; R)$, C là điểm chính giữa cung AB và M là điểm di động trên dây cung AB ($M \neq A, M \neq B$). Tia CM cắt $(O; R)$ tại D ($D \neq C$).

- Chứng minh $AC^2 = CM \cdot CD$ và AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM .
- Cho $R = 5$ cm, $AB = 6$ cm, tính $R_1 + R_2$, với R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và tam giác BDM .

Câu 30. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB không là đường kính. Gọi C là điểm chính giữa của cung lớn AB . Các tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại M . Gọi D là hình chiếu vuông góc của B trên AC và E là trung điểm của BD . Tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F . Gọi G là giao điểm của MC với AB .

- Chứng minh rằng, bốn điểm B, E, F, G cùng nằm trên một đường tròn.
- Tia MF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai M . Chứng minh rằng, AH là đường kính của đường tròn (O) .
- Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MG . Chứng minh rằng ba điểm B, F, I thẳng hàng.

Câu 31. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC , BO với AC , CO với AB . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $BCEF$ nội tiếp.
- $DH \cdot DA = DF \cdot DE$.
- $AM + BN + CP \geq \frac{9R}{2}$.

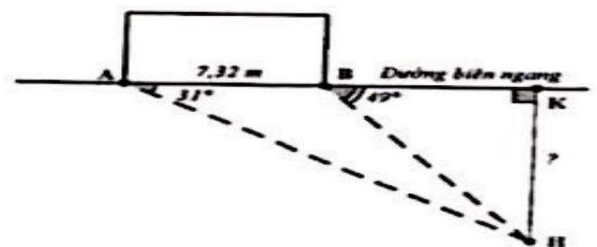
Câu 32. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi P là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC , I là giao điểm của đoạn thẳng PA với đường tròn (O) ($I \neq A$).

- Chứng minh các điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.
- Đường thẳng qua D song song với EF cắt các đường thẳng AB, CF lần lượt tại Q, S . Chứng minh D là trung điểm của QS .

Câu 33. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Cầu thủ Quang Hải đứng ở vị trí H , đá phạt vào khung thành đội Thái Lan trong trận tứ kết lượt đi AFF Cup năm 2021. Biết $\widehat{HAK} = 31^\circ$, $\widehat{HBK} = 49^\circ$ và chiều rộng khung thành $AB = 7,32$ m. Hãy tính khoảng cách HK từ vị trí của Quang Hải định đá phạt đến đường biên ngang cuối sân (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Câu 34. (Trường chuyên Long An năm 2025 – 2026)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$.

a) Chứng minh $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle MBC$.

b) Chứng minh $AB \cdot CD = BD \cdot AM$.

c) Chứng minh $AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC$.

Câu 35. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O) , đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N, K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P . Chứng minh rằng:

a) HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH} = \widehat{HDE}, \widehat{FDK} = \widehat{NDE}$.

b) Ba điểm P, E, F thẳng hàng.

c) $PE \cdot PF$.

Câu 36. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại N .

a) Chứng minh tứ giác $BKNF$ nội tiếp và $\widehat{AKD} = \widehat{AHN}$.

b) Đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng BE tại M . Gọi Q là giao điểm của BC và HK , đường thẳng EF cắt QM tại P . Chứng minh $\triangle BPC$ vuông.

c) Giả sử A, C và đường tròn (O) cố định, $AC < R\sqrt{3}$, điểm B di động trên cung lớn AC . Xác định vị trí của điểm B để tổng chu vi của các tam giác $\triangle AEF, \triangle BFD, \triangle CED$ lớn nhất.

Câu 37. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025 – 2026)

Cho hình thang $ABCD$, vuông tại A và D , $AD = CD = \frac{1}{2}AB$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của AB và CD và E, F là trung điểm các đoạn AO_1 và DO_2 . Trên đoạn thẳng EF lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CND} = 90^\circ$.

a) Chứng minh tứ giác $ABCM$ nội tiếp.

b) Gọi S là giao điểm của AD và BC . Chứng minh các đường thẳng BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S .

c) Chứng minh bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Câu 38. (Trường chuyên Phú Thọ năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng (d) cố định, d và (O) không có điểm chung. Điểm M di động trên (d) . Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm), đoạn thẳng MO cắt AB tại H . Đường thẳng a đi qua M cắt (O) tại C, D ($MC < MD$).

- Chứng minh $MH \cdot MO = MC \cdot MD$.
- Chứng minh điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M di động trên (d) .
- Vẽ đường thẳng b khác a đi qua M , cắt (O) tại E, F ($ME < MF$). Chứng minh rằng DE, CF, AB đồng quy.

Câu 39. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có độ dài $BC = a$. Điểm D di động trên tia đối của tia AC sao cho $0^\circ < ABD < 45^\circ$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng BC , H là giao điểm của hai đường thẳng DE và AB , F là giao điểm của hai đường thẳng CH và DB .

- Chứng minh rằng $HF \cdot HC = HE \cdot HD$.
- Xác định vị trí của điểm D trên tia đối của tia AC sao cho $HF \cdot HC$ có giá trị lớn nhất.

Câu 40. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho đoạn thẳng AB có độ dài $AB = 2a$, O là trung điểm của AB . Trên nửa đường tròn $(O; OA)$ lấy hai điểm C, D sao cho $COD = 60^\circ$ và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). Đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại E , hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F .

- Chứng minh rằng $AE \cdot AD + BE \cdot BC = 4a^2$.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD cắt đoạn thẳng EF và đoạn thẳng AB lần lượt tại I và H (H khác O). Chứng minh rằng ba điểm F, I, H thẳng hàng.
- Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD . Chứng minh rằng FK là phân giác của góc AFB .

Câu 41. (Trường chuyên Quảng Bình năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và hai điểm A, B cố định trên đường tròn đó ($AB \neq 2R$). Một điểm C di động trên $(O; R)$ sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , Gọi I là trung điểm của HC . Chứng minh rằng:

- $CDHE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn và OC vuông góc với DE .
- ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BED .
- Đoạn thẳng DE có độ dài không đổi.

Câu 42. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho tứ giác $ABCD$ có hai cặp cạnh đối không song song và tứ giác đó nội tiếp đường tròn (O) có đường kính AB . Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD , F là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I . Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB và cắt đường thẳng AB tại H .

- Chứng minh tứ giác $BCIH$ nội tiếp một đường tròn.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF tại điểm thứ hai là M . Chứng minh ba điểm E, M, F thẳng hàng.
- Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng CH và BI . Chứng minh $BN \cdot DN = IN(BD + BN)$.

Câu 43. (Trường chuyên Toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho hình bình hành $ABCD$ có góc BAD là góc tù, $AB < AD$ và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho $CK < AB$. Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho $AL = CK$. Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A).

- Chứng minh $AB \cdot NL = AK \cdot NM$.
- Chứng minh $\widehat{CNL} = 90^\circ$.
- Gọi I là giao điểm của BD và KL , chứng minh $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BD}{BI}$.

Câu 44. (Trường chuyên Toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng 90° . Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng 90° .

- Chứng minh tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn và $BE^2 = BA \cdot BF$.
- Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF , đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P . Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD .

Câu 45. (Trường chuyên Toán Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) , đường kính BC (điểm O là tâm của đường tròn). Điểm A thay đổi thuộc đường tròn (O) sao cho $AB \perp AC$ và A khác B . Điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC . Điểm D là điểm đối xứng với H qua C , điểm E là điểm đối xứng với H qua A . Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt các đường thẳng EB, ED lần lượt tại M và N .

- Chứng minh A là trực tâm tam giác BED .
- Chứng minh M thuộc đường tròn (O) .
- Khi điểm A thay đổi và thỏa mãn các giả thiết của bài toán, tìm vị trí điểm A để $AM \cdot AN$ lớn nhất.

Câu 46. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)

Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có các tia AB và DC cắt nhau tại F , các tia AD và BC cắt nhau tại E .

1) Chứng minh rằng $\frac{BD}{AC} = \frac{ED}{EC} = \frac{FB}{FC}$.

2) Đường phân giác của góc AEB cắt các cạnh AB và CD tương ứng tại M và P , đường phân giác của góc AFD cắt các cạnh CB và DA tương ứng tại N và Q .

i) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì, tại sao?

ii) Chứng minh rằng giao điểm của MP và NQ nằm trên đoạn thẳng nối các trung điểm của hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

Câu 47. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

Từ một điểm S bên ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến SA của đường tròn (A là tiếp điểm). Vẽ đường thẳng đi qua S cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C sao cho điểm O nằm trong góc ASC và B nằm giữa S, C . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn điểm S, A, O, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D . Chứng minh $SA = SD$.

c) Tia AD cắt đường tròn (O) tại P khác A . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM . Chứng minh OI song song AP .

Câu 48. (Trường chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AO , điểm E thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Các tia Ax và By lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm E có bờ là đường thẳng AB). Qua điểm E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI cắt Ax, By lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $AE \cdot IN = BE \cdot IM$.

c) Gọi P là giao điểm của AE và MI ; Q là giao điểm của BE và NI . Chứng minh hai đường thẳng PO và AM vuông góc.

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O) . Giả sử ba điểm E, I, F thẳng hàng. Tính diện tích tam giác MON theo R .

Câu 49. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

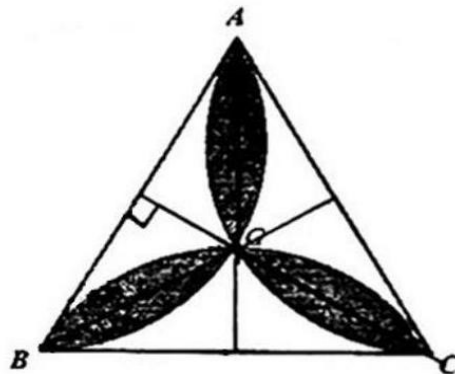
a) Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ các đường cao AD, BE, CF (D, E, F là chân các đường cao) cắt nhau tại điểm H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q (F nằm giữa P và E), đường thẳng EF cắt BC tại điểm M .

(1). Chứng minh: $MP \cdot MQ = ME \cdot MF$.

(2). Gọi N là điểm đối xứng của O qua đường thẳng BC . Chứng minh: N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

(3). Đường thẳng đi qua H , song song với AB và cắt AC tại điểm X . Đường thẳng đi qua H , song song với AC và cắt AB tại điểm Y . Chứng minh: Đường trung trực của đoạn thẳng XY đi qua điểm O .

b) Một Logo như hình vẽ bên. Phần tô đậm là giao của các cặp hình tròn ngoại tiếp các tam giác: $\triangle ABG, \triangle ACG$ và $\triangle BCG$. Tính diện tích phần tô đậm (theo đơn vị cm^2), biết rằng tam giác ABC đều có cạnh bằng 20 cm, G là trọng tâm của tam giác ABC (lấy $\pi = 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

**Câu 50. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)**

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC . Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Hai đường thẳng OM và BC cắt nhau tại N .

a) Chứng minh rằng, $\angle ABO = \angle BHN$

b) Đường thẳng OM cắt đường tròn (O) tại D và S (D nằm giữa O và M). Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN . Chứng minh rằng, hai đường thẳng OI và AS vuông góc với nhau.

c) Hai đường thẳng AM và BC cắt nhau tại E . Hai đường thẳng AN và HQ cắt nhau tại G . Chứng minh rằng, hai đường thẳng GE và OM song song với nhau.

Câu 51. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm di động trên đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

- a) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh H của tam giác BHC cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N . Chứng minh tam giác AMN cân.
- b) Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC . Gọi S là giao điểm thứ hai khác A của đường thẳng AH và đường tròn (O) . Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X (khác S). Chứng minh đường thẳng BX đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF .
- c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc BAC tại K . Chứng minh điểm K thuộc một đường tròn cố định.

Câu 52. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AH và đường phân giác trong AD (H, D thuộc cạnh BC). Kẻ DM vuông góc với AB tại M , kẻ DN vuông góc với AC tại N . Gọi P là trực tâm của tam giác ABD , Q là giao điểm của BP và AD . Chứng minh rằng:

- a) Năm điểm A, M, H, D, N cùng thuộc một đường tròn.
- b) $\frac{BH}{BM} = \frac{CH}{CN}$.
- c) $\frac{AQ}{QD} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BH}{DH}$.
- d) Ba điểm H, Q, N thẳng hàng.

Câu 53. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp (O) . Kẻ đường kính AD của (O) ; AD cắt BC ở E ; đường cao AH của tam giác ABC cắt (O) ở F khác A . Gọi K là hình chiếu của D trên BC ; FK cắt (O) ở I khác F .

- a) Chứng minh rằng $FH = DK$.
- b) Gọi J là giao điểm của AK và EI . Chứng minh rằng $JE \cdot JI = JA \cdot JK$.
- c) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở S . Chứng minh rằng SD, EI và (O) cùng đi qua một điểm.

Câu 54. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác A). Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ điểm E đến đường thẳng AB .

- (1) Chứng minh bốn điểm E, D, B, K cùng thuộc một đường tròn.
- (2) Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm S . Chứng minh EA là tia phân giác của góc CEK và $AB \cdot AC = AE \cdot AS$.
- (3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh đường thẳng SI vuông góc với đường thẳng HK .

HƯỚNG DẪN GIẢI

Lưu ý: Các kiến thức về tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180 độ thì tứ giác nội tiếp, ... (không có trong SGK mới) học sinh tự bổ sung phần chứng minh trong nội dung bài thi.

Câu 1. (Trường chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB < AC$. Đường tròn (I) nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Đường thẳng AI cắt đường thẳng BC tại điểm X .

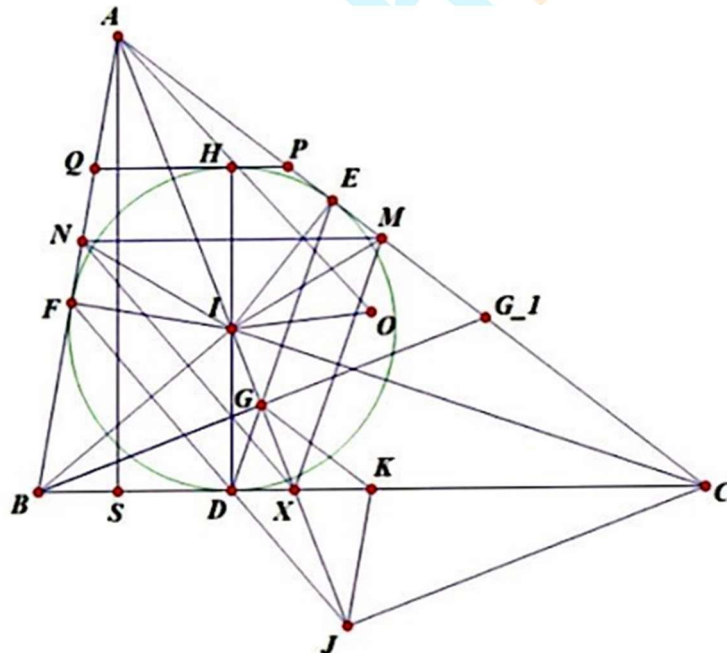
a) Kẻ đường kính DH của đường tròn (I) , tiếp tuyến tại H của đường tròn (I) cắt các cạnh AC, AB lần lượt tại các điểm P, Q . Gọi M, N tương ứng là các điểm đối xứng với X qua các đường thẳng IC, IB . Chứng minh rằng: MN vuông góc với DH và $QH \cdot BD = PH \cdot CD$.

b) Đường thẳng AI cắt các đường thẳng DE, DF lần lượt tại các điểm G, J . Gọi K là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng $QH \cdot BD = IG \cdot IJ$ và tam giác KGJ cân.

c) Biết tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Đường thẳng BI cắt đường thẳng CA tại điểm Y , đường thẳng CI cắt đường thẳng AB tại điểm Z . Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} < \frac{2}{R - OI}.$$

Lời giải



a) Dễ thấy M thuộc AC , N thuộc AB và $IM = IN = IX$. Ta biến đổi góc:

$$\begin{aligned} \widehat{HIN} &= 180^\circ - \widehat{NID} = 180^\circ - (\widehat{NIX} - \widehat{XID}) = 180^\circ - (2\widehat{XIB} - \widehat{XID}) \\ &= 180^\circ - 2\widehat{BID} - \widehat{XID} = \widehat{ABC} - \widehat{XID}; \end{aligned}$$

$$\widehat{HIM} = 180^\circ - \widehat{MID} = 180^\circ - (\widehat{MIX} + \widehat{XID}) = 180^\circ - (2\widehat{CIX} + \widehat{XID}).$$

$$\text{Để ý rằng } \widehat{CIX} = 180^\circ - \widehat{AIC} = 180^\circ - \frac{90^\circ + \widehat{ABC}}{2} = 90^\circ - \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{BID}.$$

Kết hợp hai đẳng thức trên ta có $\widehat{HIN} = \widehat{HIM}$. Lại do $IN = IM$ nên $\triangle IHN \sim \triangle IHM$, do đó $HN = HM$ nên IH là trung trực của MN , suy ra $IH \perp MN$.

$$\text{Ta có các kết quả quen thuộc } CD = CE = \frac{AC + BC - AB}{2}; BD = BF = \frac{AB + BC - AC}{2};$$

$$PH = PE = \frac{AQ + PQ - AP}{2}; QH = QF = \frac{AP + PQ - AQ}{2}.$$

$$\text{Do } PQ \perp DH \text{ nên } PQ \parallel BC \text{ suy ra } \frac{AP}{AC} = \frac{AQ}{AB} = \frac{PQ}{BC} = \frac{AP - AQ + PQ}{AC - AB + BC} = \frac{AQ - AP + PQ}{AB - AC + BC}.$$

$$\text{Từ đây có được } \frac{QH}{CD} = \frac{PH}{BD} \text{ nên } QH \cdot BD = PH \cdot CD.$$

b) Ta có: $\widehat{IGE} = \widehat{IXM} = 90^\circ - \widehat{CIX} = \frac{\widehat{ABC}}{2} = \widehat{IBD}$ nên tứ giác $BIGD$ nội tiếp. Tương tự có tứ giác $CIDJ$ nội tiếp. Do đó $\widehat{IDG} = \widehat{ICD} = \widehat{IJD}$.

$$\text{Suy ra } \triangle IGD \sim \triangle IDJ \text{ nên } IG \cdot IJ = ID^2.$$

$$\text{Lại có: } QH \cdot BD = QF \cdot BF = IF^2 = ID^2 \text{ nên } QH \cdot BD = IG \cdot IJ.$$

Do tứ giác $BIGD$ nội tiếp nên $\widehat{BGI} = \widehat{BDI} = 90^\circ$, kéo dài BG cắt AC tại G_1 thì $\triangle ABG_1$ cân tại A nên G là trung điểm BG_1 , kéo theo KG là đường trung bình của $\triangle BG_1C$ nên $KG \parallel CG_1$, suy ra

$$\widehat{KGX} = \widehat{CAX} = \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Tương tự cũng có $KJ \parallel AB$ nên $\widehat{KJG} = \widehat{XAB} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$. Do đó $\widehat{KGJ} = \widehat{KJG}$ nên $\triangle KJG$ cân tại K .

c) Kẻ $AS \perp BC$ tại S . Khi đó $\frac{XI}{XA} = \frac{ID}{AS} = \frac{S_{BIC}}{S_{ABC}}$. (Hình vẽ chưa có điểm Y, Z)

Tương tự $\frac{YI}{YB} = \frac{S_{AIC}}{S_{ABC}}, \frac{ZI}{ZC} = \frac{S_{AIB}}{S_{ABC}}$ lại do I nằm trong tam giác BAC nên

$$\frac{XI}{XA} + \frac{YI}{YB} + \frac{ZI}{ZC} = \frac{S_{AIB} + S_{BIC} + S_{CIA}}{S_{ABC}} = 1.$$

Từ đó suy ra $2 = \frac{AI}{AX} + \frac{BI}{BY} + \frac{CI}{CZ} \geq \frac{AO - OI}{AX} + \frac{BO - OI}{BY} + \frac{CO - OI}{CZ}$

Hay $\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} \leq \frac{2}{R - OI}$ (do $R > OI$).

Dấu “=” xảy ra khi $AO - OI = AI$, $BO - OI = BI$, $CO - OI = CI$.

Điều này xảy ra khi tam giác BAC đều (trái với giả thiết $AB < AC$).

Như vậy phải có

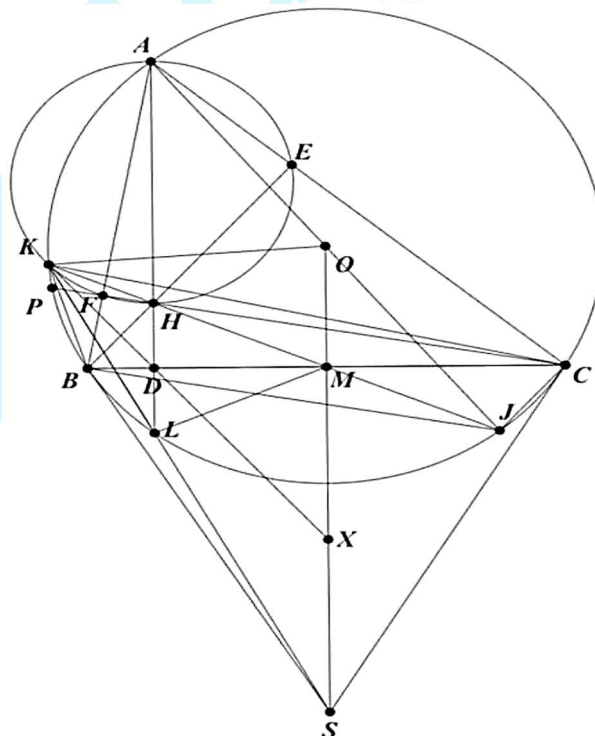
$$\frac{1}{AX} + \frac{1}{BY} + \frac{1}{CZ} < \frac{2}{R - OI}$$

Câu 2. (Trường chuyên tỉnh Bà Rịa Vũng Tàu năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) , các đường cao AD, BE, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Đường tròn đường kính AH cắt (O) tại điểm K (K khác A). Các tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại điểm S . Giao điểm của hai đường thẳng SO, BC là M . Đường thẳng SK cắt (O) tại điểm L (L khác K). Chứng minh rằng:

- $SB^2 = SL \cdot SK$.
- MB là tia phân giác của $\widehat{KML}$ và $\widehat{SKB} = \widehat{MKC}$.
- Đường thẳng KD đi qua trung điểm của SM .

Lời giải



a) Dễ thấy $\triangle SBL$ và $\triangle SKB$ đồng dạng (g - g) nên $\frac{SB}{SL} = \frac{SK}{SB} \Rightarrow SB^2 = SL \cdot SK$.

b) Vì $SB = SC$ nên SO là trung trực của BC , suy ra $SO \perp BC$.

Từ câu a, ta có $SB^2 = SM \cdot SO$, nên $SM \cdot SO = SK \cdot SL$, suy ra $\triangle SML \sim \triangle SKO$. Do đó $\widehat{SML} = \widehat{SKO}$, suy ra tứ giác $LKOM$ nội tiếp.

Mặt khác, $OK = OL$ (do K, L cùng thuộc (O)) nên O là điểm chính giữa cung KL của đường tròn ngoại tiếp $LKOM$. Suy ra MO là phân giác ngoài của $\widehat{KML}$. Mà $MB \perp MO$ nên MB là phân giác trong của $\widehat{KML}$.

Xét đường kính AJ của đường tròn (O) . Vì BH, CJ cùng vuông góc AC nên $BH \parallel CJ$, tương tự $CH \parallel BJ$, suy ra $BHCJ$ là hình bình hành. Vậy H, M, J thẳng hàng.

Mặt khác, K, H, J thẳng hàng (do $\widehat{AKH} = \widehat{AKJ} = 90^\circ$) nên K, H, M, J thẳng hàng.

Kéo dài CF cắt (O) tại P thì $\widehat{FAP} = \widehat{BAP} = \widehat{BCP} = \widehat{BCF} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{BAD} = \widehat{FAH}$ nên $FP = FH$.

Mặt khác, $HC \cdot HP = HK \cdot HJ$ (do $KPJC$ là tứ giác nội tiếp) nên

$$HC \cdot HF = \frac{1}{2} HC \cdot HP = \frac{1}{2} HK \cdot HJ = HM \cdot HK.$$

Do đó, $KCMF$ là tứ giác nội tiếp.

Lại có $MF = \frac{BC}{2} = MC$ (do M là trung điểm BC , $\triangle BFC$ vuông tại F) nên M là điểm chính giữa cung FC của đường tròn ngoại tiếp $KCMF$. Suy ra $\widehat{MKF} = \widehat{MKC}$.

Nhận xét rằng:

$$\widehat{MEF} = \widehat{MEB} + \widehat{BEF} = \widehat{MBE} + \widehat{HAF} = 90^\circ - \widehat{ACB} + 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{FAE}.$$

nên ME là tiếp tuyến của (KFE) . Tương tự MF là tiếp tuyến của (KFE) .

Dễ thấy $\triangle KBC \sim \triangle KFE$, S và M có vai trò đối với (KBC) và (KFE) giống nhau nên

$$\widehat{SKB} = \widehat{MKF} = \widehat{MKC} \text{ (đpcm).}$$

c) Gọi KD cắt SM tại X .

Theo câu (b), ta có:

$$\widehat{LAB} = \widehat{LKB} = \widehat{SKB} = \widehat{MKC} = \widehat{JKC} = \widehat{JAC} = \widehat{OAC} = 90^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{DAB}.$$

Suy ra A, D, L thẳng hàng.

Tương tự, ta cũng có $DL = DH$. Theo định lý Thales: $\frac{XM}{DH} = \frac{KX}{KD} = \frac{SX}{DL} \Rightarrow XM = XS$.

Do đó, X là trung điểm của SM (đpcm).

Câu 3. (Trường chuyên tỉnh Bạc Liêu năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao BE, CF cắt nhau tại H , AH cắt BC tại D . Gọi M là trung điểm của HC , N là trung điểm của AC , AM cắt HN tại G . Đường thẳng qua M vuông góc với HC và đường thẳng qua N vuông góc với AC cắt nhau tại K .

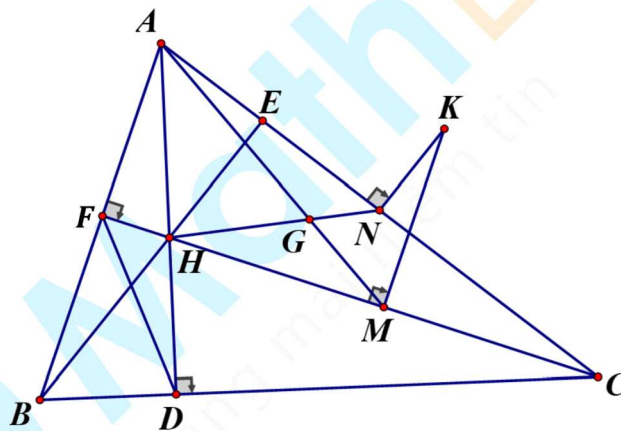
a) Chứng minh tứ giác $AFDC$ nội tiếp.

b) Tính giá trị của biểu thức $T = \frac{GA^2 + 2GB^2 + 3GH^2}{GM^2 + 2GK^2 + 3GN^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{GA \cdot GB \cdot GH}{GM \cdot GK \cdot GN}$.

c) Giả sử tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$, AO cắt BC tại P , BO cắt AC tại Q , CO cắt AB tại T . Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AP + BQ + CT$ theo R .

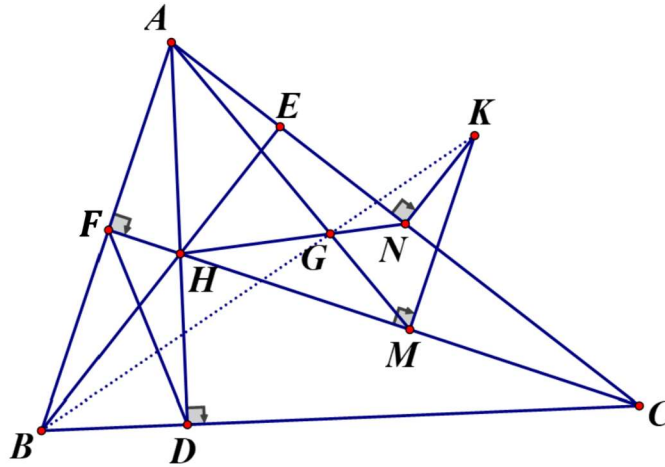
Lời giải

a)



Học sinh chứng minh tứ giác $AFDC$ nội tiếp đường tròn đường kính AC .

b)



Ta có: $GA = 2GM$, $GB = 2GK$, $GH = 2GN$.

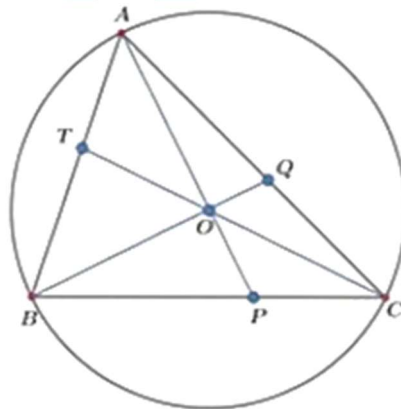
Khi đó:

$$T = \frac{(2GM)^2 + 2 \cdot (2GK)^2 + 3 \cdot (2GN)^2}{GM^2 + 2GK^2 + 3GN^2} + \frac{3}{4} \cdot 2^3 \cdot \frac{GM \cdot GK \cdot GN}{GM \cdot GK \cdot GN}$$

$$T = \frac{4(GM^2 + 2GK^2 + 3GN^2)}{GM^2 + 2GK^2 + 3GN^2} + \frac{3}{4} \cdot 2^3$$

$$T = 4 + \frac{3}{4} \cdot 2^3 = 10$$

c)



Ta có: $P = AP + BQ + CT = AO + OP + BO + OQ + CO + OT = 3R + OP + OQ + OT$.

Để P nhỏ nhất thì $OP + OQ + OT$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có: } \frac{OT}{R} = \frac{OT}{OC} = \frac{S_{QOT}}{S_{AOC}} = \frac{S_{BOT}}{S_{BOC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}}.$$

Chứng minh tương tự: $\frac{OP}{R} = \frac{OP}{OA} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC} + S_{AOB}}; \frac{OQ}{R} = \frac{OQ}{OB} = \frac{S_{AOC}}{S_{AOB} + S_{BOC}}.$

Áp dụng bất đẳng thức Nesbitt:

Với $a, b, c > 0$ ta có $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$

Dấu “=” xảy ra khi $a=b=c.$

Ta có: $\frac{OP}{R} + \frac{OQ}{R} + \frac{OT}{R} = \frac{S_{BOC}}{S_{AOC} + S_{AOB}} + \frac{S_{AOC}}{S_{AOB} + S_{BOC}} + \frac{S_{AOB}}{S_{AOC} + S_{BOC}} \geq \frac{3}{2}.$

Do đó: $OP + OQ + OT \geq \frac{3}{2}R.$

Dấu “=” xảy ra khi $S_{BOC} = S_{AOC} = S_{AOB}$ hay tam giác ABC đều.

Vậy $P \geq 3R + \frac{3}{2}R = \frac{9}{2}R.$

Câu 4. (Trường chuyên tỉnh Bắc Kạn năm 2025 – 2026)

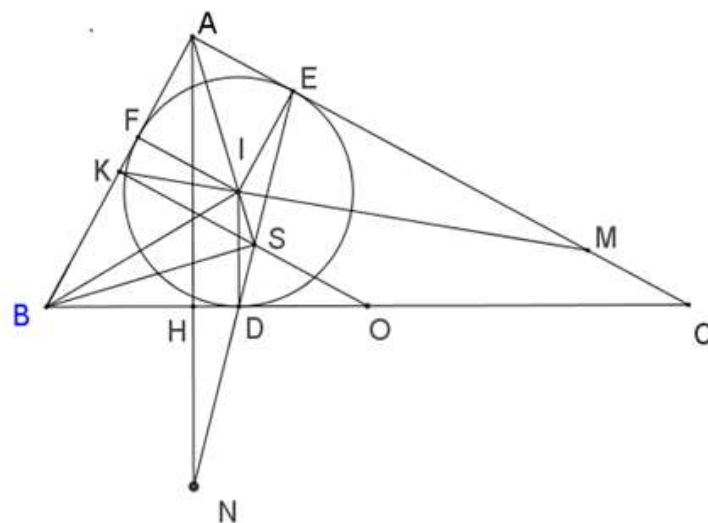
Cho tam giác ABC vuông ở A ($AB < AC$). Đường tròn tâm I nội tiếp tam giác ABC , tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F . Gọi S là giao điểm của AI và DE .

a) Chứng minh $IECD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi K, O lần lượt là trung điểm của AB và BC . Chứng minh K, O, S thẳng hàng.

c) Gọi M là giao điểm của KI và AC . Đường thẳng chứa đường cao AH của tam giác ABC cắt đường thẳng DE tại N . Chứng minh $\widehat{HNM} = \widehat{EMN}.$

Lời giải



a) Học sinh chứng minh tứ giác $IECD$ nội tiếp đường tròn đường kính IC .

$$\text{b) Ta có: } \widehat{AES} = 180^\circ - \widehat{DEC} = 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{ECD}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{ECD}}{2}.$$

$$\text{Mặt khác: } \widehat{AIB} = 180^\circ - \widehat{IAB} - \widehat{IBA} = 180^\circ - \frac{\widehat{CAB} + \widehat{ABC}}{2} = 90^\circ + \frac{\widehat{ECD}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } \widehat{AES} = \widehat{AIB}.$$

Xét tam giác IAB và tam giác EAS có $\widehat{IAB} = \widehat{SAE} = 45^\circ$ và $\widehat{AES} = \widehat{AIB}$.

$$\Rightarrow \triangle IAB \sim \triangle EAS \Rightarrow \frac{IA}{AB} = \frac{EA}{AS}.$$

Mà $\widehat{IAB} = \widehat{SAE} \Rightarrow \triangle IAE \sim \triangle BAS$. Vì tam giác IAE vuông cân tại E nên tam giác ABS vuông cân tại S , suy ra S nằm trên đường trung trực của AB suy ra K, O, S thẳng hàng.

$$\text{c) Vì } ID \parallel AN \Rightarrow \frac{ID}{AN} = \frac{SI}{SA};$$

$$KS \parallel AM \Rightarrow \frac{IK}{KM} = \frac{SI}{SA};$$

$$IF \parallel AM \Rightarrow \frac{IK}{KM} = \frac{FI}{AM} \Rightarrow \frac{ID}{AN} = \frac{FI}{AM} \text{ mà } ID = FI \Rightarrow AM = AN.$$

Suy ra tam giác AMN cân.

Vậy $\widehat{HNM} = \widehat{EMN}$. Điều phải chứng minh.

Câu 5. (Trường chuyên tỉnh Bắc Ninh năm 2025 – 2026)

a) Cho tam giác nhọn MAB nội tiếp đường tròn (O) , đường cao MH . Gọi E và F lần lượt là hình chiếu vuông góc của H trên MA, MB . Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với EF và cắt AB tại D .

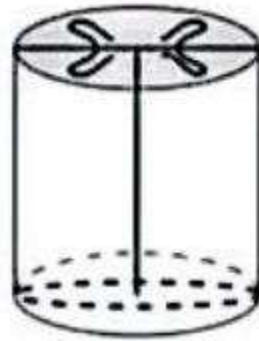
(1). Chứng minh rằng $\widehat{EMD} = \widehat{BHF}$ và ba điểm M, O, D thẳng hàng.

$$(2). \text{ Chứng minh rằng } \frac{MA}{MB} = \sqrt{\frac{AH}{BH} \cdot \frac{AD}{BD}}.$$

b) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và có các đường cao AD, BE, CF . Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\frac{AB+BC+CA}{AD+BE+CF}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

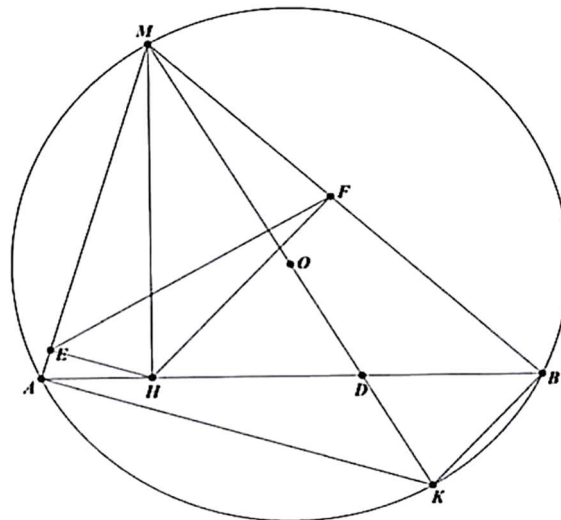
c) Bạn Nga dùng một dây vải màu để buộc một gói quà có dạng hình trụ (như hình vẽ). Hình trụ có bán kính đáy 5 cm và diện tích xung quanh $376,8 \text{ cm}^2$. Biết rằng cần 10 cm dây vải dùng để thắt

nor, giao điểm của hai vòng dây vải là tâm các đường tròn đáy của gói quà. Hỏi bạn Nga cần phải chọn dây vải có chiều dài ít nhất là bao nhiêu (lấy $\pi \approx 3,14$)?



Lời giải

a)



(1). Ta thấy $ME \cdot MA = MH^2 = MF \cdot MB$ nên $\triangle MEF \sim \triangle MBA$ suy ra $\widehat{MEF} = \widehat{MBA}$.

Do $MD \perp EF$ nên $\widehat{EMD} = 90^\circ - \widehat{MEF}$ vì vậy $\widehat{EMD} = 90^\circ - \widehat{MBA}$.

Mà $HF \perp MB$ nên $\widehat{BHF} = 90^\circ - \widehat{MBA}$ suy ra $\widehat{EMD} = \widehat{BHF}$.

O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MAB$ nên $\widehat{OMA} = 90^\circ - \widehat{MBA} = 90^\circ - \widehat{MEF}$ suy ra $MO \perp EF$ do đó M, O, D thẳng hàng.

(2). Kẻ đường kính MK của (O) . Ta có $\triangle MAK \sim \triangle MHB$ và $\triangle MBK \sim \triangle MHA$ nên $\frac{AK}{HB} = \frac{MA}{MH}$ và

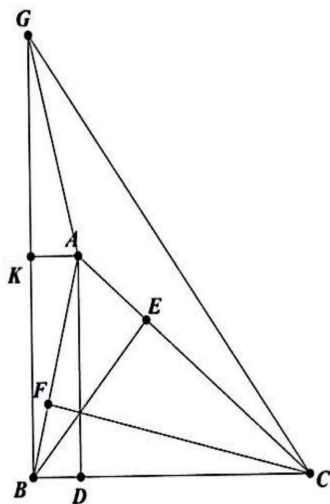
$$\frac{BK}{AH} = \frac{MB}{MH} \text{ vì vậy } \frac{KA}{KB} = \frac{HB}{HA} \cdot \frac{MA}{MB} (*).$$

Ta có $\triangle KDA \sim \triangle BDM$ và $\triangle KDB \sim \triangle ADM$ nên $\frac{DA}{DM} = \frac{KA}{BM}$ và $\frac{DB}{DM} = \frac{KB}{AM}$.

$$\text{Suy ra } \frac{DA}{DB} = \frac{KA}{KB} \cdot \frac{MA}{MB} (**).$$

Từ (*) và (**) ta được $\frac{DA}{DB} \cdot \frac{HA}{HB} = \frac{MA^2}{MB^2}$, từ đây ta có đpcm.

b)



Đường thẳng qua B vuông góc với BC cắt đường tròn $(A; AB)$ tại G khác B .

Gọi K là trung điểm BG thì $AK \perp BK$. Mà $BK \perp BD$ và $BD \perp DA$ suy ra tứ giác $ADBK$ là hình chữ nhật do đó $AD = BK = \frac{1}{2}BG$ nên $BG = 2AD$.

Lại có $BG^2 + BC^2 = CG^2 \leq (AG + AC)^2 = (AB + AC)^2$ suy ra $4AD^2 = BG^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$.

Dấu bằng xảy khi A, C, G thẳng hàng hay $AB = AC$.

Tương tự $4BE^2 = (BA + BC)^2 - AC^2, 4CF^2 \leq (CA + CB)^2 - AB^2$ suy ra

$$4(AD^2 + BE^2 + CF^2) \leq (AB + AC)^2 + (BA + BC)^2 + (CA + CB)^2 - AB^2 - BC^2 - CA^2 = (AB + BC + CA)^2$$

Kết hợp với $\frac{(AD + BE + CF)^2}{3} \leq (AD^2 + BE^2 + CF^2)$ ta được

$$\frac{4}{3}(AD + BE + CF)^2 \leq (AB + BC + CA)^2$$

$$\frac{AB + BC + CA}{AD + BE + CF} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Dấu bằng xảy ra khi tam giác ABC đều.

c) Gọi r là bán kính đáy và h là chiều cao của gói quà hình trụ.

Từ công thức tính diện tích xung quanh $S_{xq} = 2\pi rh$, ta suy ra chiều cao của gói quà:

$$h = \frac{S_{xq}}{2\pi r} = \frac{376,8}{2 \times 3,14 \times 5} = 12 \text{ (cm)}.$$

Dây vải buộc quanh gói quà gồm 4 đoạn bằng chiều cao (h) và 8 đoạn bằng bán kính đáy (r). Chiều dài phần dây vải dùng để buộc là: $4h + 8r = 4 \times 12 + 8 \times 5 = 88 \text{ (cm)}$.

Từ đó, tổng chiều dài tối thiểu của sợi dây vải cần dùng là:

$$88 + 10 = 98 \text{ (cm)}$$

Vậy bạn Nga cần chọn một sợi dây vải có chiều dài ít nhất là 98 cm.

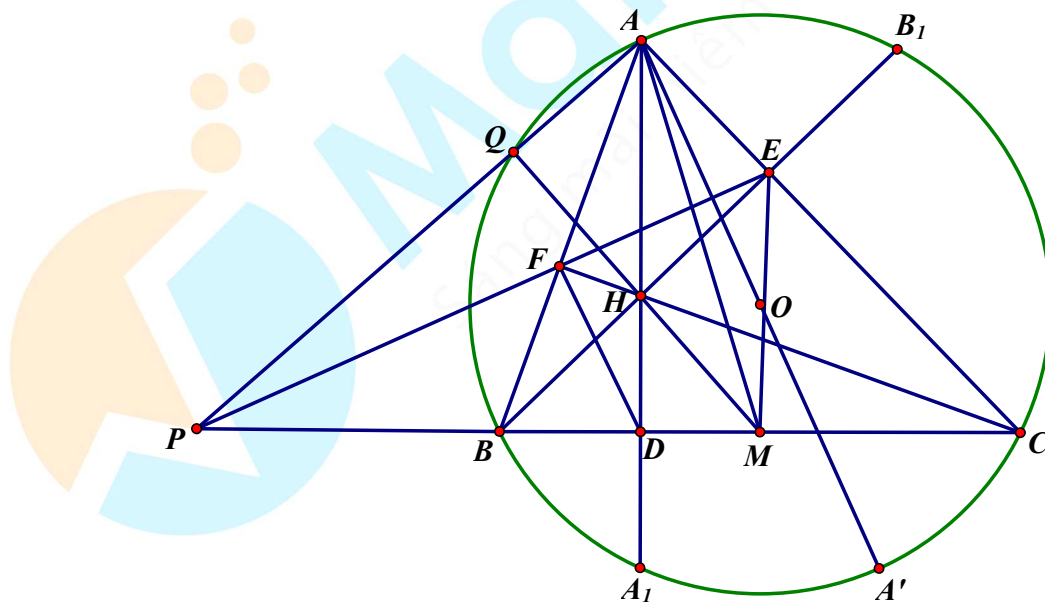
Câu 6. (Trường chuyên tỉnh Bình Phước năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (với $D \in BC, E \in AC, F \in AB$). Gọi A_1, B_1 lần lượt là các điểm đối xứng với H qua D và E ; M là trung điểm của BC . Hai đường thẳng EF và BC cắt nhau tại điểm P .

a) Chứng minh các điểm A, B, C, A_1, B_1 cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $PE \cdot PF = PM \cdot PD$ và H là trực tâm của tam giác APM .

Lời giải



a) $\widehat{BA_1H} = \widehat{BHA_1} = \widehat{ACB} \Rightarrow A_1 \in (ABC)$, tương tự cho B_1 ta có đpcm.

b) Giả sử O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có $ME = MB$ nên

$$\widehat{EFD} = 2\widehat{EFC} = 2\widehat{EBM} = \widehat{EBM} + \widehat{MEB} = \widehat{EMC}.$$

Do đó $FEMD$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{FDP} = \widehat{MEP}$, kết hợp $\widehat{FPD}$ chung nên dẫn đến

$$\Delta PFD \sim \Delta PME \Rightarrow PE \cdot PF = PM \cdot PD.$$

Gọi Q là giao MH với (O) thì $\widehat{AQH} = 90^\circ$ và tiếp tục gọi A' là điểm đối xứng A qua O thì $HCA'B$ là hình bình hành nên M cũng là trung điểm HA' và $\widehat{AQ'A} = 90^\circ$ nên Q, H, A' thẳng hàng dẫn đến $\widehat{MQA} = 90^\circ$. Ta chỉ cần chứng minh A, Q, P thẳng hàng nữa là đủ. Thật vậy, gọi A' là giao điểm PQ với (O) thì tương tự cách chứng minh trên ta có

$$PQ \cdot PA' = PB \cdot PC = PF \cdot PE \Rightarrow \widehat{PQF} = \widehat{A'EF}.$$

$\Rightarrow A'QFE$ nội tiếp hay A' thuộc (AH) nên $A' \equiv A$ nên ta có điều phải chứng minh.

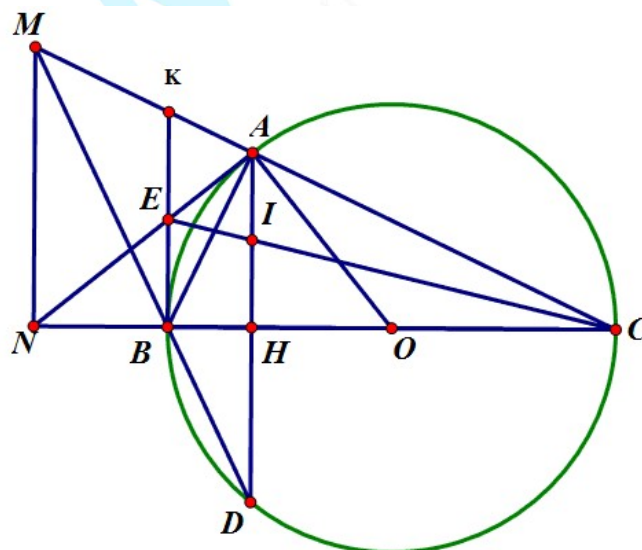
Câu 7. (Trường chuyên tỉnh Bình Thuận năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) đường kính BC và H là một điểm nằm trên đoạn thẳng BO (H không trùng với hai điểm B và O). Qua H vẽ đường thẳng vuông góc với BC , cắt đường tròn (O) tại A và D . Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD , N là chân đường vuông góc kẻ từ M đến BC .

- a) Chứng minh $\widehat{ANM} = \widehat{ACD}$. b) Chứng minh $2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1$.

- c) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt AN tại E . Chứng minh đường thẳng EC luôn đi qua trung điểm I của AH khi điểm H di động trên đoạn thẳng BO .

Lời giải



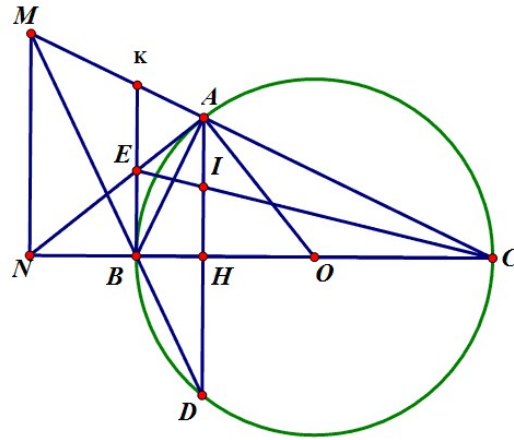
a) Ta có $\widehat{BAC} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \widehat{BAM} = 90^\circ$, mặt khác $\widehat{MNB} = 90^\circ$ nên tứ giác $MNBA$ nội tiếp, suy ra $\widehat{ANM} = \widehat{ABM} = \widehat{ACD}$ (đpcm).

b) Ta có $\triangle ABC$ vuông tại A , nên: $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{AB^2}{2BO}$.

$$\text{Mà } OH = BO - BH = BO - \frac{AB^2}{BC} = \frac{2BO^2 - AB^2}{2BO} \Rightarrow \frac{OH}{BH} = \frac{2BO^2 - AB^2}{AB^2} = 2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - 1.$$

$$\text{Suy ra } 2\left(\frac{BO}{AB}\right)^2 - \frac{OH}{BH} = 1 \text{ (đpcm).}$$

c)



$\widehat{MBN} = \widehat{DBC}$ (đối đỉnh), mà $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$ (tứ giác $DBAC$ nội tiếp)

suy ra $\widehat{MBN} = \widehat{DAC} \Rightarrow \widehat{NMB} = \widehat{BCA}$ (1)

Do tứ giác $MNBA$ nội tiếp nên ta có $\widehat{NMB} = \widehat{NAB}$ (2)

Tam giác OAC cân tại $O \Rightarrow \widehat{BCA} = \widehat{OAC}$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{NAB} = \widehat{OAC} \Rightarrow \widehat{OAC} + \widehat{BAO} = \widehat{NAB} + \widehat{BAO} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{NAO}$,

mà $\widehat{BAC} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{NAO} = 90^\circ$. Vậy NA là tiếp tuyến của (O) .

Ta có $EA = EB$ (tính chất tiếp tuyến) và $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.

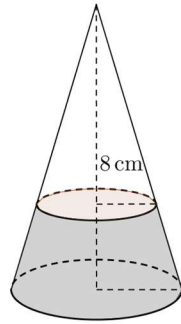
Trong tam giác vuông ABK , ta có $\widehat{EAB} = \widehat{EBA} \Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{EAK}$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau) nên $\triangle KAE$ cân tại $E \Rightarrow AE = KE \Rightarrow EB = KE$

Mặt khác $AI \parallel KE \Rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{AI}{KE}$; $HI \parallel EB \Rightarrow \frac{CI}{CE} = \frac{HI}{BE}$, suy ra $\frac{AI}{KE} = \frac{HI}{BE}$.

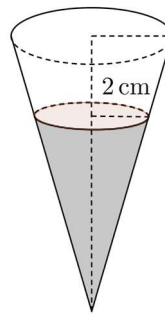
Mà $KE = BE$ nên suy ra $AI = HI$, do đó I là trung điểm đoạn thẳng AH .

Câu 8. (Trường chuyên tỉnh Cần Thơ năm 2025 – 2026)

Một cái bình hình nón được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang sao cho đỉnh của nó hướng lên trên. Người ta rót nước vào bình cho đến khi mực nước dâng cao cách đỉnh 8 cm (như hình 1). Sau đó, người ta đảo ngược cái bình lại sao cho đỉnh bình hướng xuống (như hình 2). Khi đó, người ta đo được phần không gian trống của bình có chiều cao 2 cm. Biết rằng lượng nước bên trong bình không thay đổi. Tính chiều cao của cái bình đã cho.



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Gọi $h(\text{cm})$ là chiều cao của bình nước, $r(\text{cm})$ là bán kính đáy của hình nón.

Thể tích của bình nước là $\frac{1}{3}\pi r^2 h$. (cm^3)

Khi đặt bình nước có đỉnh hướng lên, thể tích của lượng nước là $\frac{1}{3}\pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi \left(\frac{8r}{h}\right)^2 \cdot 8$ (cm^3) (1)

Khi úp bình xuống, lượng nước trên chiếm một thể tích bằng với thể tích hình nón có chiều cao là $h - 2$ (cm) và bằng $\frac{1}{3}\pi \left(\frac{(h-2)r}{h}\right)^2 (h-2)$ (cm) (2)

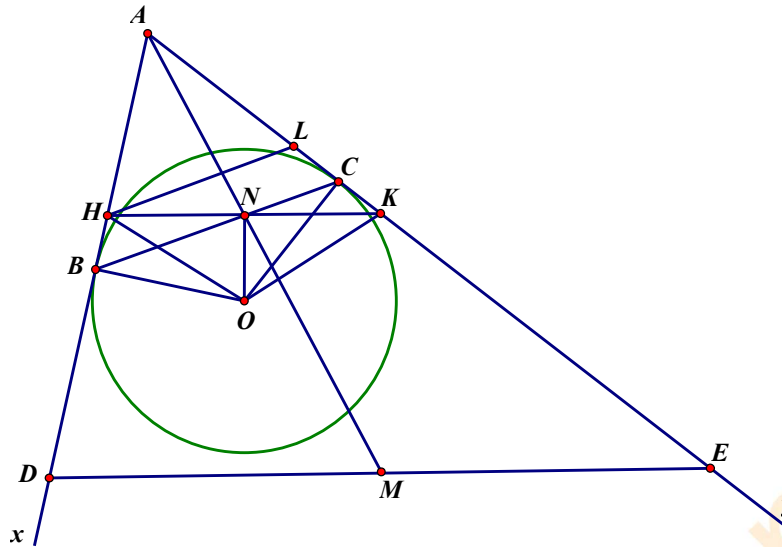
Từ (1) và (2), suy ra $h^3 - 8^3 = (h-2)^3 \Rightarrow h^2 - 2h - 84 = 0 \Rightarrow h = 1 + \sqrt{85}$ (cm)

Vậy chiều cao của bình là $1 + \sqrt{85}$ cm.

Câu 9. (Trường chuyên tỉnh Đà Nẵng năm 2025 – 2026)

Trên tia phân giác của góc nhọn xAy lấy điểm O (khác A) và vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với các tia Ax , Ay lần lượt tại B , C . Trên các tia Ax , Ay lần lượt lấy các điểm D , E sao cho $AB < AD < AE$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng DE . Các đoạn thẳng AM , BC cắt nhau tại N . Chứng minh rằng ON vuông góc với DE .

Lời giải



Qua N kẻ đường thẳng song song với DE cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại H, K .

Áp dụng bổ đề hình thang với chú ý $HK \parallel DE$ và M là trung điểm của BC .

Ta có: N là trung điểm của HK .

Qua H kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường thẳng AC tại L .

Theo định lý Thales, ta có: $\frac{BH}{AB} = \frac{CL}{AC}$.

Vì $AB = AC$ nên $BH = CL$.

Xét tam giác HKL có N là trung điểm của HK và $CN \parallel HL$ nên C là trung điểm của KL .

Suy ra $CK = CL = BH$.

Từ đó, ta chứng minh được $\triangle OBH = \triangle OCK$ (c.g.c)

Suy ra $OH = OK$.

Vì ON là đường trung tuyến của tam giác OHK cân tại O nên $ON \perp HK$.

Lại có $HK \parallel DE$ nên ta suy ra được $ON \perp DE$.

Câu 10. (Trường chuyên tỉnh Đắk Lắk năm 2025 – 2026)

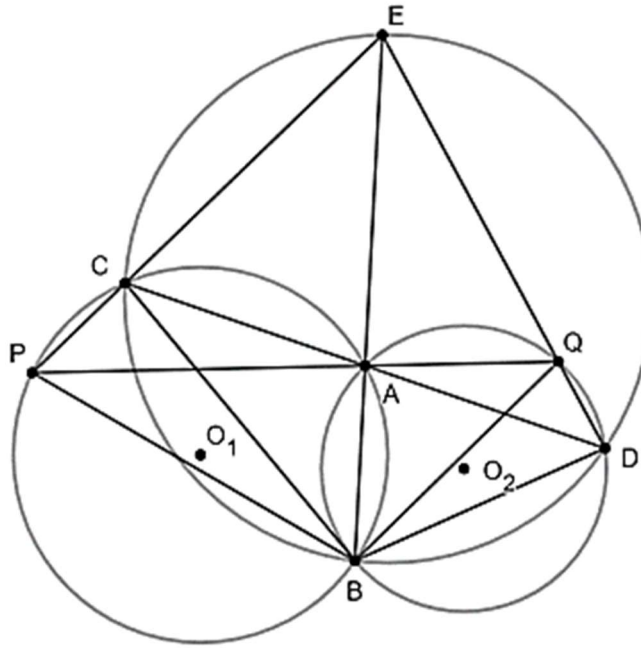
Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ (với $R_1 > R_2$) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B . Qua A kẻ đường thẳng cắt $(O_1); (O_2)$ lần lượt tại C, D (đều khác A) sao cho A là trung điểm của đoạn CD . Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt đường thẳng AB tại điểm E (khác B), đường thẳng EC cắt đường tròn (O_1) tại điểm P (khác C), đường thẳng ED cắt đường tròn (O_2) tại điểm Q (khác D).

a) Chứng minh rằng: $\triangle BCP \sim \triangle BDQ$.

b) Chứng minh rằng: Ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

c) Vẽ phân giác trong EI của tam giác EPQ ; vẽ PM, QN lần lượt là phân giác trong của tam giác CPI và tam giác DQI . Chứng minh rằng $MN \parallel CD$.

Lời giải



a) Từ các tứ giác $ACPB, AQDB$ nội tiếp ta có biến đổi góc:

$$\widehat{BPC} = \widehat{EAC} = \widehat{BAD} = \widehat{BQD}.$$

Lại có tứ giác $BCED$ nội tiếp nên $\widehat{BCP} = \widehat{BDQ}$.

Xét $\triangle BCP$ và $\triangle BDQ$ có:

$$\widehat{BPC} = \widehat{BQD}$$

$$\widehat{BCP} = \widehat{BDQ}$$

Do đó $\triangle BCP \sim \triangle BDQ$ (g - g)

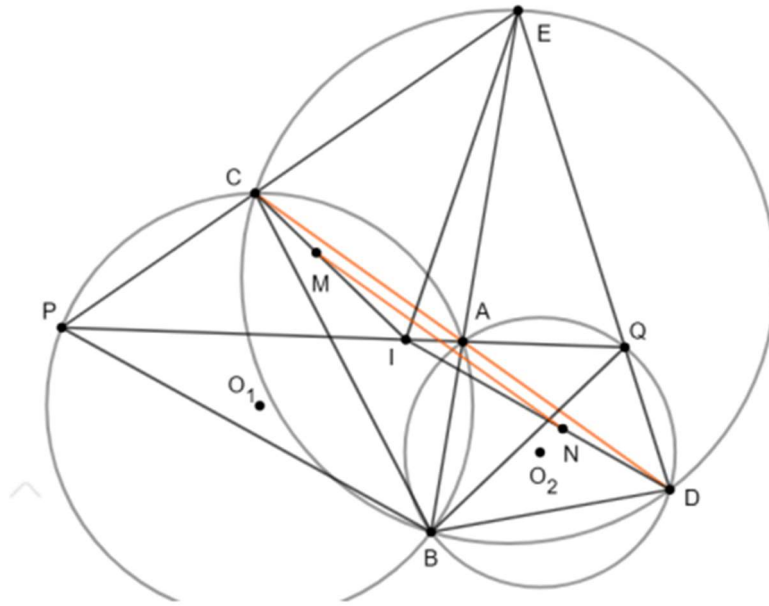
b) Do $\triangle BCP \sim \triangle BDQ$ nên $\widehat{CBP} = \widehat{QBD}$.

Từ các tứ giác nội tiếp $BACP, BAQD$ ta có biến đổi góc:

$$\widehat{CAP} = \widehat{CBP} = \widehat{QBD} = \widehat{QAD}$$

Mà C, A, D thẳng hàng (do A là trung điểm CD) nên P, A, Q thẳng hàng.

c)



Do PM , QN lần lượt là phân giác trong của hai tam giác CPI và tam giác QDI nên:

$$\frac{CM}{MI} = \frac{PC}{PI}, \frac{DN}{NI} = \frac{QD}{QI} \quad (1)$$

Ta có: EI là phân giác trong của tam giác EPQ nên:

$$\frac{PI}{QI} = \frac{PE}{EQ} \quad (2)$$

Từ các tứ giác $ACPB$ nội tiếp, tứ giác $BAQD$ nội tiếp và tứ giác $BCED$ nội tiếp ta có biến đổi góc:

$$\begin{aligned} \widehat{PCB} &= \widehat{PAB}, \widehat{ECB} = 180^\circ - \widehat{QDB} = \widehat{BAQ} \\ \Rightarrow \widehat{PCB} + \widehat{ECB} &= \widehat{PAB} + \widehat{BAQ} = 180^\circ \end{aligned}$$

Nên P, C, E thẳng hàng

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác PEQ cắt tuyến PAQ ta được:

$$\frac{PC}{PE} \cdot \frac{EQ}{QD} \cdot \frac{DA}{DC} = 1$$

$$\text{Do } A \text{ là trung điểm } CD \Rightarrow \frac{PC}{PE} = \frac{DQ}{QE} \Rightarrow \frac{PC}{DQ} = \frac{PE}{QE} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1),(2),(3) thu được } \frac{CM}{MI} = \frac{DN}{NI} \Rightarrow MN \parallel CD$$

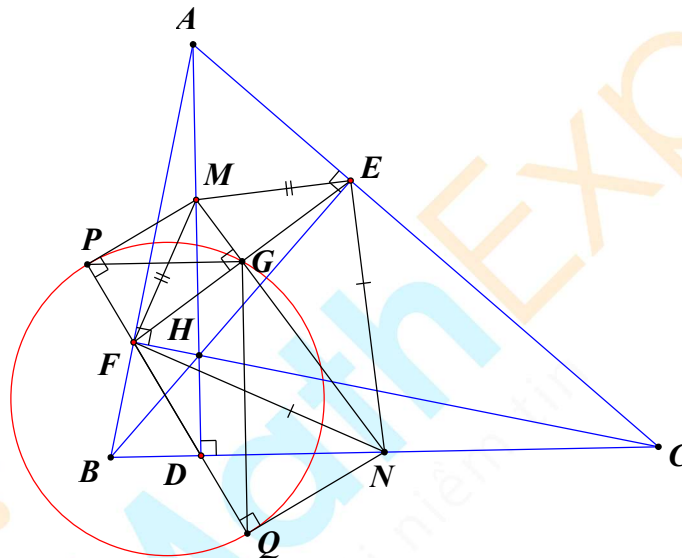
Câu 11. (Trường chuyên tỉnh Đắk Nông năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ đường cao AD, BE, CF của tam giác đó. Gọi H là giao điểm của các đường cao vừa vẽ. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AH và BC .

a) Chứng minh rằng $\triangle MFN$ là tam giác vuông.

b) Chứng minh $\triangle FMN \sim \triangle FAC$.

c) Gọi P, Q lần lượt là chân các đường vuông góc từ M, N đến đường thẳng DF . Chứng minh rằng giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ .

Lời giải

a) Ta có các tam giác FHA và tam giác FBC là các tam giác vuông nên có

$$FM = MA = \frac{AH}{2} \text{ và } FN = NB = \frac{BC}{2} \text{ (tính chất đường trung tuyến ứng với cạnh huyền)}$$

$$\Rightarrow \widehat{MFA} = \widehat{BAD} \text{ và } \widehat{NFB} = \widehat{DBA}$$

$$\Rightarrow \widehat{MFA} + \widehat{NFB} = \widehat{BAD} + \widehat{DBA} = 90^\circ \text{ (vì tam giác } BAD \text{ vuông tại } D)$$

$$\Rightarrow \widehat{MFN} = 180^\circ - \widehat{MFA} - \widehat{NFB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ \Rightarrow \triangle MFN \text{ là tam giác vuông}$$

b) Xét $\triangle BFC$ và $\triangle HFA$ có:

$$\widehat{AFH} = \widehat{BFC} = 90^\circ$$

$$\widehat{FAH} = \widehat{FCB} \text{ (cùng cộng } \widehat{ABC} \text{ bằng } 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle HFA \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{AH}{AF} = \frac{BC}{FC} \Rightarrow \frac{2AM}{AF} = \frac{2CN}{FC} \Rightarrow \frac{AM}{AF} = \frac{CN}{FC}.$$

Xét $\triangle AMF$ và $\triangle CNF$ có:

$$\frac{AM}{AF} = \frac{CN}{FC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{FAH} = \widehat{FCB} \text{ (cùng cộng } \widehat{ABC} \text{ bằng } 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle AMF \sim \triangle CNF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \frac{FM}{AF} = \frac{FN}{FC}$$

Xét $\triangle FMN$ và $\triangle FAC$ có:

$$\frac{FM}{AF} = \frac{FN}{FC} \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\widehat{AFC} = \widehat{MFN} (= 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \triangle FMN \sim \triangle FAC \text{ (c.g.c)}.$$

c) Gọi G là giao điểm của MN và $FE \Rightarrow MN \perp FE$ tại G (do $NF = NE = \frac{BC}{2}$ và $MF = ME = \frac{AH}{2}$)

nên MN là đường trung trực của EF)

Chứng minh được tứ giác $MPFG$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{GPF} = \widehat{GMF}.$$

Chứng minh được tứ giác $GFQN$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{GQF} = \widehat{GNF}$$

Cộng lại ta được $\widehat{GPF} + \widehat{GQF} = \widehat{GMF} + \widehat{GNF} = 90^\circ$ (vì tam giác MFN vuông ở F)

$\Rightarrow \widehat{PGQ} = 90^\circ$. Vậy giao điểm của FE và MN thuộc đường tròn đường kính PQ .

Câu 12. (Trường chuyên tỉnh Hà Giang năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD , BE , CF của tam giác ABC cắt nhau tại H .

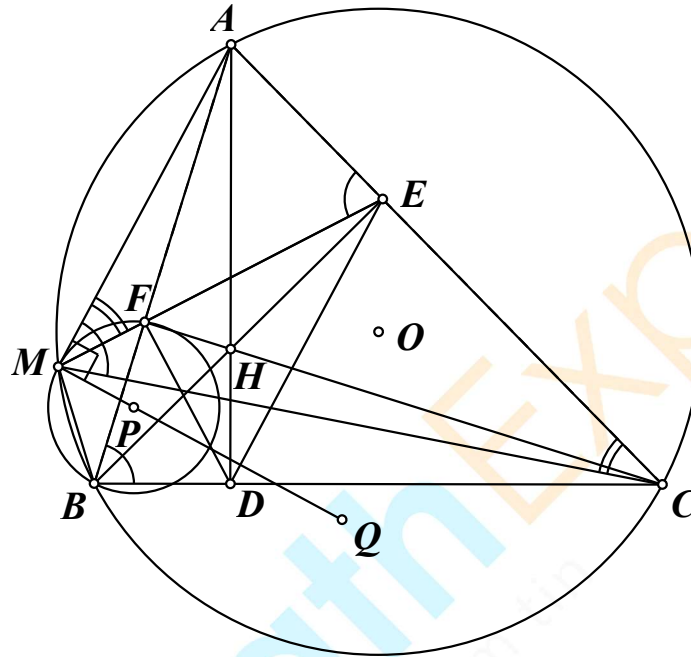
a) Chứng minh DA là tia phân giác của góc EDF .

b) Chứng minh $\frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = 1$.

c) Gọi M là giao điểm của tia EF với đường tròn (O) . Gọi P, Q lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BMF và tam giác CME . Chứng minh $AM \perp PQ$.

d) Tìm mối liên hệ giữa các cạnh của tam giác ABC để biểu thức $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



a) $\widehat{BFH} = \widehat{BDH} = 90^\circ$ nên chứng minh được $BFHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDF} = \widehat{HBF}$

Tương tự, $CEHD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HDE} = \widehat{HCE}$

$BCEF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{HBF} = \widehat{HCE}$

Suy ra $\widehat{HDE} = \widehat{HDF}$ nên DA là tia phân giác của góc EDF .

$$\text{b) Ta có: } \frac{HD}{AD} + \frac{HE}{BE} + \frac{HF}{CF} = \frac{\frac{1}{2}HD \cdot BC}{\frac{1}{2}AD \cdot BC} + \frac{\frac{1}{2}HE \cdot AC}{\frac{1}{2}BE \cdot AC} + \frac{\frac{1}{2}HF \cdot AB}{\frac{1}{2}CF \cdot AB}$$

$$= \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{HBC} + S_{HAC} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$

c) Ta có: $\widehat{AEM} = \widehat{ABC}$ (do tứ giác $BCEF$ nội tiếp)

$\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn $\widehat{AC}$ của đường tròn (O))

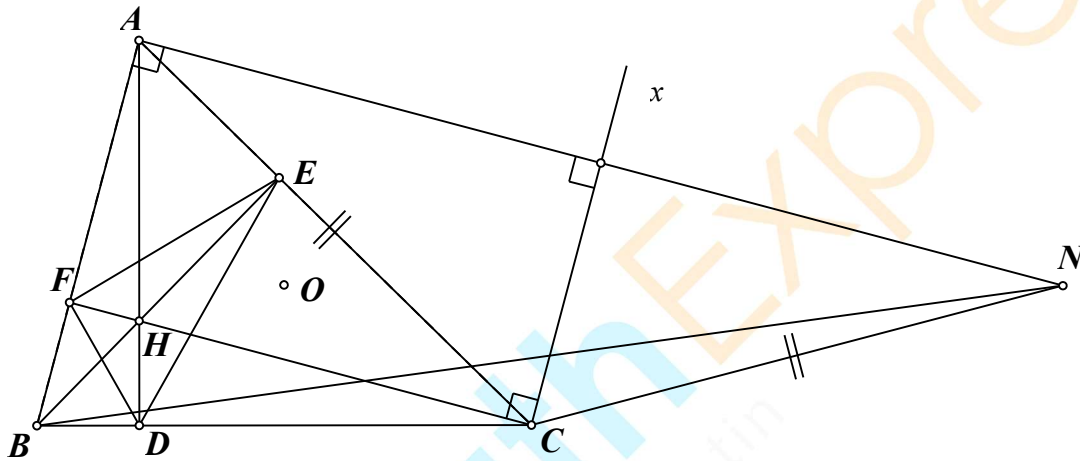
$\Rightarrow \widehat{AEM} = \widehat{AMC} \Rightarrow \Delta AEM \sim \Delta AMC (g.g) \Rightarrow \widehat{AME} = \widehat{ECM} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{ME}$ của đường tròn (Q) nên AM là tiếp tuyến của $(Q) \Rightarrow AM \perp QM$

Theo trên $\widehat{AMF} = \widehat{ACM}$, mà $\widehat{ABM} = \widehat{ACM} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{MA}$ của đường tròn (O)

$\Rightarrow \widehat{AMF} = \widehat{FBM} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{MF}$ của đường tròn (P) nên AM là tiếp tuyến của (P)

Vì $AM \perp PM$ và $AM \perp QM$ nên ba điểm P, Q, M thẳng hàng. Suy ra $AM \perp PQ$.

d)



Vẽ $Cx \perp CF$. Gọi N là điểm đối xứng của A qua Cx

Vì $AN \parallel CF \Rightarrow \widehat{BAN} = 90^\circ, CN = AC, AN = 2CF$. Ta luôn có $BN \leq BC + CN$

ΔABN vuông tại A nên: $AB^2 + AN^2 = BN^2 \Rightarrow AB^2 + 4CF^2 \leq (BC + CN)^2$

$$\Rightarrow 4CF^2 \leq (BC + AC)^2 - AB^2 \quad (5)$$

Tương tự: $4AD^2 \leq (AB + AC)^2 - BC^2$ và $4BE^2 \leq (AB + BC)^2 - AC^2$

Suy ra $4(AD^2 + BE^2 + CF^2) \leq (AB + BC + AC)^2$ hay $\frac{(AB + BC + CA)^2}{AD^2 + BE^2 + CF^2} \geq 4$

Đẳng thức (5) xảy ra khi B, C, N thẳng hàng $AC = \frac{1}{2}BN \Rightarrow BC = AC$.

Vì vậy biểu thức đã cho đạt giá trị nhỏ nhất khi $AB = AC = BC$ hay ABC là tam giác đều.

Câu 13. (Trường chuyên tỉnh Đồng Nai năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC (với $AB < BC < CA$) có I, J, M lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Gọi D là giao điểm của hai đường tròn $(I; IA)$ và $(J; JA)$, với D khác A .

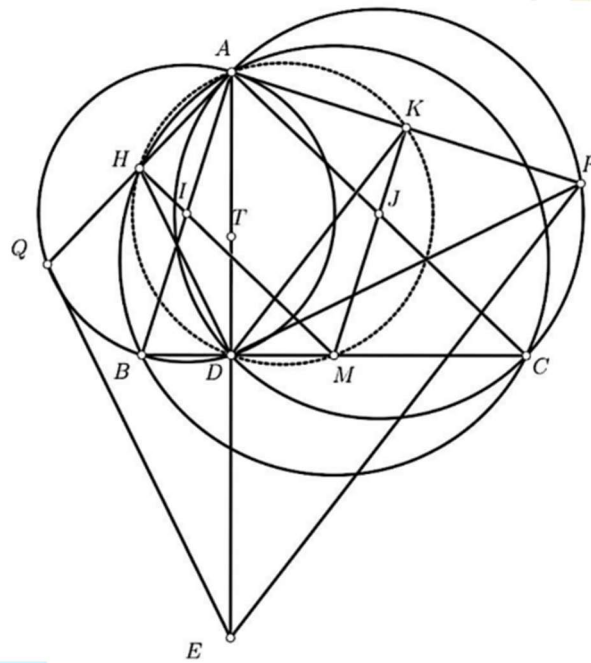
a) Chứng minh tứ giác $AIMJ$ là hình bình hành và ba điểm B, D, C thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến của $(I; IA)$ tại A cắt đường thẳng MJ tại điểm K và cắt $(J; JA)$ tại điểm P , với P khác A . Tiếp tuyến của $(J; JA)$ tại A cắt $(I; IA)$ tại điểm Q , với Q khác A . Gọi E là điểm đối xứng với A qua D . Chứng minh tứ giác $ADMK$ nội tiếp đường tròn và $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$.

c) Gọi S và T lần lượt là giao điểm của đường thẳng PQ với hai đường thẳng BC và AD . Chứng minh $TP \cdot SQ = TQ \cdot SP$.

Lời giải

a)



Ta chứng minh $ADMK$ nội tiếp đường tròn. Từ (6), ta có $MJ \parallel AB$.

Hơn nữa $AB \perp AP$ (AP là tiếp tuyến tại A của $(I; IA)$) nên $MJ \perp AP$. Kết hợp điều trên với $JA = JP$, ta suy ra MJ là đường trung trực của AP . Từ đây suy ra $MK \perp AP$ hay $\widehat{AKM} = 90^\circ$.

Suy ra $ADMK$ nội tiếp.

Gọi H là giao điểm của MI và AQ . Chứng minh tương tự như trên, ta có MH là đường trung trực của AQ và $AHMK$ nội tiếp. Kết hợp với $ADMK$ nội tiếp, ta suy ra A, H, D, M, K cùng nằm trên một đường tròn.

b) Ta chứng minh $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$. Ta có H là trung điểm của AQ (MH là đường trung trực của AQ), D là trung điểm của AE nên HD là đường trung bình của tam giác AEQ .

Suy ra $HD \parallel QE$, từ đó thu được $\widehat{QEA} = \widehat{HDA}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

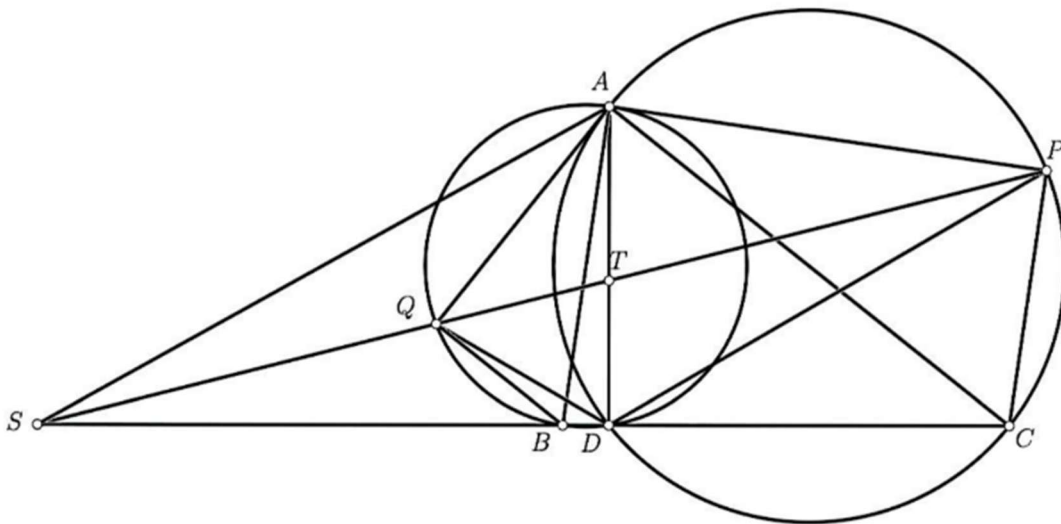
Ta có K là trung điểm của AP (MK là đường trung trực của AP), D là trung điểm của AE nên KD là đường trung bình của tam giác AEP . Suy ra $KD \parallel PE$, dẫn đến $\widehat{PEA} = \widehat{KDA}$ (hai góc ở vị trí đồng vị).

$$\text{Ta có } \widehat{PEQ} = \widehat{PEA} + \widehat{QEA} = \widehat{KDA} + \widehat{HDA} = \widehat{HDK} \quad (8)$$

Hơn nữa $\widehat{HDK} + \widehat{PAQ} = \widehat{HDK} + \widehat{HAK} = 180^\circ$ (do A, H, D, K cùng nằm trên một đường tròn) (9)

Từ (8) và (9) suy ra $\widehat{PAQ} + \widehat{PEQ} = 180^\circ$

c)



Ta cần chứng minh $\frac{TP}{TQ} = \frac{SP}{SQ}$

Ta có: $\widehat{QDT} = \widehat{QDA} = \widehat{QBA}$ (do AQBD nội tiếp) (10)

Và $\widehat{PDT} = \widehat{PDA} = \widehat{PCA}$ (dp APCD nội tiếp) (11)

Xét tam giác ABQ vuông tại Q và tam giác ACP vuông tại P có $\widehat{QAB} = \widehat{PAC}$ (cùng phụ $\widehat{BAC}$)

Suy ra: $\triangle ABO \sim \triangle ACP$ dẫn đến $\widehat{OBA} = \widehat{PCA}$ (12)

Từ (10), (11), (12) suy ra $\widehat{QDT} = \widehat{PDT}$ kéo theo DT là tia phân giác trong của $\widehat{QDP}$ vậy $\frac{TP}{TQ} = \frac{DP}{DQ}$

(13)

Ta có: $DS \perp DT$ nên DS là tia phân giác ngoài của $\widehat{QDP}$ suy ra $\frac{SP}{SQ} = \frac{DP}{DQ}$ (14)

Từ (13) và (14) suy ra $\frac{TP}{TQ} = \frac{SP}{SQ}$ hay $TP.SQ = TQ.SP$.

Câu 14. (Trường chuyên tỉnh Đồng Tháp năm 2025 – 2026)

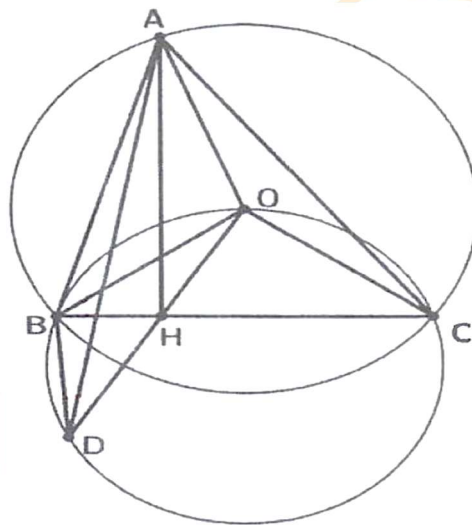
Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AH và nội tiếp đường tròn (O) . Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC , D là giao điểm của OH và (O') (D khác O).

a) Chứng minh rằng $OH \cdot OD = OB^2$.

b) Chứng minh rằng $\widehat{OAH} = \widehat{ADH}$.

c) Gọi E là giao điểm của AD và (O') (E thuộc cung nhỏ OB và khác với O, B). Tính số đo góc $\widehat{AOE}$.

Lời giải



a) Xét $\triangle OBH$ và $\triangle ODB$ có

$$\widehat{BOH} = \widehat{DOB}$$

$$\widehat{OBH} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{OC} = \frac{1}{2} \text{sd} \widehat{OB} = \widehat{ADB}$$

$$\Rightarrow \triangle OBH \sim \triangle ODB$$

$$\Rightarrow \frac{OB}{OD} = \frac{OH}{OB}$$

$$\Rightarrow OH \cdot OD = OB^2.$$

$$\text{b) Ta có } OH \cdot OD = OB^2 = OA^2 \Rightarrow \frac{OH}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

Xét $\triangle OAH$ và $\triangle ODA$ có

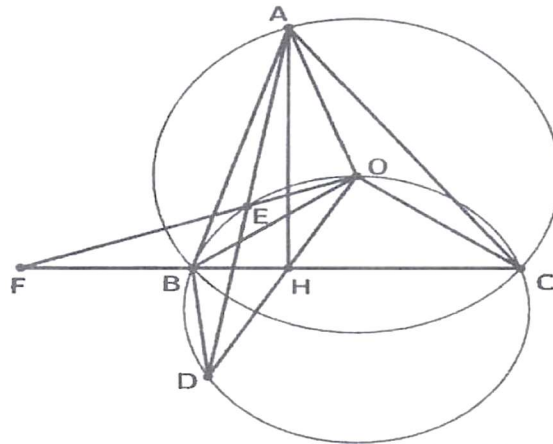
$$\widehat{AOH} = \widehat{DOA}$$

$$\frac{OH}{OA} = \frac{OA}{OD}$$

$$\Rightarrow \triangle OAH \sim \triangle ODA$$

$$\Rightarrow \widehat{OAH} = \widehat{ADH}.$$

c)



Gọi F là giao điểm của OE với BC . Ta có $\widehat{OFH} = \widehat{OFC} = \frac{1}{2}(\widehat{OC} - \widehat{BE})$

$$= \frac{1}{2}(\widehat{OB} - \widehat{BE}) = \frac{1}{2}\widehat{EO}$$

$$= \widehat{ODE} = \widehat{OAH}$$

Suy ra $AOHF$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{AOF} = \widehat{AHF} = 90^\circ$$

Câu 15. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

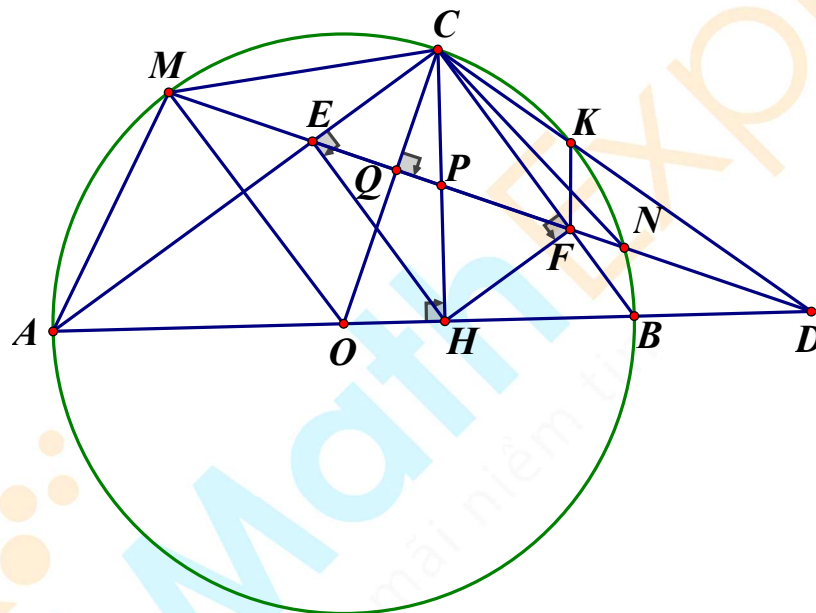
Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB . Lấy điểm C trên đường tròn (O) sao cho $AC > BC$. Kẻ CH vuông góc với AB (H thuộc AB), HE vuông góc với AC (E thuộc AC) và HF vuông góc với BC (F thuộc BC)

a) Chứng minh $CEHF$ là hình chữ nhật và OC vuông góc với EF .

b) Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại M và N (E nằm giữa M và F). Chứng minh $CM^2 = CE.CA$.

c) Gọi D là giao điểm của MN và AB , K là giao điểm của CD và đường tròn (O) (K khác C). Chứng minh EKF là tam giác vuông.

Lời giải



a) Dễ dàng chứng minh $CEHF$ là hình chữ nhật

Gọi P và Q lần lượt là giao điểm của EF với CH và OC

Dễ dàng chỉ ra tứ giác $CEHF$ nội tiếp đường tròn tâm P đường kính CH

Từ đó suy ra $\widehat{CEF} = \widehat{CHF}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CF)

Mà $\widehat{CHF} = \widehat{CBA}$ (cùng phụ góc BCH nên $\widehat{CEF} = \widehat{CBA}$ hay $\widehat{CEQ} = \widehat{CBA}$)

Tam giác OAC cân tại O nên $\widehat{CBA} = \widehat{OCA} = \widehat{QCE}$

Ta có $\widehat{CEQ} + \widehat{QCE} = \widehat{CBA} + \widehat{CBA} = 180^\circ - \widehat{ACB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ (do góc $\widehat{ACB} = 90^\circ$, góc nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) nên suy ra $\widehat{CQE} = 90^\circ$ hay $OC \perp EF$ (đpcm).

b) Ta có $\begin{cases} OM = ON \\ OC \perp MN \end{cases}$ nên OC là đường trung trực của đoạn thẳng MN . Suy ra $CM = CN$ nên tam giác CMN cân tại C . Do đó ta có $\widehat{CMN} = \widehat{CNM} = \widehat{CAM}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CM của đường tròn tâm O)

Xét tam giác $\triangle CME$ và tam giác $\triangle CAM$ ta có :

$$\widehat{MCA} \text{ chung ; } \widehat{CME} = \widehat{CAM} \text{ (cmt)}$$

$$\text{Suy ra } \triangle CME \sim \triangle CAM \text{ (g.g) suy ra } \frac{CM}{CA} = \frac{CE}{CM} \text{ suy ra } CM^2 = CE \cdot CA \text{ (đpcm).}$$

c) Đầu tiên ta đi chứng minh bổ đề : “Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° thì là tứ giác nội tiếp”

Ta có $\widehat{DFB} = \widehat{PFC} = \widehat{PCF} = \widehat{HCB} = \widehat{BAC} = \widehat{DAE}$ nên tam giác

$$\triangle DBF \sim \triangle DEA \text{ (g.g) suy ra } DE \cdot DF = DA \cdot DB$$

Ta lại có $\triangle DKA \sim \triangle DBC$ (g.g) nên $DK \cdot FC = DA \cdot DB$

$$\text{Suy ra } DE \cdot DF = DK \cdot DC (= DA \cdot DB) \Rightarrow \frac{DK}{DE} = \frac{DF}{DC} \Rightarrow \triangle DKF \sim \triangle DEC \text{ (g.g) nên } \widehat{DKF} = \widehat{DEC}$$

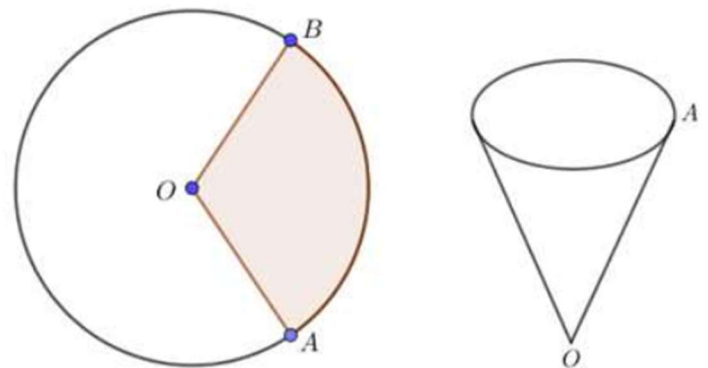
Xét tứ giác $CKFE$, ta có : $\widehat{CEF} + \widehat{CKF} = \widehat{DKF} + \widehat{CKF} = 180^\circ$ nên theo kết quả bổ đề trên thì tứ giác $CKFE$ là tứ giác nội tiếp

Mà tứ giác $CEHF$ cũng là tứ giác nội tiếp nên 5 điểm C, E, H, F, K cùng thuộc đường tròn tâm P đường kính EF suy ra $\widehat{EKF} = 90^\circ$

Vậy $\triangle EKF$ là tam giác vuông.

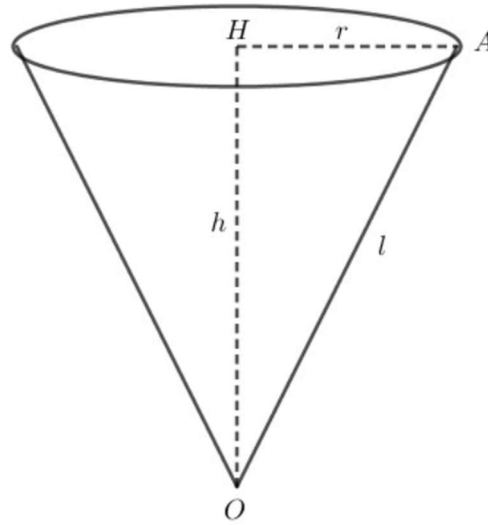
Câu 16. (Trường chuyên tỉnh Gia Lai năm 2025 – 2026)

Từ một tấm tôn hình tròn có bán kính $R = 15\text{cm}$, người ta làm một hình nón bằng cách cắt một phần của hình tròn dạng hình quạt có diện tích bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình nón. Tính thể tích của hình nón tạo thành (như hình bên.)



Lời giải

Ta gọi h, r, l lần lượt là đường cao, bán kính đáy và đường sinh của hình nón



Ta có đường sinh hình nón $l = OA = 15\text{cm}$

Do người ta làm một hình nón bằng cách cắt 1 phần của hình tròn dạng hình quạt có diện tích bằng $\frac{1}{3}$ diện tích hình tròn nên $\widehat{AOB} = 120^\circ$. Khi đó độ dài cung nhỏ AB bằng $\frac{1}{3}$ chu vi đáy của hình tròn

Mà độ dài cung nhỏ AB lại chính là chu vi đáy của hình nón nên ta có :

$$\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 15 = 2\pi r \Rightarrow r = 5 \text{ (cm)}$$

Chiều cao của hình nón bằng $h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{15^2 - 5^2} = 10\sqrt{2} \text{ (cm)}$

$$\text{Thể tích của khối nón } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \cdot 5^2 \cdot 10\sqrt{2} = \frac{250\pi\sqrt{2}}{3} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Câu 17. (Trường chuyên tỉnh Hà Nam năm 2025 – 2026)

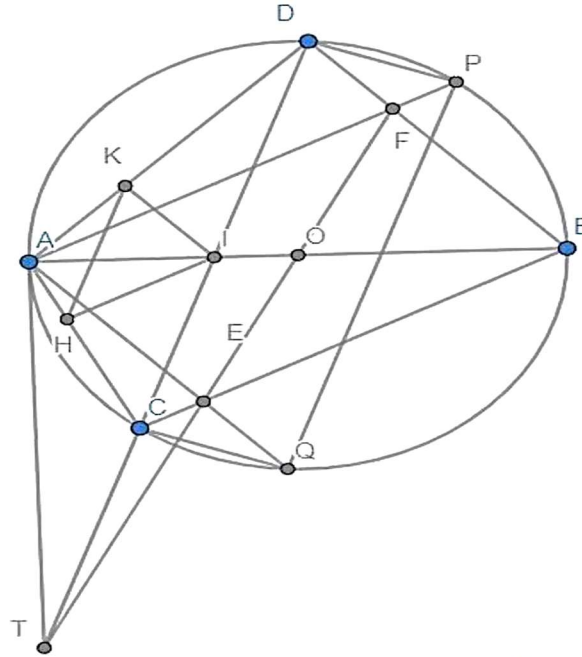
Cho đường tròn (O) , đường kính AB . Xét dây cung CD không đi qua O , không vuông góc với AB và CD cắt AB tại I . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của I lên AC và AD .

a) Chứng minh hai tam giác IHK và BCD đồng dạng.

b) Chứng minh $S_{\triangle ACD} > 4S_{\triangle IHK}$.

c) Tiếp tuyến tại điểm A của (O) cắt CD tại T . Hai đường thẳng BC và BD cắt tia TO lần lượt tại E và F , AF cắt (O) tại P , AE cắt (O) tại Q . Chứng minh tứ giác $CDPQ$ là hình chữ nhật.

Lời giải



a) Do K, H là hình chiếu của I lên AD và AC nên $\widehat{IHA} = \widehat{IKA} = 90^\circ$ mà $\widehat{ADB} = 90^\circ = \widehat{ACB}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra $IH \parallel BC$ (cùng $\perp AC$), $IK \parallel BD$ (cùng $\perp AD$) $\Rightarrow \widehat{KIH} = \widehat{DBC}$

Theo hệ quả định lý Thales, ta chứng minh được: $\frac{IK}{BD} = \frac{AI}{AB} = \frac{IH}{CB}$

nên $\triangle IHK \sim \triangle BCD$ (c-g-c)

b) Có: $\frac{S_{AID}}{S_{BID}} = \frac{AI}{IB}$ (2 tam giác chung đường cao)

Tương tự: $\frac{S_{AIC}}{S_{BIC}} = \frac{AI}{IB}$

$$\Rightarrow \frac{S_{AID}}{S_{BID}} = \frac{S_{AIC}}{S_{BIC}} = \frac{AI}{IB}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{AI}{IB} = \frac{S_{AID} + S_{AIC}}{S_{BID} + S_{BIC}} = \frac{S_{ACD}}{S_{BCD}}$$

Theo chứng minh trên: $\triangle IHK \sim \triangle BCD$ nên $\frac{S_{HIK}}{S_{BCD}} = \left(\frac{KH}{CD}\right)^2 = \left(\frac{AH}{AC}\right)^2 = \left(\frac{AI}{AB}\right)^2$

$$\text{Suy ra } \frac{S_{ACD}}{S_{HIK}} = \frac{\frac{AI}{IB}}{\frac{AI^2}{AB^2}} = \frac{AB^2}{IB \cdot IA} = \frac{(IA + IB)^2}{IA \cdot IB} \geq \frac{4IB \cdot IA}{IB \cdot IA} = 4 \text{ (theo bất đẳng thức AM-GM)}$$

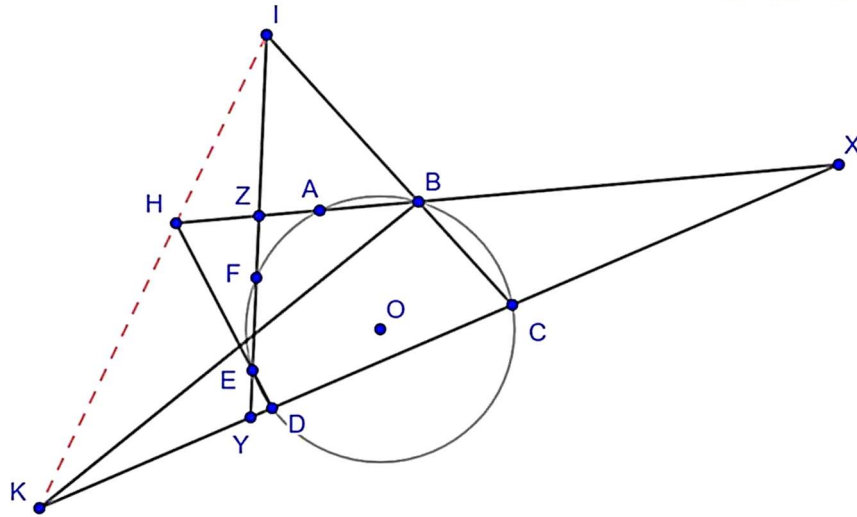
$$\text{Suy ra } S_{ACD} \geq 4S_{HIK}$$

Dấu bằng xảy ra khi $IA = IB$, tức là I là trung điểm AB
 $\Rightarrow I \equiv O$ (vô lý vì CD không qua O)

$$\text{Vậy } S_{ACD} > 4S_{HIK}$$

c) Bổ đề (Định lý Pascal): Cho lục giác $ABCDEF$ nội tiếp đường tròn, H, K, I lần lượt là giao điểm của AB và ED, BC và EF, AF và CD . Chứng minh rằng I, H, K thẳng hàng.

Chứng minh:



Gọi X là giao điểm của AB, CD, Y là giao điểm của EF và CD, Z là giao điểm của AB và EF . Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle XYZ$ với cát tuyến IFA ta được

$$\frac{IY}{IX} \cdot \frac{AX}{AZ} \cdot \frac{FZ}{FY} = 1 \quad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle XYZ$ cát tuyến HED ta được

$$\frac{HX}{HZ} \cdot \frac{EZ}{EY} \cdot \frac{DY}{DX} = 1 \quad (2)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle XYZ$ cát tuyến KBC ta được

$$\frac{KZ}{KY} \cdot \frac{CY}{CX} \cdot \frac{BX}{BZ} = 1 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) nhân theo vế ta được

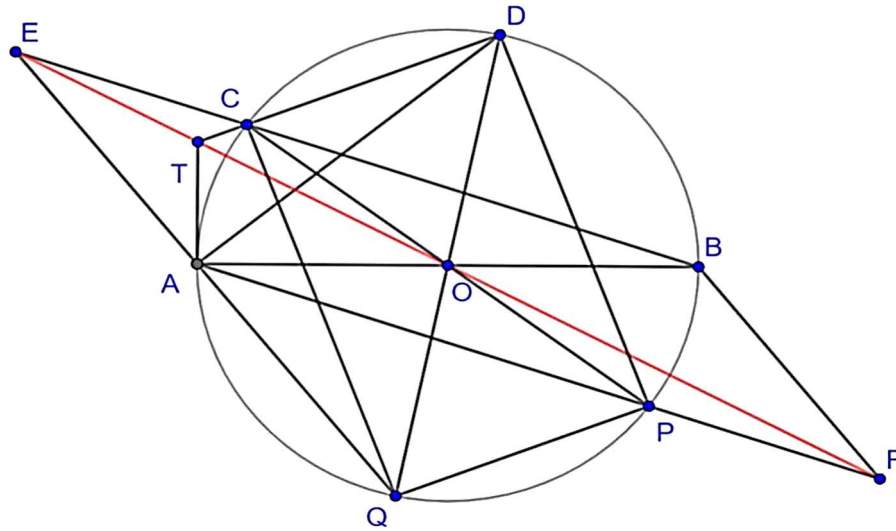
$$\frac{IY}{IX} \cdot \frac{HX}{HZ} \cdot \frac{KZ}{KY} \cdot \frac{XA}{XC} \cdot \frac{XB}{XD} \cdot \frac{ZE}{ZA} \cdot \frac{ZF}{ZB} \cdot \frac{YC}{YE} \cdot \frac{YD}{YF} = 1$$

Chú ý $XA.XB = XC.XD, ZE.ZF = ZA.ZB, YC.YD = YE.YF$ từ đó ta được

$$\frac{IY}{IX} \cdot \frac{HX}{HZ} \cdot \frac{KZ}{KY} = 1$$

Áp dụng định lý Menelaus đảo cho $\triangle XYZ$ ta được H, I, K thẳng hàng (đpcm)

Trở lại bài toán:



Kẻ đường kính DQ' của (O) , gọi E' là giao của AQ' với CB

Áp dụng định lý Pascal cho bộ $\begin{pmatrix} A & B & D \\ C & Q' & A \end{pmatrix}$ với $AQ' \cap BC = E', AA \cap DC = T, BA \cap Q'D = O$

Do đó T, O, E' thẳng hàng hay $E \equiv E'$ vậy nên DQ là đường kính của (O)

Hoàn toàn tương tự CP cũng là đường kính của (O) do đó $DCQP$ là hình chữ nhật.

Câu 18. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

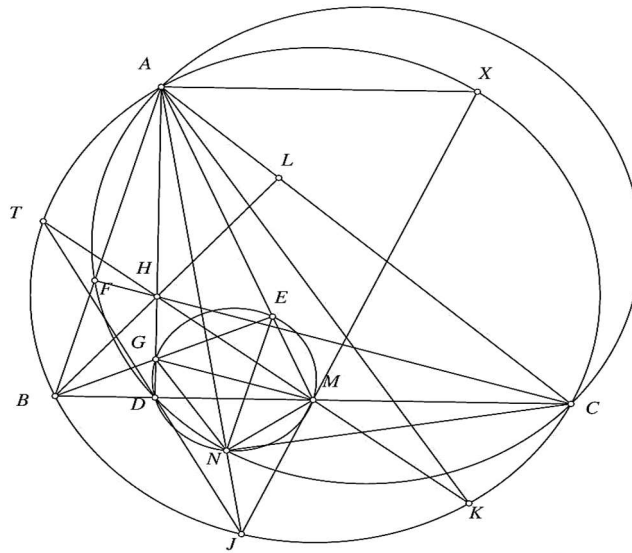
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Hai đường cao AD, CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Tia MH cắt đường tròn (O) tại điểm T . Kẻ đường kính AK của đường tròn (O) .

a) Chứng minh ba điểm T, H, K thẳng hàng.

b) Đường thẳng qua B và vuông góc với đường thẳng AM tại điểm E , cắt đường thẳng AD tại điểm G . Đường tròn ngoại tiếp tam giác MDG cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ADC tại hai điểm D và N . Chứng minh đường thẳng NE song song với đường thẳng BF .

c) Kẻ dây cung AX của đường tròn (O) sao cho đường thẳng AX song song với đường thẳng BC . Chứng minh ba đường thẳng MX, TD và AN đồng quy.

Lời giải



a) Do AK là đường kính nên ta thấy $\widehat{ABK} = \widehat{ACK} = 90^\circ$ mà $BH \perp AC, CH \perp AB$ nên $BHCK$ là hình bình hành. Từ đó suy ra H, M, K thẳng hàng hay ta có T, H, K thẳng hàng.

b) Ta thấy $\triangle NMC \sim \triangle NGA$ (g-g) nên $\frac{NM}{NG} = \frac{MC}{AG} = \frac{MB}{AG}$

Để ý G là trực tâm tam giác ABM nên $\triangle MEB \sim \triangle GEA$ (g-g), suy ra $\frac{MB}{AG} = \frac{ME}{EG}$

Vậy suy ra $\frac{NM}{NG} = \frac{ME}{EG}$ nên $\triangle MEG = \triangle MNG$ (c-g-c) hay E, N đối xứng nhau qua MG .

Mặt khác dễ dàng thấy $MG \perp AB$ nên $NE \parallel AB$.

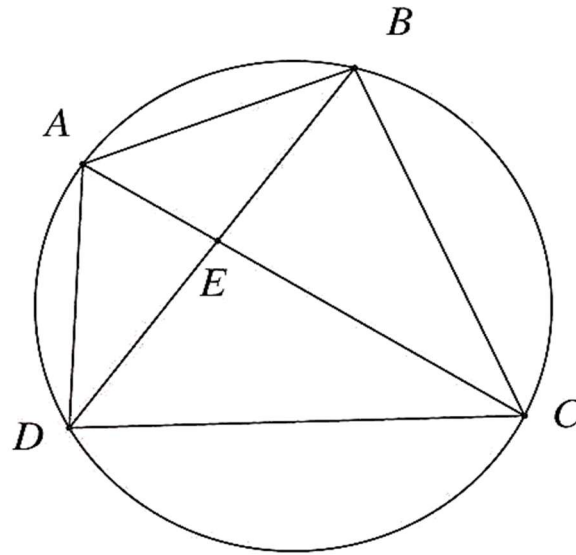
c) Dựa vào câu a) ta có $\widehat{NAC} = \widehat{NDM} = \widehat{NGM} = \widehat{EGM} = \widehat{BAM}$.

Điều này chứng tỏ AN, AM đối xứng nhau qua phân giác $\widehat{BAC}$. Nếu lấy J là giao điểm của AN với (O) thì $\triangle ABM \sim \triangle AJC$ và $\triangle ABJ \sim \triangle AMC$ (g-g). Từ đó dễ dàng rút ra

Đến đây chúng ta sử dụng bổ đề sau:

Bổ đề cát tuyến. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . AC cắt BD tại E . Chứng minh rằng

$$\frac{EA}{EC} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}.$$



Chứng minh. Ta có hai cặp tam giác đồng dạng là $\triangle AEB \sim \triangle DEC$ và $\triangle AED \sim \triangle BEC$. Suy ra

$$\frac{EA}{EC} = \frac{EA}{EB} \cdot \frac{EB}{EC} = \frac{AD}{BC} \cdot \frac{AB}{CD} = \frac{AD \cdot AB}{CB \cdot CD}.$$

Nhận xét. Ngược lại nếu có điểm E trên AC thỏa mãn $\frac{EA}{EC} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}$, thì ta cũng suy ra được E nằm trên BD .

Quay lại bài toán ban đầu.

Ta thấy $AX \parallel BC$ nên $AXCB$ là hình thang cân, suy ra $\frac{JB}{JC} \cdot \frac{XB}{XC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} = 1 = \frac{MB}{MC}$.

Vậy cho nên J, M, X thẳng hàng.

Tiếp tục áp dụng bổ đề cho tứ giác $TBKC$ thì

$$\frac{TB}{TC} = \frac{KC}{KB} = \frac{\sin \widehat{KAC}}{\sin \widehat{KAB}} = \frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{BD}{CD} \cdot \frac{AC}{AB}.$$

Điều này tương đương với $\frac{TB}{TC} \cdot \frac{JB}{JC} = \frac{DB}{DC}$.

Áp dụng bổ đề thêm lần nữa, ta có T, D, J thẳng hàng.

Từ các chứng minh trên ta suy ra MX, TD, AN đồng quy.

Câu 19. (Trường chuyên KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

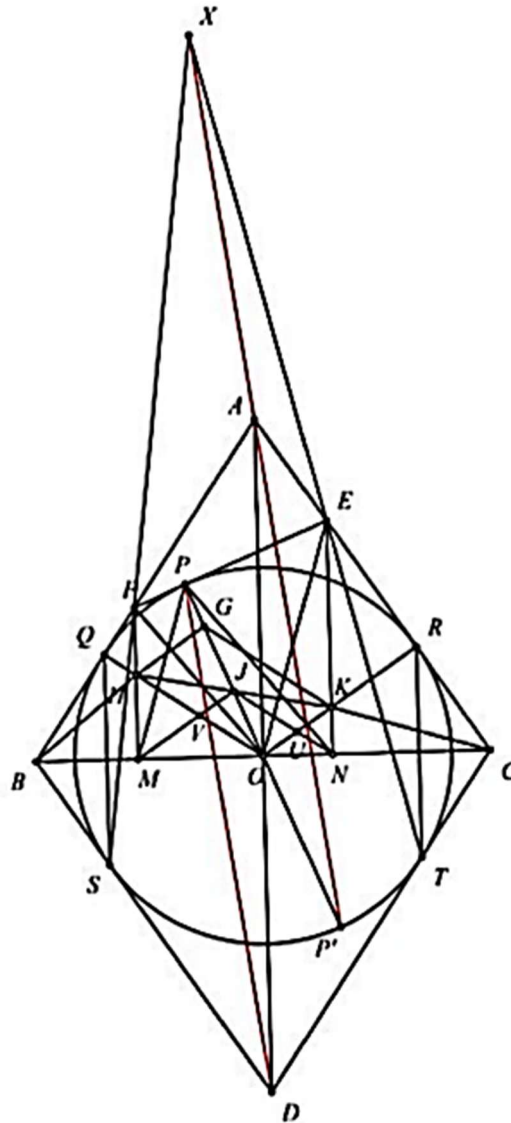
Cho tam giác ABC cân tại A có O là trung điểm BC và $\widehat{BAC} < 90^\circ$. Xét đường tròn (O) tiếp xúc các cạnh CA, AB theo thứ tự tại R, Q . Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy E, F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho EF tiếp xúc (O) tại P và EF không song song BC . Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác OFB, OEC . Gọi giao điểm của FH, EK với BC lần lượt là M, N .

a) Chứng minh rằng hai tam giác OHM, OKN đồng dạng và $\frac{OK}{OH} = \frac{AE}{AF}$.

b) Dựng điểm G sao cho $OHGK$ là hình bình hành. Chứng minh rằng O, G, P thẳng hàng.

c) Lấy S, T lần lượt đối xứng với Q, R qua BC . Giả sử X là giao điểm của SF và TE , D là giao điểm của BS và CT . Chứng minh rằng AX song song với PD .

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{MHO} = \widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{OKN}$

Suy ra: $\Delta HMO \sim \Delta KNO$

$$\text{Từ đó } \frac{HO}{KO} = \frac{OM}{ON} = \frac{OM}{OB} \cdot \frac{OB}{ON} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AE}.$$

b) Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác PMN . U, V lần lượt là trung điểm của OK, OH .

$$\text{Ta có: } \widehat{JMN} = 90^\circ - \widehat{MPN} = 90^\circ - \widehat{OEN} - \widehat{OFM} = 90^\circ - \widehat{EOF} = 90^\circ - \widehat{ECO} = \widehat{KOC}$$

Suy ra: $JM \parallel KO$

Mà $\Delta HMO \sim \Delta KNO$ nên $\widehat{VMO} = \widehat{VOM} = \widehat{KON}$ suy ra $VM \parallel KO$

Từ đó M, V, J thẳng hàng

Tương tự, J, U, N thẳng hàng

Từ đó J là trung điểm của HK

$$\text{Mà } \widehat{JPN} = 90^\circ - \widehat{PMN} = 90^\circ - \widehat{OFE} = 90^\circ - \widehat{EOC} = \widehat{OEN} = \widehat{OPN}$$

Suy ra P, J, O thẳng hàng. Vậy P, G, J, O thẳng hàng.

c) Kẻ đường kính PP' của (O) . Chú ý rằng $ABDC$ là hình thoi nên $AP' \parallel PD$

Vậy chỉ cần chứng minh X, A, P' thẳng hàng

Ta phát biểu và không chứng minh một bổ đề quen thuộc

Bổ đề: Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I) . (I) tiếp xúc với BC tại D . Kẻ đường kính DD' của (I) . Khi đó AD' đi qua tiếp điểm của đường tròn bàng tiếp góc A với BC .

Câu 20. (Trường chuyên Tin KHTN Hà Nội năm 2025 – 2026)

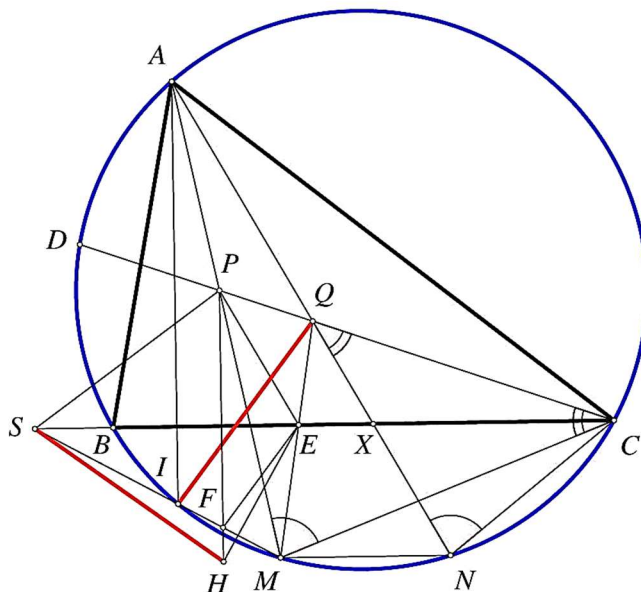
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Đường thẳng qua A và vuông góc với đường thẳng BC , cắt đường tròn (O) tại điểm $I (I \neq A)$. Lấy điểm M thuộc cung nhỏ IC của đường tròn (O) sao cho $MB < MC$. Kẻ dây cung MN của đường tròn (O) sao cho đường thẳng MN song song với đường thẳng BC . Tia phân giác của góc ACB cắt hai đường thẳng AM và AN lần lượt tại hai điểm P và Q .

a) Chứng minh $CM \cdot CQ = CP \cdot NQ$.

b) Gọi E là giao điểm của đường thẳng MQ với đường thẳng BC . Chứng minh đường thẳng PE song song với đường thẳng AN .

c) Gọi H là điểm đối xứng với điểm P qua đường thẳng BC . Gọi S là giao điểm của đường thẳng MI với đường thẳng BC . Chứng minh đường thẳng SH vuông góc với đường thẳng IQ .

Lời giải



a) Ta có $MN \parallel BC$ nên $\widehat{BCM} = \widehat{CMN} = \widehat{CAN}$.

Lại có $\widehat{PCM} = \widehat{PCB} + \widehat{BCM} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \widehat{CAN}$ và $\widehat{CQN} = \widehat{CAQ} + \widehat{ACQ} = \widehat{CAN} + \frac{1}{2}\widehat{ACB}$

do đó $\widehat{MCP} = \widehat{CQN}$.

Xét tam giác CMP và tam giác QNC có $\widehat{PMC} = \widehat{QNC}$ và $\widehat{MCP} = \widehat{CQN}$ nên hai tam giác này đồng dạng (g.g), từ đó ta có tỷ số $\frac{CM}{CP} = \frac{QN}{QC}$, hay $CM \cdot CQ = CP \cdot NQ$.

b) Gọi giao điểm của AN và BC là X . Ta có $MN \parallel BC$ mà $BMNC$ là tứ giác nội tiếp nên $BMNC$ là hình thang cân, do đó $MC = BN$ hay $\widehat{BCN} = \widehat{CBM} = \widehat{CAM}$. Xét tam giác MAC và tam giác NCX có $\widehat{AMC} = \widehat{CNX}$ và $\widehat{MAC} = \widehat{NCX}$, do đó tam giác MAC đồng dạng với tam giác NCX . Đến đây ta có

$$\frac{MA}{MP} = \frac{MA}{NC} \cdot \frac{NC}{MP} = \frac{MC}{NX} \cdot \frac{NQ}{MC} = \frac{NQ}{NX}.$$

Lưu ý rằng $MN \parallel BC$ nên $\frac{NQ}{NX} = \frac{MQ}{ME}$, do đó $\frac{MA}{MP} = \frac{MQ}{ME}$ suy ra $PE \parallel AN$ (định lý Thales đảo).

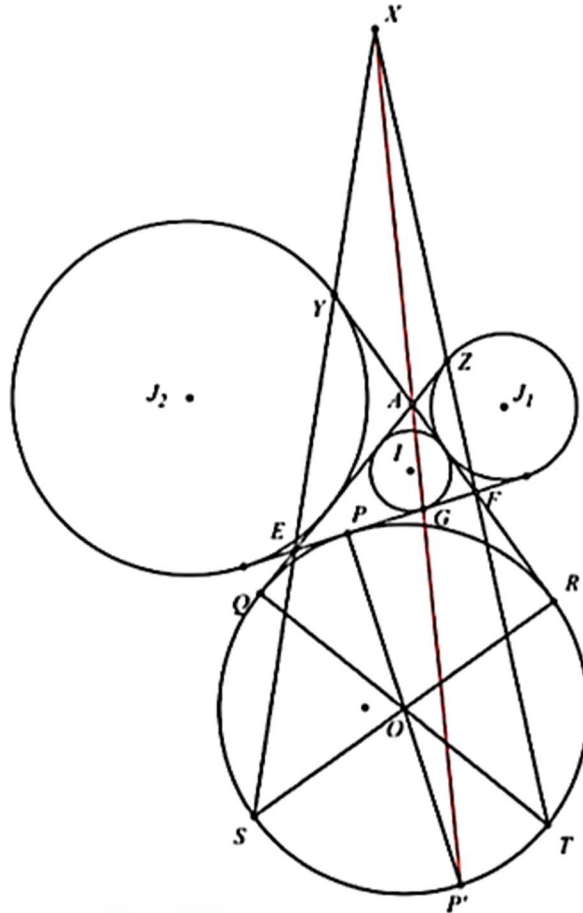
c) Gọi HP giao SM tại F . Từ câu b) ta có $PE \parallel AQ$, kết hợp với $PH \parallel AI$ ta có:

$$\widehat{EHP} = \widehat{EPH} = \widehat{MPH} + \widehat{EPM} = \widehat{PAI} + \widehat{QAP} = \widehat{NAI}$$

Lại có $\widehat{MSC} = 180^\circ - \widehat{SMC} - \widehat{SCM} = 180^\circ - \widehat{BMI} - \widehat{BMC} - \widehat{CAN} = \widehat{BAC} - \widehat{BAI} - \widehat{CAN} = \widehat{NAI}$

Do đó $\widehat{EHP} = \widehat{ESM}$. Từ đó suy ra $SM \perp EH$ hay F là trực tâm của tam giác SEH , suy ra $EF \perp SH$
Ta có $AI \parallel PF, PE \parallel AQ$ nên $\frac{MS}{MF} = \frac{MP}{MA} = \frac{ME}{MQ}$

Do đó $EF \parallel IQ$ (định lý Thales đảo), suy ra $IQ \perp SH$.



Chú ý rằng bổ đề trên có các phiên bản tương tự cho đường tròn bàng tiếp

Trở lại bài toán

Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác AEF , $(J_1), (J_2)$ lần lượt là đường tròn bàng tiếp góc E, F của tam giác AEF . (I) tiếp xúc với EF tại G .

(J_1) tiếp xúc với AE tại Z , (J_2) tiếp xúc với AF tại Y

Theo bổ đề, các ba điểm $S, E, X; T, F, Z; A, G, P'$ thẳng hàng

$$\text{Đặt } EF = a, AF = b, AE = c, \frac{a+b+c}{2} = p$$

Khi đó $EG = AY = p - d$, $FG = AZ = p - c$. ZF cắt AG tại X_1 , YE cắt AG tại X_2

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác EAG với ba điểm X_1, Z, F thẳng hàng ta có:

$$\frac{X_1A}{X_1G} \cdot \frac{FG}{FE} \cdot \frac{ZE}{ZA} = 1$$

Suy ra $\frac{X_1A}{X_1G} = \frac{a}{p-c} \cdot \frac{p-c}{p} = \frac{a}{p}$

Tương tự $\frac{X_2A}{X_2G} = \frac{a}{p}$

Suy ra $X_1 \equiv X_2$

Vậy X, A, P' thẳng hàng. Bài toán được chứng minh.

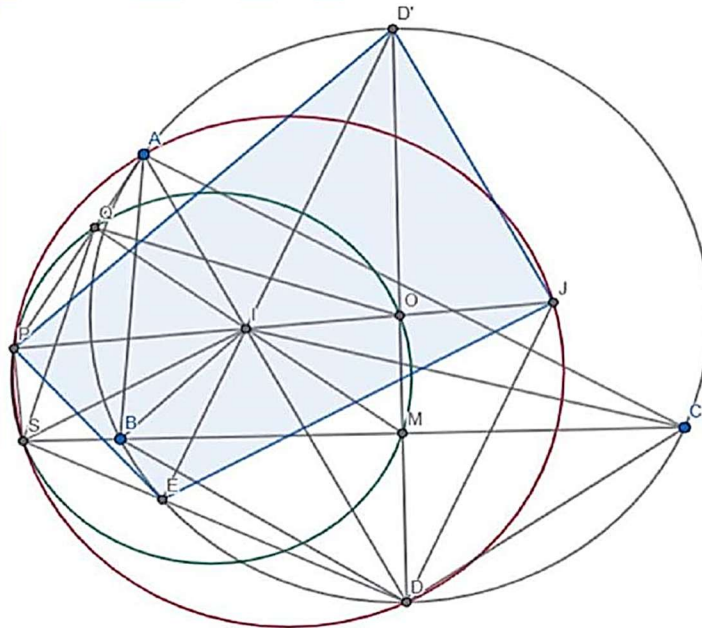
Câu 21. (Trường chuyên Hà Tĩnh năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đường thẳng AI cắt đường tròn (O) tại D (khác A), đường thẳng qua I vuông góc với AD cắt đường thẳng BC tại S . Gọi J là điểm đối xứng của I qua O .

a) Chứng minh D là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC và SDJ là tam giác vuông.

b) Gọi P là hình chiếu vuông góc của S trên đường thẳng OI . Gọi M là trung điểm BC và Q là giao điểm (khác M) của MI với đường tròn ngoại tiếp tam giác OMS . Chứng minh ba điểm A, P, Q thẳng hàng.

Lời giải



$$\text{a) Ta có } \widehat{BID} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2}, \widehat{DBI} = \widehat{IBC} + \widehat{DBC} = \frac{\widehat{BAC}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2}.$$

Suy ra $\widehat{BID} = \widehat{DBI}$ suy ra tam giác BID cân tại B .

Mà AD là phân giác của góc BAC , suy ra $BD = DC$.

Như vậy $DB = DC = DI$. Hay D là tâm của tam giác BIC .

Gọi D' là điểm đối xứng của D qua. Khi đó $D'IDJ$ là hình bình hành.

$$\text{Giả sử } SD \text{ cắt } (O) \text{ tại } E. \text{ Ta có: } \widehat{SIB} = 90 - \widehat{DIB} = 90 - \widehat{IBD} = 90 - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{CBA}}{2} = \widehat{ICB}.$$

Như vậy $\triangle SIB \sim \triangle SCI$ (g-g). Kết hợp với tứ giác $BCDE$ nội tiếp.

Ta dễ dàng suy ra $SI^2 = SB \cdot SC = SE \cdot SD$. Khi đó $\widehat{IED} = 90 = \widehat{D'ED}$ hay D', I, E thẳng hàng.

Suy ra $D'E$ vuông góc với SD nên tam giác SJD vuông tại D .

b) Ta có tứ giác $IPSE$ nội tiếp suy ra ta có biến đổi góc sau:

$$\widehat{IPE} = \widehat{ISE} = \widehat{IDJ} = \widehat{ID'J}.$$

Suy ra tứ giác $D'JEP$ nội tiếp. Khi đó $IP \cdot IJ = IE \cdot ID' = IA \cdot ID$

Do đó tứ giác $APQJ$ nội tiếp. Do đó:

$$\widehat{APJ} = \widehat{IDJ} = \widehat{ISD} = \widehat{OMQ} = \widehat{QPJ}.$$

Vậy A, P, Q thẳng hàng.

Câu 22. (Trường chuyên Hải Dương năm 2025 – 2026)

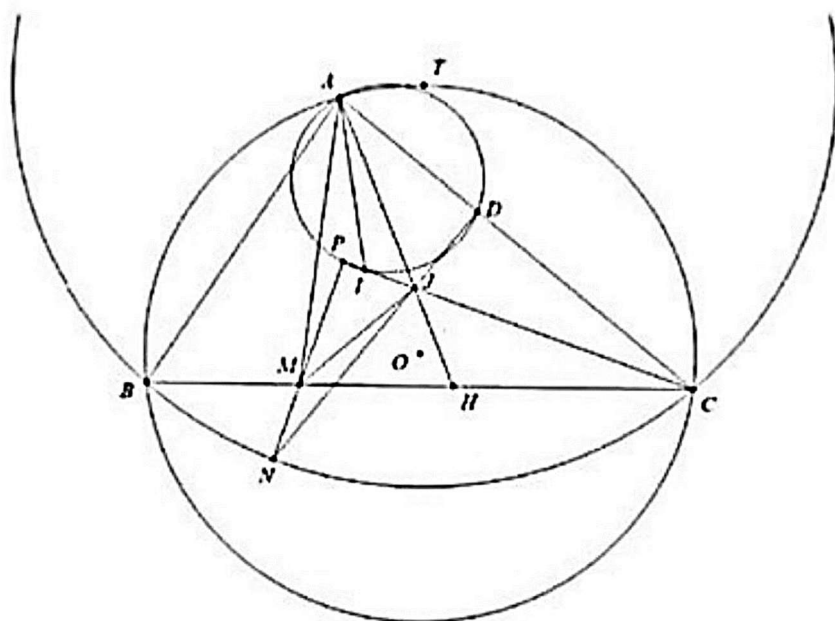
Cho đường tròn (O) cố định và điểm A cố định trên (O) , các điểm B, C thay đổi trên (O) sao cho B, C không trùng A và $AC < BC$. Điểm M trên đoạn BC sao cho $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC và BI cắt AC tại D . Gọi J là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAC .

a) Chứng minh rằng hai tam giác CJM và CIA đồng dạng.

b) Gọi P là giao điểm khác I của đường thẳng CI và đường tròn ngoại tiếp tam giác AID , đường thẳng PM cắt đường thẳng JD tại N . Chứng minh rằng bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.

c) Gọi T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BNC . Chứng minh khi B, C thay đổi trên (O) thì T luôn thuộc một đường cố định.

Lời giải



a) Từ giả thiết ta có $\widehat{MAC} = \widehat{ABC}$ và $\widehat{ACM} = \widehat{BCA} \Rightarrow \Delta MAC \simeq \Delta ABC$ (g.g.).

Lại có J, I lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle MAC, \triangle ABC \Rightarrow \triangle CJM \sim \triangle CAI$.

b) Do $\triangle CIA \sim \triangle CJM$ nên $\frac{CM}{CJ} = \frac{CA}{CI}$. Mà tứ giác $AJPD$ nội tiếp nên $CI \cdot CP = CD \cdot CA \Rightarrow \frac{CP}{CD} = \frac{CA}{CI}$.

Do đó $\frac{CM}{CJ} = \frac{CP}{CD}$, lại có $\widehat{MCP} = \widehat{CDD} \Rightarrow \Delta MCP \sim \Delta JCD (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{CPM} = \widehat{CDJ}$.

Suy ra tứ giác $NCDP$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{PWD} = \widehat{PCD} = \widehat{MCJ} \Rightarrow$ bốn điểm N, M, J, C thuộc một đường tròn.

c) Kéo dài AJ cắt BC tại H và gọi T là điểm chính giữa cung BAC .

Ta có: $\widehat{HAD} = \frac{1}{2} \widehat{ABC} = \widehat{HBD} \Rightarrow$ tứ giác $ABHD$ nội tiếp. Kết hợp với tứ giác $AHPD$ nội tiếp ta có:

$$\widehat{APJ} = 180^\circ \cdot \widehat{API} = 180^\circ \cdot \widehat{ADI} = 180^\circ \cdot \widehat{AHB} = \widehat{CHJ}$$

Suy ra $APHC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow JA.JH = JC.JP$ mà $NPDC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow JD.JN = JC.JP$.

Do đó $JA.JH = JD.JN \Rightarrow$ tứ giác $ADHN$ là tứ giác nội tiếp. Kết hợp với tứ giác $ABHD$ nội tiếp

$\Rightarrow$ Năm điểm A, D, H, N, B đồng viên $\Rightarrow$ tứ giác $ABND$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{BND} = 180^\circ - \widehat{BAC}$.

Hơn nữa, $\widehat{CDN} = \widehat{CMJ} = \frac{1}{2}\widehat{CMA} = \frac{1}{2}\widehat{CAB}$ nên ta có:

$$\widehat{BNC} = \widehat{BND} + \widehat{CND} = 180^\circ \cdot \widehat{BAC} + \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 180^\circ \cdot \frac{1}{2} \widehat{BAC} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BTC}$$

Từ đó, ta có $\widehat{BNC} = 180^\circ - \frac{1}{2} \widehat{BTC}$. Mà $TB = TC$ nên N nằm trên đường tròn tâm T bán kính TB . $\Rightarrow T$ là tâm đường tròn (BNC) . Mà T thuộc (O) cố định nên tâm (BNC) di chuyển trên 1 đường cố định. Kết thúc chứng minh.

Câu 23. (Trường chuyên Hải Phòng năm 2025 – 2026)

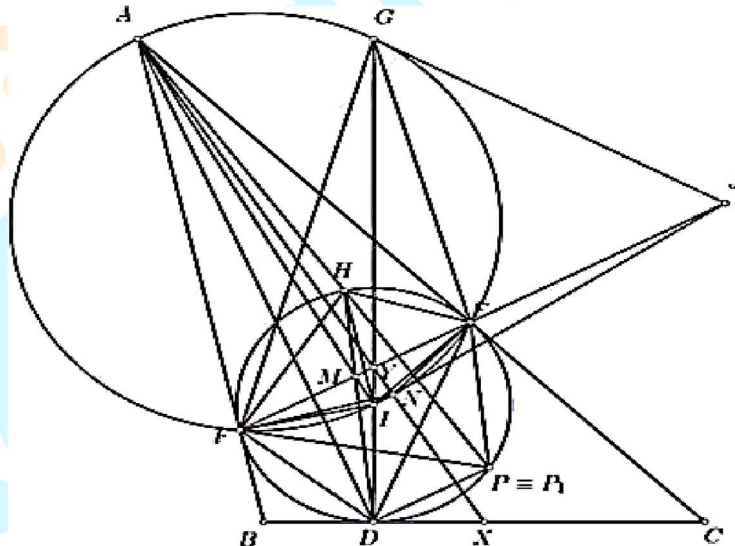
Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc BC, AC, AB lần lượt tại các điểm D, E, F . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng EF , tia DM cắt đường tròn (I) tại điểm H (H khác D)

a) Chứng minh rằng $MD \cdot MH = MI \cdot MA$.

b) Tia AH cắt đường tròn (I) tại điểm P (P khác H) Chứng minh rằng hai đường thẳng DP và EF song song

c) Gọi X là trung điểm của đoạn thẳng BC , đoạn thẳng AX cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm N (N khác A), tia DI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF tại điểm G (G khác I) Chứng minh rằng tiếp tuyến tại G , tiếp tuyến tại N của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường thẳng EF đồng quy.

Lời giải



a) Tứ giác $DEHF$ nội tiếp (I) và M là giao điểm của EF và DH nên $MD \cdot MH = ME \cdot MF$

Mặt khác AE, AF là tiếp tuyến của (I) tại E, F nên $ME \cdot MF = ME^2 = MI \cdot MA$

Từ đó ta có điều phải chứng minh

b) Từ câu (1) ta suy ra tứ giác $ADIH$ nội tiếp nên $\widehat{DAI} = \widehat{DHI} = \widehat{HDI} = \widehat{HAI}$, dẫn đến AI là tia phân giác góc DAP .

Lấy P trên tia AP sao cho $AD = AP_1$ suy ra $\triangle AID = \triangle AIP_1$ (c.g.c), từ đó ta có $ID = IP_1$ và tam giác ADP' cân tại A .
 Vậy nên $P_1 \in (I) \Rightarrow P \equiv P_1$, suy ra $AI \perp DP$, ma $AI \perp EF$, nên ta thu được $DP \parallel EF$.

c) Theo tính chất quen thuộc, ta có AX, DG, EF đồng quy tại điểm Y .

Theo tính chất đường phân giác, ta có $\frac{NE}{NF} = \frac{YE}{YF} = \frac{GE}{GF}$.

Gọi J là giao điểm của tiếp tuyến tại G của $\odot(AEF)$ và EF .

Cho JN cắt tại $\odot(AEF)$ tại N_1 .

Khi đó ta có

$$\frac{NE}{N_1F} = \frac{dN}{JF} \quad \text{và} \quad \frac{N_1E}{NF} = \frac{JN_1}{JF},$$

suy ra

$$\frac{NE}{NF} \cdot \frac{N_1E}{N_1F} = \frac{JN \cdot JN_1}{JF^2} = \frac{JG^2}{JF^2}.$$

Mặt khác, ta là có $\frac{NE}{NF} = \frac{GE}{GF} = \frac{JG}{JF}$ nên $\frac{N_1E}{N_1F} = \frac{JG}{JF} = \frac{NE}{NF}$, dẫn đến $N_1 \equiv N$.

Từ đó, ta cũng thu được JN là tiếp tuyến của $\odot(AEF)$, tức là tiếp tuyến tại G , tiếp tuyến tại N của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF và đường thẳng EF đồng quy.

Hoàn tất bài toán.

Câu 24. (Trường chuyên Hòa Bình năm 2025 – 2026)

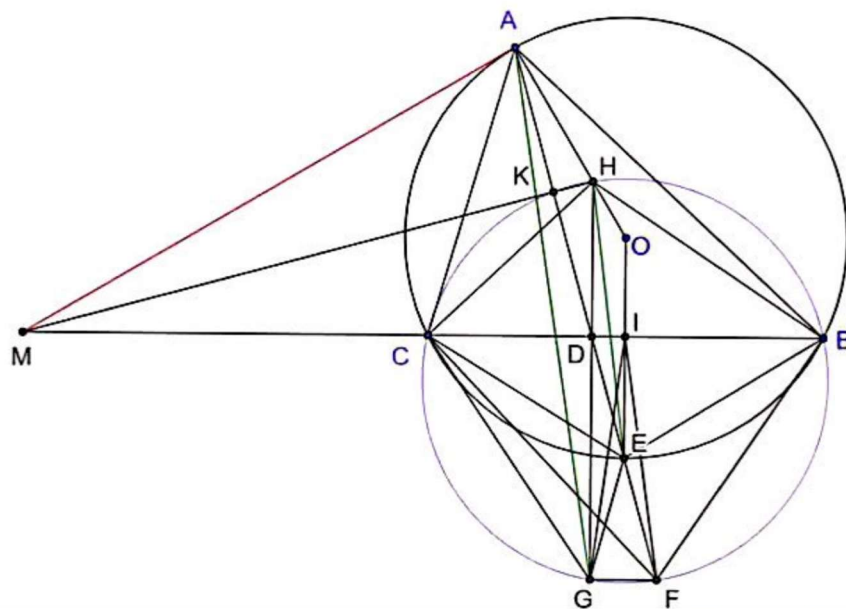
Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , ($AB > AC$). Lấy E là điểm chính giữa của cung BC (cung BC không chứa điểm A), đoạn thẳng AE cắt cạnh BC tại D . Gọi F là điểm đối xứng với D qua E . Qua điểm D kẻ đường thẳng d vuông góc với BC . Kẻ FG vuông góc với d (G thuộc d). Gọi H là giao điểm của đường thẳng d với đoạn thẳng OA .

a) Chứng minh: $HA = HD$ và tam giác DHA đồng dạng với tam giác DEG .

b) Chứng minh: $BCGF$ là hình thang cân.

c) Đoạn thẳng AD cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH tại K , đường thẳng HK cắt đường thẳng BC tại M . Chứng minh: MA là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Lời giải



a) Vì E là điểm chính giữa của cung BC không chứa A của (O) nên $EC = EB$. Mà $OC = OC \Rightarrow OE$ là trung trực của $BC \Rightarrow OE \perp BC$.

Theo giả thiết ta có $DH \perp BC \Rightarrow DH \parallel OE$.

Do vậy, $\widehat{HDA} = \widehat{OEA}$ (đồng vị) $= \widehat{OAE}$ (do $OA = OE$ nên $\triangle OAE$ cân tại O).

Suy ra: $\triangle HDA$ cân tại $H \Rightarrow HD = HA$.

Xét $\triangle DGF$ có $\widehat{DGF} = 90^\circ$ và E là trung điểm của DF nên $ED = DF = DG$.

Do đó: $\triangle EGD$ cân tại $E \Rightarrow \widehat{EGD} = \widehat{EDG} = \widehat{HDA}$ (hai góc đối đỉnh) $= \widehat{HAD}$.

Do vậy ta có tam giác DHA đồng dạng với tam giác DEG .

b) Theo phần a) ta có $EG = EF$ nên E nằm trên trung trực của DF (1).

Lại có: $FG \perp d; BC \perp d \Rightarrow FG \parallel BC$ (2).

Mà OE là trung trực của BC nên $OE \perp GF$ (3)

Từ (1) và (3) $\Rightarrow OE$ cũng là trung trực của GF .

Gọi I là giao điểm của đường thẳng OE và đoạn thẳng $BC \Rightarrow I$ là trung điểm của BC .

Khi đó: $IG = IF; IC = IB$ (4).

Lại có: IE là trung trực của GF và ΔIGF cân tại I nên IE là tia phân giác của $\widehat{GIF}$.

Như vậy: $\widehat{CIG} = \widehat{CIE} - \widehat{GIE} = 90^\circ - \widehat{GIE} = \widehat{BIE} - \widehat{FIE} = \widehat{BIF}$ (5)

Từ (4) và (5) ta có: $\triangle CIG = \triangle BIF$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{ICG} = \widehat{IBF}$ (6)

Từ (2) và (6) ta suy ra: $BCGF$ là hình thang cân thang cân với đáy BC và GF .

c) Chứng minh được $AHEG$ là tứ giác nội tiếp.

Chú ý rằng $ACEB$ cũng là tứ giác nội tiếp.

Do đó theo tính chất quen thuộc của tứ giác nội tiếp ta có: $DH \cdot DG = DA \cdot DE = DC \cdot DB$

Suy ra: $HCGB$ là tứ giác nội tiếp (7)

Theo phần b), $BCGF$ hình thang cân, do vậy $BCGF$ cũng là tứ giác nội tiếp (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow H, C, G, F, B$ cùng thuộc một đường tròn.

Lại có: $\widehat{HGF} = 90^\circ$ nên H, C, G, F, B thuộc đường tròn đường kính HF .

Theo giả thiết, điểm K thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác BCH nên điểm K cũng thuộc đường tròn đường kính $HF \Rightarrow \widehat{KFF} = 90^\circ \Rightarrow HK \perp AD$.

Mà $HA = HD$ nên HK là trung trực của AD .

Điểm M nằm trên HK nên $MA = MD \Rightarrow \triangle MAD$ cân tại M .

Suy ra: $\widehat{MAD} = \widehat{MDA} \Rightarrow \widehat{MAC} + \widehat{CAD} = \widehat{BAD} + \widehat{ABC}$ (9)

Vì AD là phân giác của $\widehat{BAC}$ nên $\widehat{CAD} = \widehat{BAD}$ (10)

Từ (9) và (10) $\Rightarrow \widehat{MAC} = \widehat{ABC}$.

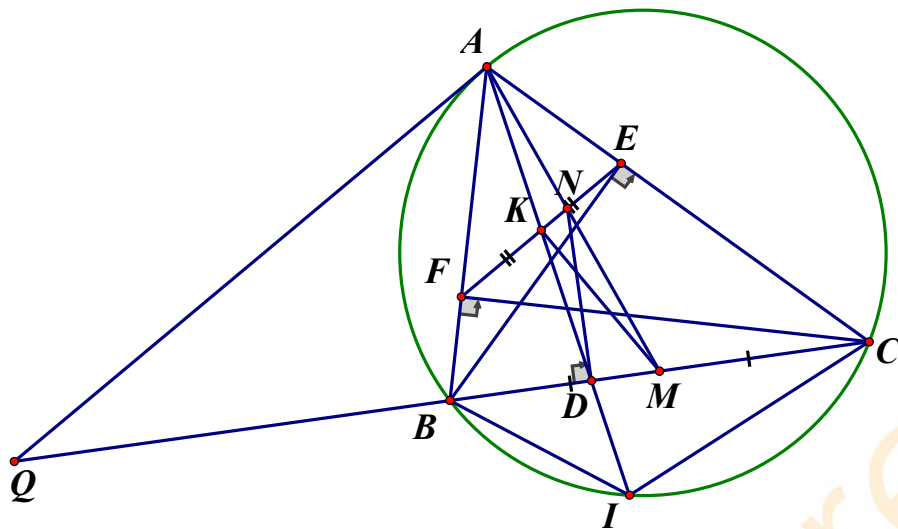
Vậy MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Câu 25. (Trường chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) , có các đường cao BE, CF . Gọi M, K lần lượt là trung điểm của BC và EF , N là giao điểm của AM và EF . Kẻ ND vuông góc với BC tại D .

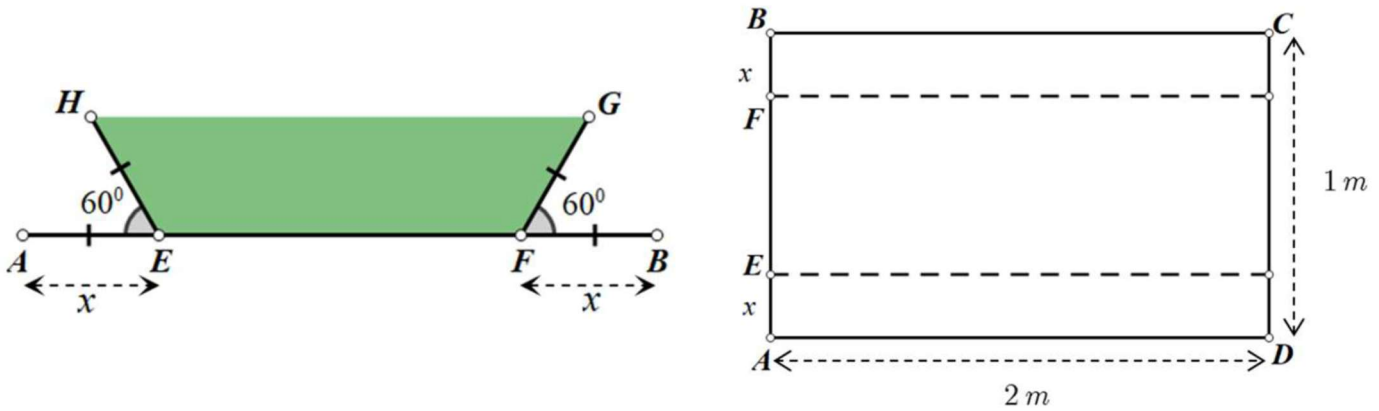
a) Chứng minh $\widehat{AKE} = \widehat{AMB}$ và A, K, D thẳng hàng.

b) Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt BC tại Q . Chứng minh $QB \cdot DC = QC \cdot DB$.



Câu 26. (Trường chuyên TP Hồ Chí Minh năm 2025 – 2026)

Anh Hà dự định làm một cái máng nước có dạng hình lăng trụ đứng có đáy là hình thang cân từ một miếng tôn có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với chiều dài 2 m và chiều rộng 1 m. Anh Hà gấp máng nước bằng cách gấp đều 2 bên chiều rộng AB của miếng tôn, mỗi bên x (m) lên một góc 60° như hình vẽ. Tìm x để diện tích $EFGH$ lớn nhất?

**Lời giải**

Dựng FP vuông góc HG tại P . Ta có : $EF = 1 - 2x$ và $EH = FG = x$

Nên $FP = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ và $HG = x + 1 - 2x = 1 - x$

Diện tích hình thang $EFGH$ là:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(EF + HG) \cdot FP &= \frac{1}{2}(1 - 2x + 1 - x) \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(-3x^2 + 2x) \\ &= \frac{-3\sqrt{3}}{4}\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{4}\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] \leq \frac{\sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

Vậy diện tích $EFGH$ lớn nhất là $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{1}{3}$.

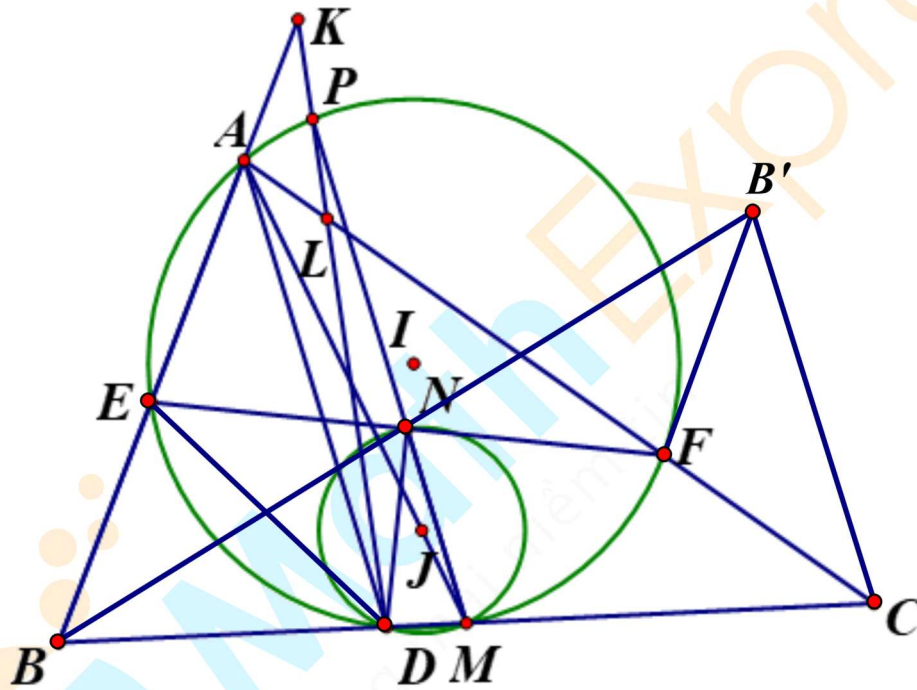
Câu 27. (Trường chuyên Thừa Thiên Huế năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC , có $AC > AB$. Tia phân giác góc A cắt cạnh BC tại D , M là trung điểm BC . Đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác ADM cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại E và F ($E, F \neq A$). Gọi N là trung điểm EF và J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác DMN .

a) Chứng minh các đẳng thức $BE.BA = BD.BM$; $CF.CA = CM.CD$ và $BE = CF$.

b) Gọi B' là điểm đối xứng với B qua N , chứng minh $B'C \parallel AD$ và ba điểm M, A, J thẳng hàng.

c) Đường thẳng MN cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai P , đường thẳng DP cắt các đường thẳng AB và AC lần lượt tại K và L . Chứng minh P là trung điểm KL .

Lời giải

a) Ta thấy tứ giác $AEDM$ nội tiếp nên $\widehat{BDE} = \widehat{BAM}$ (do cùng bù với $\widehat{EDM}$).

Suy ra tam giác $\triangle BED \sim \triangle BMA$ (g-g) nên $\frac{BE}{BM} = \frac{BD}{BA}$ hay $BE.BA = BD.BM$ (1)

Bằng cách chứng minh tương tự thì ta có $CA.CF = CM.CD$ (2)

Chú ý theo tính chất đường phân giác thì

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow DB.AC = AB.DC$$

Từ (1) và (2) ta có $CA.DB.BM.CF = BE.BA.CM.CD$ hay $BE = CF$.

b) Vì N là trung điểm của EF, BB' thì $BEB'F$ là hình bình hành nên $CF = BE = FB'$

Ta có: $\widehat{2DAC} = \widehat{ABC} = \widehat{AFB'} = \widehat{2B'CF}$

Suy ra $CB' \parallel AD$.

Ta biến đổi góc sau

$$\begin{aligned}\widehat{NDM} &= \widehat{EDM} - \widehat{EDN} = 180^\circ - \widehat{BAM} - (90^\circ - \widehat{DEF}) \\ &= 90^\circ - (\widehat{BAM} - \widehat{DEF}) = 90^\circ - (\widehat{BAM} - \widehat{BAD}) \\ &= 90^\circ - \widehat{DAM}\end{aligned}$$

Mà $\widehat{NMJ} = 90^\circ - \widehat{NDM} = \widehat{DAM} = \widehat{AMN}$ (do $MN \parallel B'C \parallel AD$)

Suy ra A, J, M thẳng hàng.

c) Ta có $\widehat{PAL} = \widehat{NMF}$ và $\widehat{APL} = \widehat{AMD} = 90^\circ - \widehat{DNM} = \widehat{MNF}$.

Suy ra $\triangle APL \sim \triangle MNF$ khi đó $\frac{AP}{MN} = \frac{PL}{NF}$

Bằng cách chứng minh tương tự thì ta cũng có $\frac{AP}{MN} = \frac{KP}{NE}$

Do đó $\frac{PL}{NF} = \frac{KP}{NE}$ hay $KP = LP$. Vậy P là trung điểm của KL .

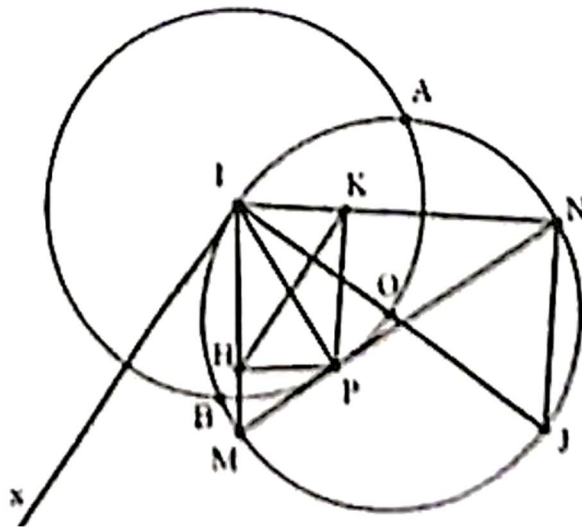
Câu 28. (Trường chuyên Hưng Yên năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm I cố định nằm trên đường tròn $(O; R)$. Gọi A, B là các giao điểm của hai đường tròn $(O; R)$ và $(I; R)$. P là điểm thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I; R)$. Đường thẳng qua P và vuông góc với IP cắt đường tròn $(O; R)$ tại M, N . Kẻ PH vuông góc với IM tại H , PK vuông góc với IN tại K .

a) Chứng minh rằng bốn điểm I, H, P, K cùng thuộc một đường tròn và HK vuông góc với OI .

b) Khi P thay đổi trên cung nhỏ AB của đường tròn $(I; R)$. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IHK .

Lời giải



a) Ta có $\widehat{IHP} = 90^\circ$ suy ra H nằm trên đường tròn đường kính IP

$\widehat{IKP} = 90^\circ$ suy ra K nằm trên đường tròn đường kính IP

Mà I, P cũng nằm trên đường tròn đường kính IP

Suy ra 4 điểm I, H, P, K cùng thuộc đường tròn đường kính IP

Kẻ tiếp tuyến Ix của $(O; R)$ tại I

$$\text{Ta có } \widehat{MIx} = 90^\circ - \widehat{MIO} = 90^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{MOI}}{2} = \frac{\widehat{MOI}}{2}$$

$$\text{Nên } \widehat{INP} = \widehat{MIx} = \frac{\widehat{MOI}}{2} (1); \widehat{INP} = \widehat{IPK} \text{ (cùng phụ với } \widehat{KPN}) (2)$$

Lại có $\widehat{IPK} = \widehat{IHK}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung IK của đường tròn đường kính IP) (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\widehat{MIx} = \widehat{IHK}$, mà chúng ở vị trí so le trong nên $HK \parallel Ix$

Mà $Ix \perp OI$ nên $HK \perp OI$ (đpcm).

b) Xét $\triangle IHK$ & $\triangle INM$ có :

$$\widehat{NIM} \text{ chung}; \widehat{IHK} = \widehat{INM} \text{ (cùng bằng } \widehat{IPK})$$

Suy ra $\triangle IHK \sim \triangle INM$ (g.g)

$$\frac{S_{IHK}}{S_{INM}} = \left(\frac{IK}{IM} \right)^2 = \left(\frac{IK \cdot IN}{IM \cdot IN} \right)^2 (4)$$

$$\text{Ta có } \triangle IKP \sim \triangle IPN \text{ (g.g) nên } \frac{IK}{IP} = \frac{IP}{IN} \Rightarrow IP^2 = IK \cdot IN = R^2 (5)$$

Kẻ đường kính IJ của $(O; R)$. Xét $\triangle INJ$ và $\triangle IPM$ có :

$$\widehat{INJ} = \widehat{IPM} = 90^\circ; \widehat{IJN} = \widehat{IMP} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{IN}$$

Suy ra $\triangle INJ \sim \triangle IPM$ (g.g) suy ra $\frac{IN}{IP} = \frac{IJ}{IM} \Rightarrow IN \cdot IM = IP \cdot IJ = 2R^2$ (6)

Thay (5), (6) vào (4) ta được $\frac{S_{IHK}}{S_{INM}} = \left(\frac{IK \cdot IN}{IM \cdot IN} \right)^2 = \left(\frac{R^2}{2R^2} \right) = \frac{1}{4}$

Suy ra $S_{IHK} = \frac{1}{4} S_{INM} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot IP \cdot MN = \frac{R}{8} \cdot MN \leq \frac{R}{8} \cdot 2R = \frac{R^2}{4}$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $P \equiv O$

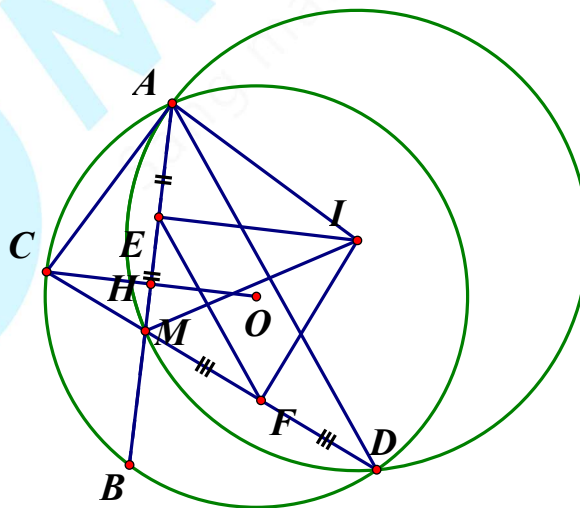
Vậy giá trị lớn nhất của diện tích tam giác IHK là $\frac{R^2}{4}$

Câu 29. (Trường chuyên Khánh Hòa năm 2025 – 2026)

Cho A, B là hai điểm cố định trên đường tròn $(O; R)$, C là điểm chính giữa cung AB và M là điểm di động trên dây cung AB ($M \neq A, M \neq B$). Tia CM cắt $(O; R)$ tại D ($D \neq C$).

- a) Chứng minh $AC^2 = CM \cdot CD$ và AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM .
 b) Cho $R = 5$ cm, $AB = 6$ cm, tính $R_1 + R_2$, với R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM và tam giác BDM .

Lời giải



a) $\widehat{CAB} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{CB} = \frac{1}{4} \text{sd } \widehat{AB}$; $\widehat{ADC} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{AC} = \frac{1}{4} \text{sd } \widehat{AB}$

$$\Rightarrow CAB = ADC$$

$$\Rightarrow \triangle CAM \sim \triangle CDA (g \cdot g)$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow CA^2 = CD \cdot CM$$

Vẽ 2 đường trung trực của AM, DM cắt nhau tại I . Khi đó I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM . Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AM và DM .

$$\text{Suy ra } EF \parallel D, \text{ nên } \widehat{EFM} = \widehat{ADM} \quad (1)$$

$$\text{Mà } \widehat{ADM} = \widehat{CAM} (\triangle CAM \sim \triangle CDA) \quad (2)$$

$$\text{Lại có tứ giác } EMFI \text{ là tứ giác nội tiếp nên } \widehat{EFM} = \widehat{EIM} \quad (3)$$

$$\text{Hơn nữa } \widehat{EIM} = \widehat{AIE} \text{ (} EI \text{ là trung trực của } AM \text{)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3), (4) suy ra: } \widehat{CAM} = \widehat{AIE}$$

$$\text{Do vậy: } \widehat{CAM} + \widehat{IAM} = \widehat{AIE} + \widehat{IAM} \Rightarrow \widehat{CAI} = 90 \text{ hay } CA \text{ vuông góc với } AI$$

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM .

b) Nối OC , vì C là điểm chính giữa cung nên OC là đường trung trực của AB . Gọi H là giao điểm của OC và AB

$$AH = \frac{AB}{2} = 3; OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$$

$$CH = OC - OH = 5 - 4 = 1$$

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\sin \widehat{CAH} = \frac{CH}{AC} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$R_1 = IA = \frac{AE}{\sin \widehat{AIE}} = \frac{AE}{\sin \widehat{CAH}} = \frac{AM \sqrt{10}}{2}$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có BC là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BMD và có

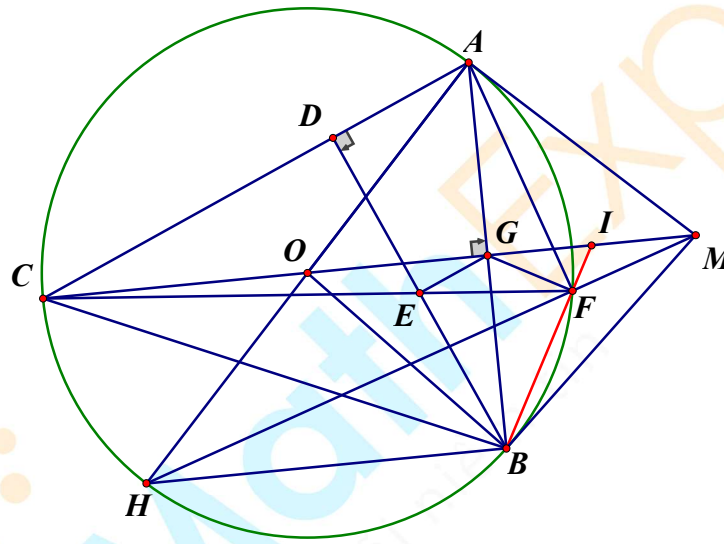
$$\text{bán kính là } R_2 = \frac{BM \sqrt{10}}{2}$$

$$\text{Như vậy } R_1 + R_2 = \frac{(AM + BM) \sqrt{10}}{2} = \frac{AB \sqrt{10}}{2} = 3\sqrt{10} \text{ (cm)}$$

Câu 30. (Trường chuyên Kiên Giang năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) và dây cung AB không là đường kính. Gọi C là điểm chính giữa của cung lớn AB . Các tiếp tuyến tại A, B của (O) cắt nhau tại M . Gọi D là hình chiếu vuông góc của B trên AC và E là trung điểm của BD . Tia CE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai F . Gọi G là giao điểm của MC với AB .

- a) Chứng minh rằng, bốn điểm B, E, F, G cùng nằm trên một đường tròn.
- b) Tia MF cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai H . Chứng minh rằng, AH là đường kính của đường tròn (O) .
- c) Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng MG . Chứng minh rằng ba điểm B, F, I thẳng hàng.

Lời giải

a) Vì C là điểm chính giữa của cung AB , nên $CA = CB$. (1)

Vì M là giao điểm của tiếp tuyến tại A và tiếp tuyến tại B , của (O) , nên $MA = MB$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra, MC là đường trung trực của AB . (3)

Do đó, G là trung điểm của AB . Mà E là trung điểm của BD , nên EG là đường trung bình của tam giác DBA . Vì thế, $EG \parallel DA$. (4)

Suy ra, $\widehat{CAB} = \widehat{EGB}$ (hai góc ở vị trí đồng vị). (5)

Vì cùng chắn cung BC của (O) , nên $\widehat{CAB} = \widehat{CFB} = \widehat{EFB}$. (6)

Từ (5) vì (6), suy ra $\widehat{EGB} = \widehat{EFB}$. (7)

Do C thuộc cung lớn AB , và D nằm trong đoạn AC (vì $BD \perp AC$ và góc ABC là góc nhọn), nên G và F nằm cùng phía đối với DB . Vì thế, từ (7) suy ra, $EGFB$ là tứ giác nội tiếp; hay, bốn điểm E, G, F, B cùng nằm trên một đường tròn. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

b) Từ (4), do $BD \perp DA$ (giả thiết), suy ra $BD \perp EG$. Vì thế, $\widehat{BEG} = 90^\circ$; suy ra, BG là đường kính của đường tròn ($EGFB$). Mà $MG \perp GB$ (do (3)), nên MGG là tiếp tuyến tại G của đường tròn ($EGFB$). Suy ra, $\widehat{MGF} = \widehat{GBF}$ (hai góc cùng chắn cung GF của đường tròn ($EGFB$)). (8)

Vì cùng chắn cung AF của (O), nên $\widehat{GBF} = \widehat{ABF} = \widehat{MAF}$. (9)

Từ (8) và (9), suy ra $\widehat{MGF} = \widehat{ABF} = \widehat{MAF}$. (10)

Do đó, $AGFM$ là tứ giác nội tiếp. Suy ra: $\widehat{BAF} = \widehat{GAF} = \widehat{GMF} = \widehat{CMH}$ (11)

Vì cùng chắn cung BF của (O), nên $\widehat{BAF} = \widehat{BHF} = \widehat{BHM}$. (12)

Từ (11) và (12), suy ra $\widehat{CMH} = \widehat{BHM}$. Do đó, $HB \parallel CM$. Mà $CM \perp AB$, nên $HB \perp AB$, hay $\widehat{ABH} = 90^\circ$. Vì vậy, AH là đường kính của đường tròn (O). Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

c) Từ (10) và (11), suy ra $\triangle AFB \sim \triangle MFG$ (g.g.). Mà G là trung điểm của AB và I là trung điểm của MG , nên $\triangle GFB \sim \triangle IFG$. Suy ra, $\widehat{BFG} = \widehat{GFI}$.

Vì BG là đường kính của đường tròn ($EGFB$) (chứng minh trên), nên $\widehat{BFG} = 90^\circ$.

Từ (13) và (14), suy ra $\widehat{BFG} + \widehat{GFI} = 180^\circ$.

Do đó, ba điểm B, F, I thẳng hàng. Ta có điều phải chứng minh theo yêu cầu đề bài.

Câu 31. (Trường chuyên Lai Châu năm 2025 – 2026)

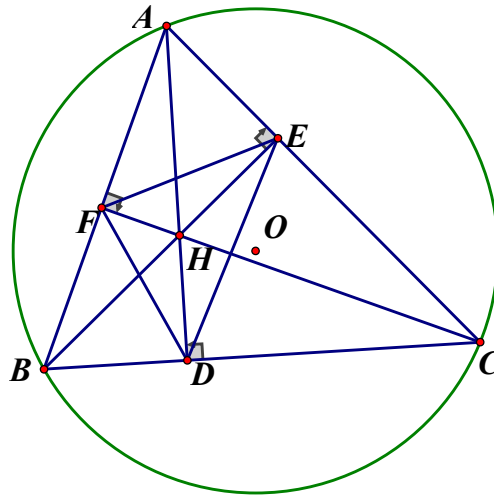
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của các đường thẳng AO với BC , BO với AC , CO với AB . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác $BCEF$ nội tiếp.

b) $DH \cdot DA = DF \cdot DE$.

c) $AM + BN + CP \geq \frac{9R}{2}$.

Lời giải



a) Tam giác BEC vuông tại E nên B, E, C thuộc đường tròn đường kính BC (1)

Tam giác BFC vuông tại F nên B, F, C thuộc đường tròn đường kính BC (2)

Từ (1) và (2) suy ra B, F, E, C thuộc đường tròn đường kính BC hay $BCEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh tương tự câu a ta có tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn đường kính AH và tứ giác $CDHE$ nội tiếp đường tròn đường kính HC

Ta có: $\widehat{FAH} = \widehat{DCH}, \widehat{DCH} = \widehat{DEH}$ suy ra $\widehat{FAH} = \widehat{DEH}$ (3)

Vì $\widehat{HDF} = \widehat{HBF}, \widehat{HBF} = \widehat{HCE}; \widehat{HBF} = \widehat{HCE}$

$\widehat{HCE} = \widehat{HDE}$ suy ra $\widehat{HDF} = \widehat{HDE}$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\triangle ADF \sim \triangle EDH$ (g-g) $\Rightarrow \frac{AD}{ED} = \frac{DF}{DH} \Rightarrow DH \cdot DA = DF \cdot DE$

c) Ta có: $\frac{OA}{AM} = \frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AOB}}{S_{AMB}} = \frac{S_{AOB} + S_{AOC}}{S_{ABC}}$

Tương tự $\frac{OB}{BN} = \frac{S_{AOB} + S_{OBC}}{S_{ABC}}; \frac{OC}{CP} = \frac{S_{AOC} + S_{OBC}}{S_{ABC}}$

Suy ra: $\frac{OA}{AM} + \frac{OB}{BN} + \frac{OC}{CP} = \frac{2(S_{OAB} + S_{OBC} + S_{OCA})}{S_{ABC}}$

$$\frac{R}{AM} + \frac{R}{BN} + \frac{R}{CP} = \frac{2S_{ABC}}{S_{ABC}}$$

$$R \left(\frac{1}{AM} + \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} \right) = 2$$

Áp dụng BĐT $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$

$$\Rightarrow 2 \geq R \cdot \frac{9}{AM+BN+CP} \Rightarrow AM+BN+CP \geq \frac{9R}{2}$$

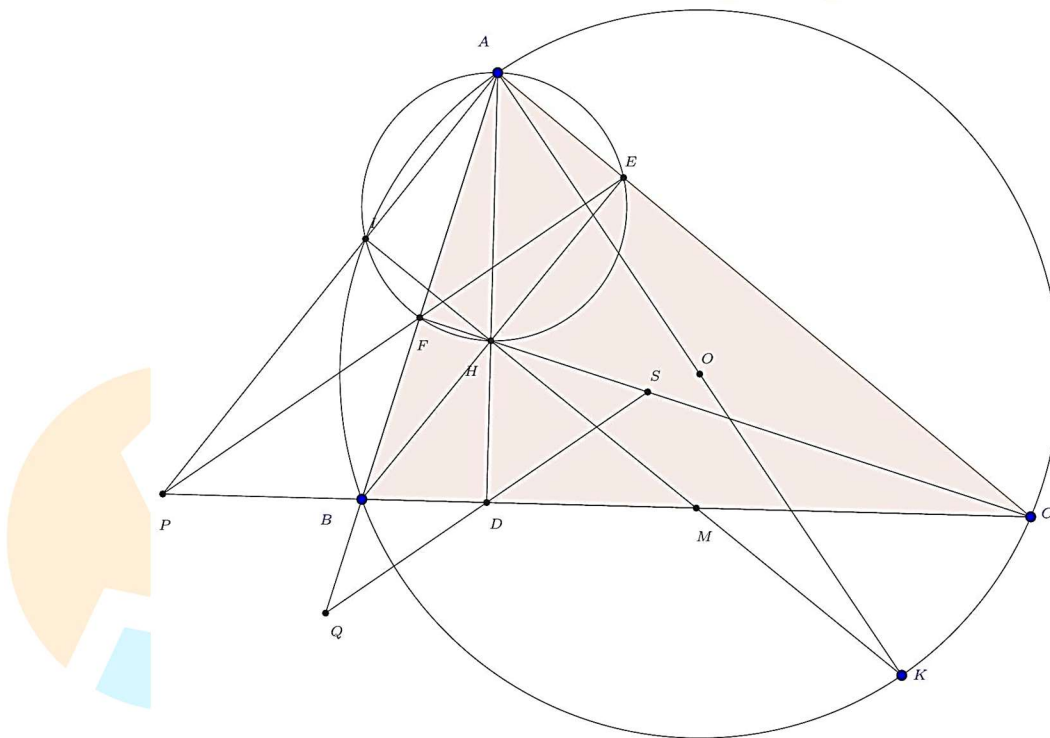
Dấu “=” xảy ra khi tam giác ABC đều.

Câu 32. (Trường chuyên Lạng Sơn năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H . Gọi P là giao điểm của đường thẳng EF và đường thẳng BC , I là giao điểm của đoạn thẳng PA với đường tròn (O) ($I \neq A$).

- Chứng minh các điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.
- Gọi M là trung điểm của BC , chứng minh ba điểm M, H, I thẳng hàng.
- Đường thẳng qua D song song với EF cắt các đường thẳng AB, CF lần lượt tại Q, S . Chứng minh D là trung điểm của QS .

Lời giải



a) Vì $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp đường tròn (BC) .

Ta có: $\mathcal{P}_{P/(BC)} = PB \cdot PC = PF \cdot PE$ và $\mathcal{P}_{P/(O)} = PB \cdot PC = PI \cdot PA$.

$$\Rightarrow PI \cdot PA = PE \cdot PF$$

Do đó tứ giác $AIEF$ nội tiếp. Mặt khác $\widehat{AFH} + \widehat{AEH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên tứ giác $AEHF$ nội tiếp đường tròn (AH) . Suy ra 5 điểm A, E, H, F, I cùng nằm trên đường tròn (AH) .

b) Kẻ đường kính AK của (O) . Vì $CK \perp AC, BH \perp AC$ nên $BH \parallel CK$. Tương tự: $CH \parallel BK$, do đó $BHCK$ là hình bình hành. Mặt khác M là trung điểm của BC nên M cũng là trung điểm của HK , hay ba điểm H, M, K thẳng hàng.

Lại có $\widehat{AIK} = \widehat{AIH} = 90^\circ$ nên I, H, K thẳng hàng hay bốn điểm I, H, M, K thẳng hàng.

Áp dụng định lý Thales, ta có: $\frac{DQ}{PF} = \frac{BD}{BP}$ và $\frac{PF}{DS} = \frac{CP}{CD}$

Nhân vế với vế 2 đẳng thức trên ta được: $\frac{DQ}{DS} = \frac{BD}{BP} \cdot \frac{CP}{CD} (*)$

Áp dụng định lý Menelaus cho $\triangle ABC$, cát tuyến EFP ta được: $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{FA}{FB} \cdot \frac{EC}{EA} = 1 \quad (1)$

Áp dụng định lý Ceva cho $\triangle ABC$ có AD, BE, CF đồng quy tại H , ta được: $\frac{DC}{DB} \cdot \frac{FB}{FA} \cdot \frac{EA}{EC} = 1 \quad (2)$

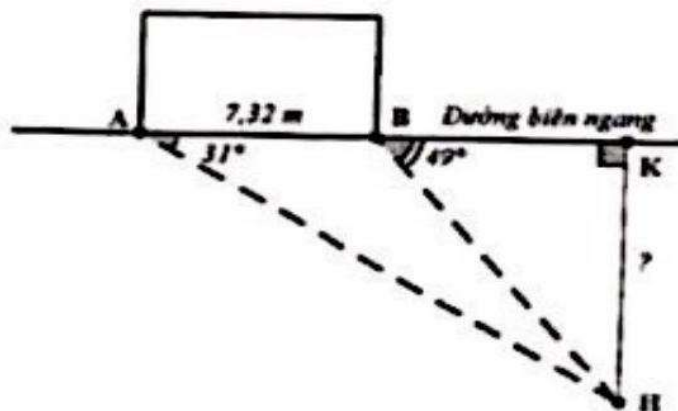
Nhân vế với vế của hai đẳng thức (1) và (2) được: $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{DC}{DB} = 1 (**)$

Từ (*) và (**) suy ra: $\frac{DQ}{DS} = 1$ hay $DQ = DS$

Vậy D là trung điểm của QS .

Câu 33. (Trường chuyên Lâm Đồng năm 2025 – 2026)

Cầu thủ Quang Hải đứng ở vị trí H , đá phạt vào khung thành đội Thái Lan trong trận tứ kết lượt đi AFF Cup năm 2021. Biết $\widehat{HAK} = 31^\circ, \widehat{HBK} = 49^\circ$ và chiều rộng khung thành $AB = 7,32$ m. Hãy tính khoảng cách HK từ vị trí của Quang Hải định đá phạt đến đường biên ngang cuối sân (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

Đặt $HK = a(m) (a > 0)$.

Ta có
$$\begin{cases} KA = HK \cdot \frac{KA}{HK} = HK \cdot \cot 31^\circ \\ KB = HK \cdot \frac{KB}{HK} = HK \cdot \cot 49^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB = KA - KB = HK \cdot (\cot 31^\circ - \cot 49^\circ)$$

$$\Rightarrow HK = \frac{AB}{\cot 31^\circ - \cot 49^\circ} = \frac{7,32}{\cot 31^\circ - \cot 49^\circ} \approx 9,2 \text{ (m)}$$

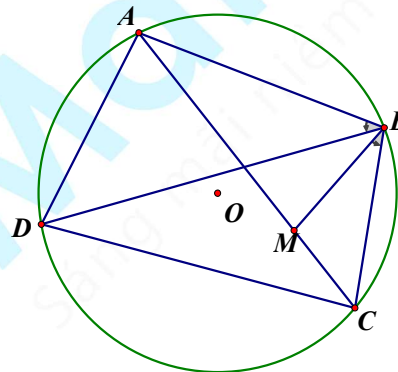
Vậy khoảng cách từ vị trí của Quang Hải đến đường biên ngang cuối sân là khoảng 9,2m.

Câu 34. (Trường chuyên Long An năm 2025 – 2026)

Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$.

- Chứng minh $\triangle ABD$ đồng dạng $\triangle MBC$.
- Chứng minh $AB \cdot CD = BD \cdot AM$.
- Chứng minh $AD \cdot BC + AB \cdot CD = BD \cdot AC$.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ADB} = \widehat{ACB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB) hay $\widehat{ADB} = \widehat{BCM}$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle MBC$ có :

$$\widehat{ABD} = \widehat{MBC} \text{ (giả thiết)} ; \widehat{ADB} = \widehat{BCM} \text{ (chứng minh trên)}$$

Suy ra $\triangle ABD \sim \triangle MBC$ (g.g)

b) Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{MBC}$ (gt) nên $\widehat{ABD} + \widehat{MBD} = \widehat{MBC} + \widehat{MBD}$ hay $\widehat{ABM} = \widehat{DBC}$

Lại có $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CB) hay $\widehat{MAB} = \widehat{CDB}$

Xét $\triangle MAB$ và $\triangle CDB$ có :

$$\widehat{ABM} = \widehat{DBC} \text{ (cmt)}; \widehat{MAB} = \widehat{CDB} \text{ (cmt)} \Rightarrow \triangle MAB \sim \triangle CDB \text{ (g.g)}$$

Suy ra $\frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD}$ suy ra $AB \cdot CD = BD \cdot AM$ (đpcm).

c) Vì

$$\triangle ABD \sim \triangle MBC \text{ suy ra } \frac{AD}{MC} = \frac{BD}{BC} \text{ suy ra } AD \cdot BC = MC \cdot BD \text{ (1)}$$

$$\triangle MAB \sim \triangle CDB \text{ suy ra } \frac{AB}{BD} = \frac{AM}{CD} \text{ suy ra } AB \cdot DC = AM \cdot BD \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $AD \cdot BC + AB \cdot CD = MC \cdot BD + AM \cdot BD = (MC + MA) \cdot BD = AC \cdot BD$ (đpcm)

Câu 35. (Trường chuyên Nam Định năm 2025 – 2026)

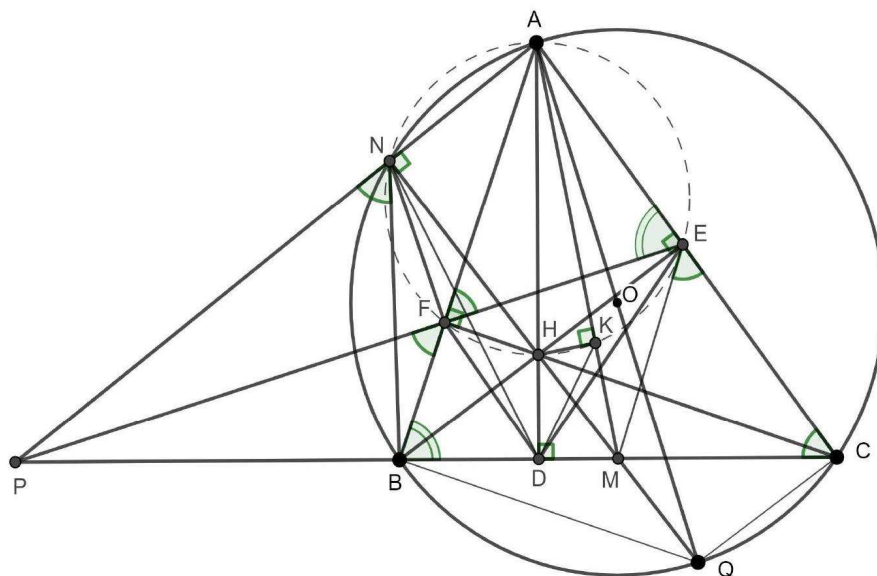
Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và $AB < AC$. Ba đường cao của tam giác ABC là AD, BE, CF đồng quy tại điểm H . Gọi AQ là đường kính của đường tròn (O) , đường thẳng HQ cắt cạnh BC tại điểm M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt đường tròn (O) tại điểm N và cắt đường thẳng AM tại điểm K (N, K khác A), đường thẳng AN cắt đường thẳng BC tại điểm P . Chứng minh rằng:

a) HQ vuông góc với AN và $\widehat{FDH} = \widehat{HDE}, \widehat{FDK} = \widehat{NDE}$.

b) Ba điểm P, E, F thẳng hàng.

c) $PE \cdot PF$.

Lời giải



a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF là đường tròn đường kính AH , suy ra $HN \perp NA$.

Mặt khác N thuộc đường tròn đường kính AQ nên $QN \perp NA$, suy ra N, H, Q thẳng hàng và có $HQ \perp AN$.

Có $\widehat{ADC} = \widehat{AFC} = 90^\circ$ nên tứ giác $ACDF$ nội tiếp, do đó $\widehat{FDB} = \widehat{BAC}$.

Tương tự có $\widehat{EDC} = \widehat{BAC}$.

Suy ra $\widehat{FDH} = 90^\circ - \widehat{FDB} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ - \widehat{EDC} = \widehat{EDH}$ (1).

Có $\widehat{ANM} = \widehat{ADM} = 90^\circ$ nên tứ giác $ANDM$ nội tiếp, suy ra $\widehat{NDH} = \widehat{HMK}$.

Có $\widehat{HDM} = \widehat{HKA} = 90^\circ$ nên tứ giác $HDMK$ nội tiếp, suy ra $\widehat{HMK} = \widehat{HDK}$.

Vậy $\widehat{NDH} = \widehat{HDK}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{FDK} = \widehat{FDH} + \widehat{HDK} = \widehat{HDE} + \widehat{NDH} = \widehat{NDE}$.

b) Tứ giác $ANFE$ nội tiếp nên suy ra $\widehat{ANF} = \widehat{FEC}$.

Có $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ nên tứ giác $BFEC$ nội tiếp, suy ra $\widehat{FEC} = \widehat{FBP}$. Vậy có

$\widehat{ANF} = \widehat{FBP}$, suy ra tứ giác $NPBF$ nội tiếp.

Theo đó $\widehat{PFB} = \widehat{PNB} = \widehat{BCA} = \widehat{EFA}$. Vậy $\widehat{PFB} = \widehat{EFA}$, mà B, F, A thẳng hàng nên P, F, E cũng thẳng hàng.

c) Chứng minh được $BHCQ$ là hình bình hành nên M là trung điểm của BC .

Tam giác EMC cân tại M nên $\widehat{MEC} = \widehat{BCA}$.

Từ đó có $\widehat{PEM} = 180^\circ - \widehat{MEC} - \widehat{FEA} = 180^\circ - \widehat{BCA} - \widehat{ABC} = \widehat{BAC} = \widehat{FDP}$.

Suy ra hai tam giác PFD, PME đồng dạng (g - g).

Suy ra $\frac{PF}{PM} = \frac{PD}{PE}$ hay $PE \cdot PF = PD \cdot PM$

Do $AB < AC$ nên $BD < DC \Rightarrow BD < \frac{BD + DC}{2} = BM \Rightarrow PD < PM$

Vậy $PE \cdot PF = PD \cdot PM < PM^2$.

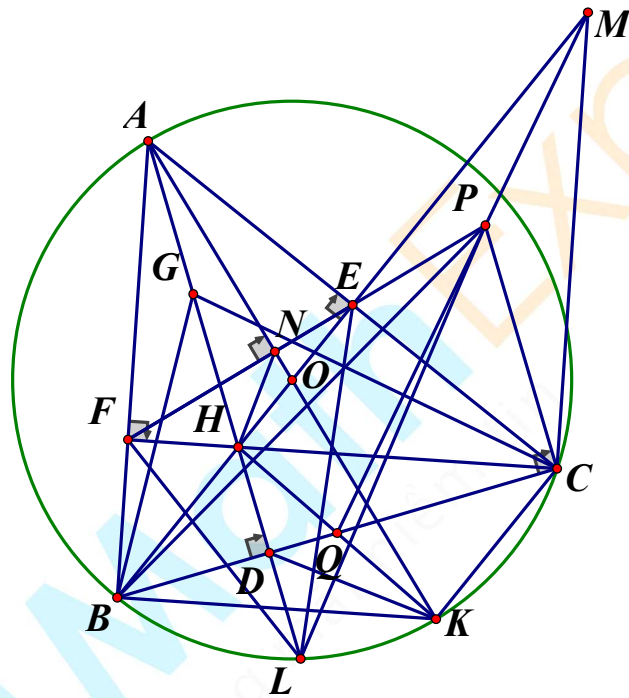
Câu 36. (Trường chuyên Nghệ An năm 2025 – 2026)

Cho $\triangle ABC$ nhọn ($AB > AC$) nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . Các đường cao AD, BE, CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Đường kính AK của đường tròn (O) cắt EF tại N .

a) Chứng minh tứ giác $BKNF$ nội tiếp và $\widehat{AKD} = \widehat{AHN}$.

b) Đường thẳng qua C song song với AB cắt đường thẳng BE tại M . Gọi Q là giao điểm của BC và HK , đường thẳng EF cắt QM tại P . Chứng minh $\triangle BPC$ vuông.

c) Giả sử A, C và đường tròn (O) cố định, $AC < R\sqrt{3}$, điểm B di động trên cung lớn AC . Xác định vị trí của điểm B để tổng chu vi của các tam giác $\triangle AEF, \triangle BFD, \triangle CED$ lớn nhất.

Lời giải

a) Vì AK là đường kính nên $\widehat{ACK} = \widehat{ABK} = 90^\circ$.

Ta chứng minh được: $\triangle AEF \sim \triangle ABC$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{AEF} = \widehat{ABC}$.

$$\text{Suy ra } \widehat{OAC} + \widehat{AEF} = \frac{180^\circ - \widehat{AOC}}{2} + \widehat{AEF} = \frac{180^\circ - 2\widehat{ABC}}{2} + \widehat{ABC} = 90^\circ.$$

Suy ra AK vuông góc với EF . Như vậy $\widehat{KNF} = 90^\circ = \widehat{ABK}$.

Từ đó suy ra được tứ giác $BFNK$ nội tiếp.

$$\text{Khi đó chứng minh được } \triangle ANF \sim \triangle ABK \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{AF}{AK} \Rightarrow AN \cdot AK = AB \cdot AF.$$

$$\text{Và } \triangle AFH \sim \triangle ADB (\text{g.g}) \Rightarrow \frac{AF}{AD} = \frac{AH}{AB} \Rightarrow AD \cdot AH = AB \cdot AF = AN \cdot AK$$

$$\text{Suy ra } \frac{AN}{AD} = \frac{AH}{AK}, \widehat{DAK} \text{ chung suy ra } \triangle AHN \sim \triangle AKD (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{AHN} = \widehat{AKD}.$$

b) Gọi G là trung điểm của AH .

Ta chú ý $BHCK$ là hình bình hành nên BC, HK cắt nhau tại trung điểm, tức là Q là trung điểm BC .

Gọi I là giao của AH và EF .

Ta chú ý hai tam giác $\triangle MBC \sim \triangle CAH$ do các cặp cạnh tương ứng vuông góc với nhau. (1)

Gọi L là giao của AD với (O) . Ta có tứ giác $NILK$ nội tiếp. Và chứng minh được

$$AB \cdot AF = AN \cdot AK = AI \cdot AL \Rightarrow \frac{AB}{AI} = \frac{AL}{AF} \quad (2)$$

Kết hợp với góc BAL chung suy ra $\triangle BIA \sim \triangle LFA \Rightarrow \widehat{ABI} = \widehat{ALF}$.

Mà DQ song song LK do cùng vuông với AL nên D là trung điểm của HL .

Ta có:

$$HF \cdot HC = HA \cdot HD = 2HG \cdot HD = HG \cdot HL$$

$$\Rightarrow \frac{HF}{HL} = \frac{HG}{HC}, \widehat{FHL} = \widehat{GHC}$$

$$\text{Suy ra } \triangle FHL \sim \triangle GHC (\text{c.g.c}) \Rightarrow \widehat{FLH} = \widehat{GCH}.$$

Kết hợp với (2) thì $\widehat{ABI} = \widehat{FLH} = \widehat{GCH}$. Ta có biến đổi góc sau:

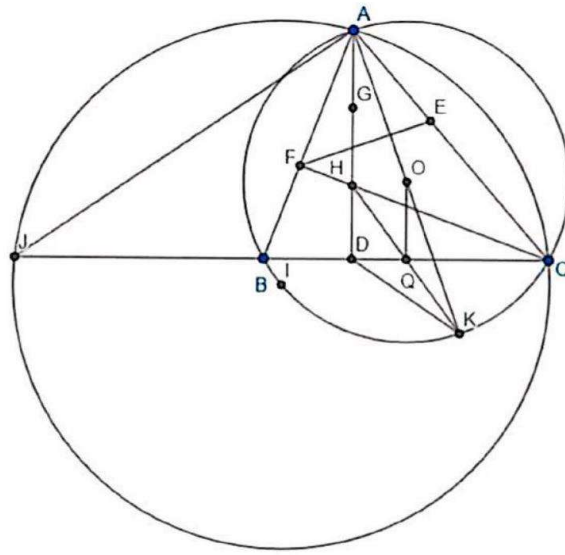
$$\widehat{IBE} = \widehat{ABE} - \widehat{ABI} = \widehat{ACH} - \widehat{GCH} = \widehat{ACG} = \widehat{BMQ} \quad (\text{do (1)})$$

Do đó BI song song với MP . Theo định lý Thales ta có

$$\frac{EI}{EP} = \frac{EB}{EM} = \frac{EA}{EC} \Rightarrow AI \parallel CP \Rightarrow \widehat{PCB} = 90^\circ$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

c)



Ta có tổng chu vi của 3 tam giác AEF, BDF, CDE là:

$$T = AF + AE + EF + BF + DF + BD + CE + CD + DE = AB + AC + BC + DE + DF + EF$$

Ta thấy OQ là đường trung bình của tam giác AHK . Suy ra $AH = 2OQ$.

Ta có: $\widehat{EGF} = 2\widehat{BAC} = \widehat{BOC} \Rightarrow \triangle EGF \sim \triangle BOC$

$$\Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{GE}{OC} = \frac{GH}{R} = \frac{OQ}{R} \Rightarrow EF = BC \cdot \frac{OQ}{R} = \frac{2S_{OBC}}{R}.$$

Do đó chứng minh tương tự ta có: $EF + DE + DF = 2 \cdot \frac{S_{OBC} + S_{OAB} + S_{OAC}}{R} = \frac{2S_{ABC}}{R}$.

Như vậy $T = AB + BC + CA + 2 \cdot \frac{S_{ABC}}{R}$.

Do A, C cố định nên AC có độ dài không đổi.

Ta thấy diện tích của tam giác ABC đạt GTLN khi B là điểm chính giữa cung lớn AC .

Ta lấy trên tia đối BC điểm J sao cho $BA = BJ$, ta có $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$ suy ra góc ABC không đổi. Mà

$\widehat{ABC} = 2\widehat{AJC}$. Gọi I là trung điểm cung lớn AC .

Suy ra $\widehat{AIC} = 2\widehat{AJC}$ nên J thuộc $(I; IA)$ cố định.

Như vậy $BC + BA = BC + BJ = JC$ đạt max khi JC là đường kính. Hay B trùng với I .

Do đó tổng $BC + BA$ đạt GTLN khi B là điểm chính giữa cung lớn AC .

Như vậy tổng chu vi của 3 tam giác AEF, BDF, CDE đạt GTLN khi B là điểm chính giữa cung lớn AC .

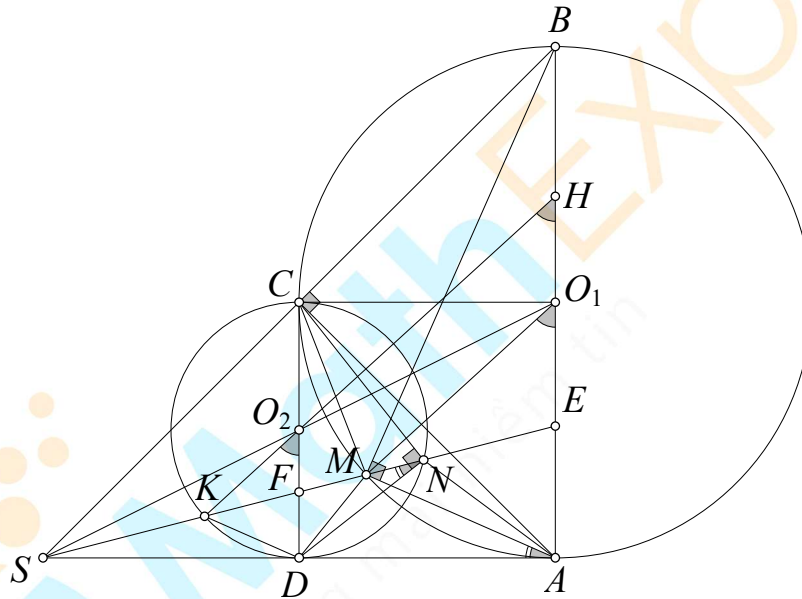
Câu 37. (Trường chuyên Ninh Thuận năm 2025 – 2026)

Cho hình thang $ABCD$, vuông tại A và D , $AD = CD = \frac{1}{2}AB$. Gọi O_1, O_2 lần lượt là trung điểm của AB và CD và E, F là trung điểm các đoạn AO_1 và DO_2 . Trên đoạn thẳng EF lấy các điểm M, N sao cho $\widehat{AMB} = \widehat{CND} = 90^\circ$.

a) Chứng minh tứ giác $ABCM$ nội tiếp.

b) Gọi S là giao điểm của AD và BC . Chứng minh các đường thẳng BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S .

c) Chứng minh bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Lời giải

a) Ta có $\widehat{AMB} = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn đường kính AB (1)

Dễ thấy tứ giác $ABCD$ là hình thang vuông và $CD = DA = \frac{1}{2}AB$ nên $ADCO_1$ là hình vuông và $BCDO_1$ là hình bình hành.

$\Rightarrow AC \perp DO_1$ và $DO_1 \parallel BC$ nên $AC \perp BC$

Vậy C thuộc đường tròn đường kính AB (2)

Từ (1) và (2) suy ra hai điểm M, C cùng thuộc đường tròn đường kính AB . Do đó tứ giác $ABCM$ nội tiếp.

b) Theo giả thiết ta có BC đi qua S (1)

Ta có $D \in SA, C \in SB$ và $DC \parallel AB; DC = \frac{1}{2}AB$ nên DC là đường trung bình của $\triangle SAB$. Suy ra D, C lần lượt là trung điểm SA, SB

Xét $\triangle SBE$ ta có C là trung điểm SB và $CF \parallel E$

$\Rightarrow CO_2$ là đường trung bình của $\triangle SBO_1$

$\Rightarrow O_2$ là trung điểm của SO_1 .

Vậy O_1O_2 đi qua S (2)

Xét $\triangle SBO_1$ ta có C là trung điểm SB và $CO_2 \parallel O_1$

$\Rightarrow CF$ là đường trung bình của $\triangle SBE$

$\Rightarrow F$ là trung điểm của SE .

Vậy EF đi qua S (3)

Từ (1) và (2) suy ra BC, EF và O_1O_2 đồng quy tại S

c) Gọi K là giao điểm của EF với đường tròn đường kính CD

H là giao điểm của KO_2 với AB

Ta có $K \in SM$, O_2 là trung điểm SO_1 và $KO_2 = \frac{1}{2}O_1M$ nên KO_2 là đường trung bình của $\triangle SO_1M$

$\Rightarrow KO_2 \parallel MO_1$

$\widehat{KO_2D} = \widehat{KHA} = \widehat{MO_1A}$ (đồng vị)

Mà $\widehat{KO_2D} = 2\widehat{KND}$ và $\widehat{MO_1A} = 2\widehat{MAD}$

$\Rightarrow \widehat{KND} = \widehat{MAD}$ hay $\widehat{MND} = \widehat{MAD}$

Vậy tứ giác $ADMN$ nội tiếp hay bốn điểm A, D, M, N cùng thuộc một đường tròn.

Câu 38. (Trường chuyên Phú Thọ năm 2025 – 2026)

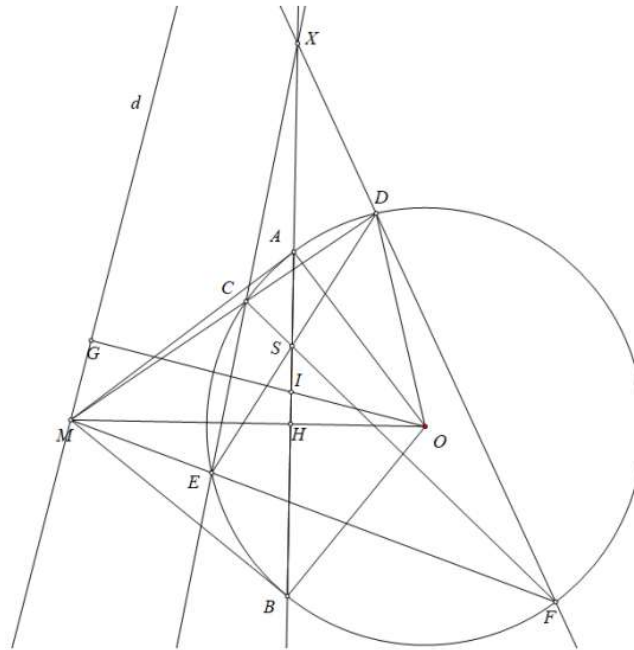
Cho đường tròn $(O; R)$ và đường thẳng (d) cố định, d và (O) không có điểm chung. Điểm M di động trên (d) . Vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm), đoạn thẳng MO cắt AB tại H . Đường thẳng a đi qua M cắt (O) tại C, D ($MC < MD$).

a) Chứng minh $MH \cdot MO = MC \cdot MD$.

b) Chứng minh điểm H luôn nằm trên một đường tròn cố định khi M di động trên (d) .

c) Vẽ đường thẳng b khác a đi qua M , cắt (O) tại $E, F (ME < MF)$. Chứng minh rằng DE, CF, AB đồng quy.

Lời giải



Xét thể hình như hình vẽ, các trường hợp khác chứng minh tương tự.

a) Xét $\triangle MAC$ và $\triangle MDA$ có $\widehat{AMC}$ chung và $\widehat{MAC} = \widehat{MDA}$ do góc tạo bởi tiếp tuyến, dây cung nên $\triangle MAC \sim \triangle MDA$.

Do đó $\frac{MA}{MD} = \frac{AC}{DA} = \frac{MC}{MA}$ dẫn đến $MA^2 = MC \cdot MD$

Theo hệ thức lượng tam giác vuông, ta có $MA^2 = MH \cdot MO$.

Từ các điều trên ta có được $MH \cdot MO = MC \cdot MD$.

b) Gọi G là hình chiếu của O lên d , OG cắt AB tại I .

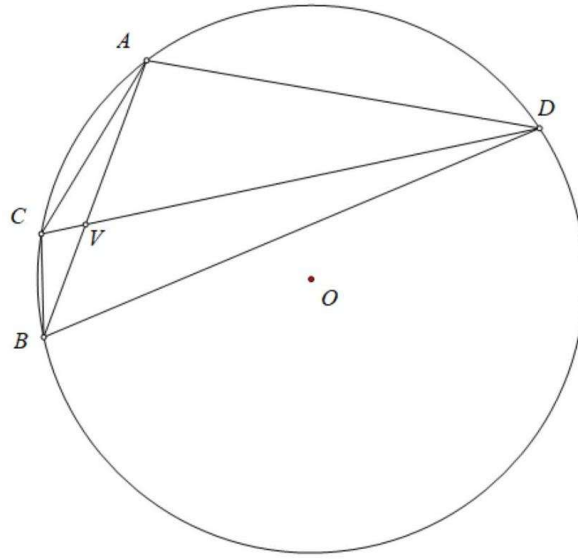
Khi này, ta có $\widehat{MGI} = \widehat{MHI} = 90^\circ$, tức tứ giác $MGIH$ nội tiếp, suy ra $OG \cdot OI = OM \cdot OH = OA^2 = R^2$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông OAM)

Từ đây có $OI = \frac{R^2}{OG}$ không đổi do $(O), d$ cố định, và cũng suy ra I cố định.

Lại có $\widehat{OHI} = 90^\circ$ nên H luôn chạy trên đường tròn đường kính OI cố định.

c) Ta chứng minh bổ đề nhỏ sau:

Cho tứ giác $CADB$ nội tiếp (O) có V là giao điểm của CD và AB . Khi ấy, ta có $\frac{VA}{VB} = \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB}$.



Chứng minh.

$$\text{Ta có: } \frac{CA}{CB} \cdot \frac{DA}{DB} = \frac{\sin \angle CBA}{\sin \angle CAB} \cdot \frac{DA}{DB} = \frac{\sin \angle ADV}{\sin \angle BDV} \cdot \frac{DA}{DB} = \frac{\frac{1}{2} DA \cdot DV \cdot \sin \angle ADV}{\frac{1}{2} DB \cdot DV \cdot \sin \angle BDV} = \frac{S_{ADV}}{S_{BDV}} = \frac{VA}{VB}.$$

Quay trở lại bài toán,

$$\text{Gọi } S \text{ là giao điểm của } CF \text{ và } AB \text{ thì ta có } \frac{SA}{SB} = \frac{AC \cdot AF}{BC \cdot BF}$$

$$\text{Gọi } S' \text{ là giao điểm của } DE \text{ và } AB \text{ thì ta có } \frac{S'A}{S'B} = \frac{AD \cdot AE}{BD \cdot BE}$$

$$\text{Ta cần chứng minh } S' \equiv S \text{ nghĩa là chứng minh } \frac{AC \cdot AF}{BC \cdot BF} = \frac{AD \cdot AE}{BD \cdot BE} \Rightarrow \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AF}{AE} = \frac{BF}{BE} \cdot \frac{BC}{BD}$$

$$\text{Để ý là } \triangle MAC \sim \triangle MDA \text{ nên } \frac{MC}{MA} = \frac{MA}{MD} = \frac{AC}{AD} \text{ suy ra } \frac{AC}{AD} = \sqrt{\frac{MC}{MA} \cdot \frac{MA}{MD}} = \sqrt{\frac{MC}{MD}}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự với } \triangle MAE \sim \triangle MFA \text{ ta được } \frac{AF}{AE} = \sqrt{\frac{MF}{ME}} \text{ nên } \frac{AC}{AD} \cdot \frac{AF}{AE} = \sqrt{\frac{MC}{MD} \cdot \frac{MF}{ME}}.$$

$$\text{Chứng minh tương tự, ta được } \frac{BF}{BE} \cdot \frac{BC}{BD} = \sqrt{\frac{MC}{MD} \cdot \frac{MF}{ME}}.$$

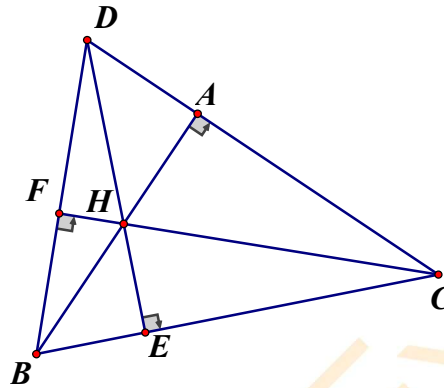
Từ đây ta có $S \equiv S'$ nên ta có ngay điều phải chứng minh.

Câu 39. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC vuông cân tại A có độ dài $BC = a$. Điểm D di động trên tia đối của tia AC sao cho $0^\circ < ABD < 45^\circ$. Gọi E là hình chiếu vuông góc của D trên đường thẳng BC , H là giao điểm của hai đường thẳng DE và AB , F là giao điểm của hai đường thẳng CH và DB .

a) Chứng minh rằng $HF \cdot HC = HE \cdot HD$.

b) Xác định vị trí của điểm D trên tia đối của tia AC sao cho $HF \cdot HC$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Do BA vuông góc AC và DE vuông góc BC nên H là trực tâm của tam HBC .

Suy ra HC vuông BD tại F .

Ta có $\widehat{DFH} = \widehat{HEC} = 90^\circ$ và $\widehat{FHD} = \widehat{EHC}$

Suy ra $\triangle FHD \sim \triangle EHC (g.g) \Rightarrow \frac{FH}{EH} = \frac{HD}{HC} \Rightarrow FH \cdot HC = HE \cdot HD$

b) Theo định lý Pythagore $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{a^2}{2}$.

Ta có: $\widehat{ADH} = 45^\circ$. Suy ra tam giác ADH vuông cân tại A và $AD = AH$.

Bằng cách chứng minh tương tự câu a thì $\triangle FHB \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{FH}{AH} = \frac{HB}{HC} \Rightarrow FH \cdot HC = HA \cdot HB$

Theo bất đẳng thức AM - GM: $FH \cdot HC = HA \cdot HB \leq \frac{(HA + HB)^2}{4} = \frac{AB^2}{4} = \frac{a^2}{8}$.

Vậy $\max(FH \cdot HC) = \frac{a^2}{8}$. Dấu bằng xảy ra khi $DA = AH = BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$.

Như vậy khi D thuộc tia đối AC sao cho $DA = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{4} a$.

Câu 40. (Trường chuyên Phú Yên năm 2025 – 2026)

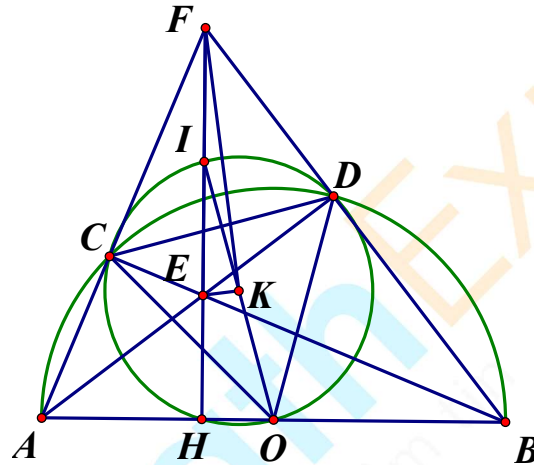
Cho đoạn thẳng AB có độ dài $AB = 2a$, O là trung điểm của AB . Trên nửa đường tròn $(O; OA)$ lấy hai điểm C, D sao cho $\angle COD = 60^\circ$ và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). Đường thẳng AD cắt đường thẳng BC tại E , hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F .

a) Chứng minh rằng $AE \cdot AD + BE \cdot BC = 4a^2$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác COD cắt đoạn thẳng EF và đoạn thẳng AB lần lượt tại I và H (H khác O). Chứng minh rằng ba điểm F, I, H thẳng hàng.

c) Gọi K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác COD . Chứng minh rằng FK là phân giác của góc AFB .

Lời giải



a) Gọi hình chiếu của E lên BC là G .

$$\text{Khi đó, ta có } \triangle AGE \sim \triangle ADB (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{AG}{AD} \Rightarrow AE \cdot AD = AB \cdot AG. (1)$$

$$\text{Và } \triangle BGE \sim \triangle BCA (g.g) \Rightarrow \frac{BE}{BA} = \frac{BG}{BC} \Rightarrow BE \cdot BC = BA \cdot BG. (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta có: } AE \cdot AD + BE \cdot BC = BA (AG + GB) = BA^2 = 4a^2.$$

b) Ta thấy $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90^\circ$ suy ra E là trực tâm của tam giác FAB . Hay EF vuông góc AB .

Gọi I' là trung điểm của EF . Khi đó ta có $I'E = I'F = I'C = I'D$.

$$\text{Ta có: } \widehat{I'DO} = 180^\circ - \widehat{I'DF} - \widehat{ODB} = 180^\circ - \widehat{I'FB} - \widehat{ABF} = 90^\circ.$$

Tương tự: $\widehat{I'CO} = 90^\circ$. Như vậy I' thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác COD .

Khi đó I trùng I . Từ đó cũng suy ra H thuộc đường tròn đường kính IO . Suy ra $\widehat{IHO} = 90^\circ$.
Do đó H trùng G và F, I, H, E thẳng hàng.

c) Ta có: $\widehat{CKD} = 2\widehat{COD} = 120^\circ$, $\widehat{CFD} = 90^\circ - \widehat{CBF} = 90^\circ - \frac{\widehat{COD}}{2} = 60^\circ$.

Suy ra $\widehat{CKD} + \widehat{CFD} = 180^\circ$. Khi đó tứ giác F, D, K, C nội tiếp.

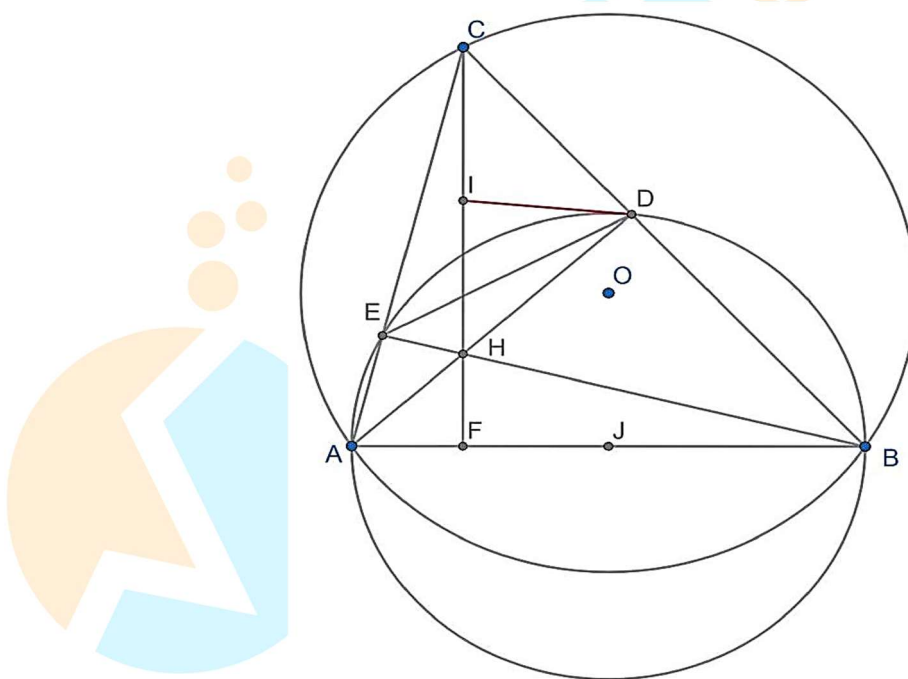
Kết hợp $KC = KD$, do đó AK là phân giác góc AFB .

Câu 41. (Trường chuyên Quảng Bình năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn $(O; R)$ cố định và hai điểm A, B cố định trên đường tròn đó ($AB \neq 2R$). Một điểm C di động trên $(O; R)$ sao cho tam giác ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H , Gọi I là trung điểm của HC . Chứng minh rằng:

- $CDHE$ là tứ giác nội tiếp đường tròn và OC vuông góc với DE .
- ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác BED .
- Đoạn thẳng DE có độ dài không đổi.

Lời giải



a) Ta thấy do tam giác CEH vuông tại E nên $IC = IH = IE$. (1)

Ta thấy do tam giác CDH vuông tại D nên $IC = IH = ID$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IC = IH = ID = IE$ nên C, D, H, E cùng thuộc một đường tròn.

Như vậy tứ giác $CDHE$ nội tiếp.

Ta có: $\widehat{OCB} = 180^\circ - \widehat{BOC} = 180^\circ - 2\widehat{BAC} = 2\widehat{ACH}$

Suy ra $\widehat{OCB} = \widehat{CAH}$ Và $\widehat{OCB} + \widehat{CDE} = \widehat{ACH} + \widehat{CAB} = 90^\circ$.

Như vậy OC vuông góc DE .

b) Gọi J là trung điểm AB . Bằng cách chứng minh tương tự như trên thì $JE = JD = JA = JB$. Khi đó tứ giác $AEDB$ nội tiếp.

Ta có biến đổi góc như sau: $\widehat{IDJ} = 180^\circ - \widehat{CDI} - \widehat{BDJ} = 180^\circ - \widehat{DCI} - \widehat{DBA} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Suy ra JD vuông ID . Mà J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDB$. Do đó ID là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD .

c) Ta thấy $\triangle CEB \sim \triangle CDA$ (g.g) suy ra: $\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \Rightarrow \triangle CED \sim \triangle CBA$ (c.g.c).

Khi đó $\frac{DE}{AB} = \frac{CD}{CA} = \cos \widehat{ACD}$. Ta thấy $\widehat{BCA} = \frac{\widehat{AOB}}{2}$ không đổi nên $\frac{DE}{AB}$ không đổi.

Vậy DE có độ dài không đổi.

Câu 42. (Trường chuyên Quảng Nam năm 2025 – 2026)

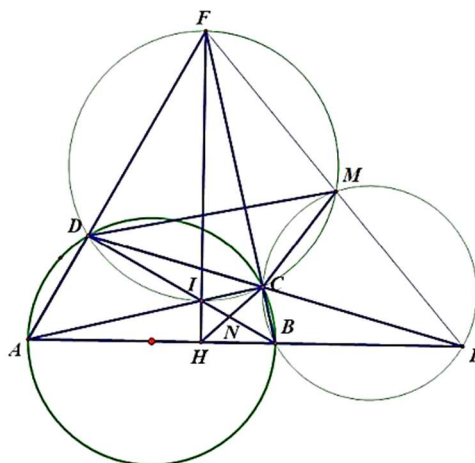
Cho tứ giác $ABCD$ có hai cặp cạnh đối không song song và tứ giác đó nội tiếp đường tròn (O) có đường kính AB . Gọi E là giao điểm của hai đường thẳng AB và CD , F là giao điểm của hai đường thẳng AD và BC . Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I . Qua I kẻ đường thẳng vuông góc với đường thẳng AB và cắt đường thẳng AB tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BCIH$ nội tiếp một đường tròn.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác CDF tại điểm thứ hai là M . Chứng minh ba điểm E, M, F thẳng hàng.

c) Gọi N là giao điểm của hai đường thẳng CH và BI . Chứng minh $BN \cdot DN = IN(BD + BN)$.

Lời giải



a) Ta có: $\widehat{IHB} = 90^\circ$ (vì $IH \perp AB$)

$\widehat{ICB} = 90^\circ$ (vì C thuộc nửa đường tròn (O))

Chứng minh được tứ giác $BCIH$ nội tiếp được đường tròn.

b) $\widehat{DMC} = \widehat{AFB}$ (cùng chắn cung DC của đường tròn ngoại tiếp tam giác DFC)

$\widehat{CME} = \widehat{ABF}$ (cùng bù với $\widehat{CBE}$)

$\widehat{FMD} = \widehat{DCF}$ (cùng chắn cung DF của đường tròn ngoại tiếp tam giác DFC)

và $\widehat{DCF} = \widehat{FAB}$ (cùng bù với $\widehat{DCB}$)

Suy ra $\widehat{FMD} = \widehat{FAB}$

Có: $\widehat{FME} = \widehat{FMD} + \widehat{DMC} + \widehat{CME} = \widehat{FAB} + \widehat{AFB} + \widehat{ABF} = 180^\circ$ (tổng ba góc trong của tam giác)

Nên E, M, F thẳng hàng.

c) Ta có: $\widehat{ICH} = \widehat{DBA}$ (cùng chắn cung IH của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $BCIH$) $\widehat{DCA} = \widehat{DBA}$ (cùng chắn cung AD của đường tròn (O))

Suy ra $\widehat{DCA} = \widehat{ICH}$. Do đó, CI là đường phân giác trong của tam giác CDN .

Vì $CI \perp CB$ nên CB là đường phân giác ngoài của tam giác CDN .

Từ đó, ta có $\frac{ID}{IN} = \frac{BD}{BN} = \frac{CD}{CN}$.

Suy ra: $\frac{ID}{IN} = \frac{BD}{BN} \Rightarrow BD \cdot IN = BN \cdot ID \Rightarrow BD \cdot IN = BN \cdot (DN - IN)$

$\Rightarrow BN \cdot DN = BD \cdot IN + BN \cdot IN \Rightarrow BN \cdot DN = IN(BD + BN)$

Câu 43. (Trường chuyên Toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

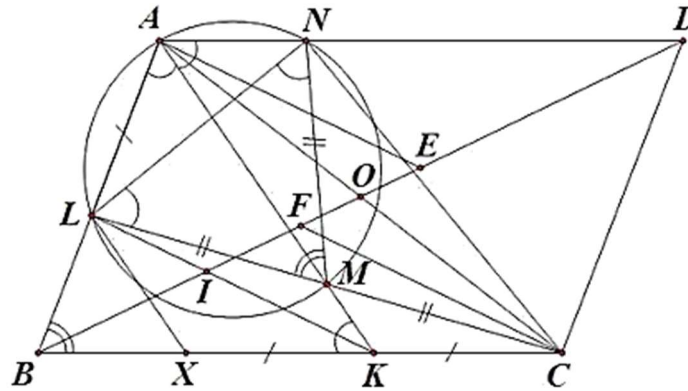
Cho hình bình hành $ABCD$ có góc BAD là góc tù, $AB < AD$ và tia phân giác của góc BAD cắt cạnh BC tại K sao cho $CK < AB$. Trên cạnh AB lấy điểm L sao cho $AL = CK$. Hai đoạn thẳng AK và CL cắt nhau tại M . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ALM cắt đường thẳng AD tại N (N khác A).

a) Chứng minh $AB \cdot NL = AK \cdot NM$.

b) Chứng minh $\widehat{CNL} = 90^\circ$.

c) Gọi I là giao điểm của BD và KL , chứng minh $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BD}{BI}$.

Lời giải



a) Tứ giác $ALMN$ nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAK} = \widehat{MNL}$ (1)

Ta có: $\widehat{ABK} = 180^\circ - \widehat{LAN} = \widehat{NML}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle ABK$ và $\triangle NML$ đồng dạng.

Do đó $\frac{AB}{NM} = \frac{AK}{NL}$ hay $AB \cdot NL = AK \cdot NM$.

b) Vì $\widehat{NAM} = \widehat{LAM}$ nên $NM = LM$ (3)

Kẻ $LX \parallel AK$, X thuộc BC . Vì $\widehat{AKX} = \widehat{KAD} = \widehat{KAL}$ nên tứ giác $ALXK$ là hình thang cân, suy ra $XK = AL = CK$.

Tam giác CLX có $XK = CK$ và $MK \parallel XL$ nên $LM = CM$ (4)

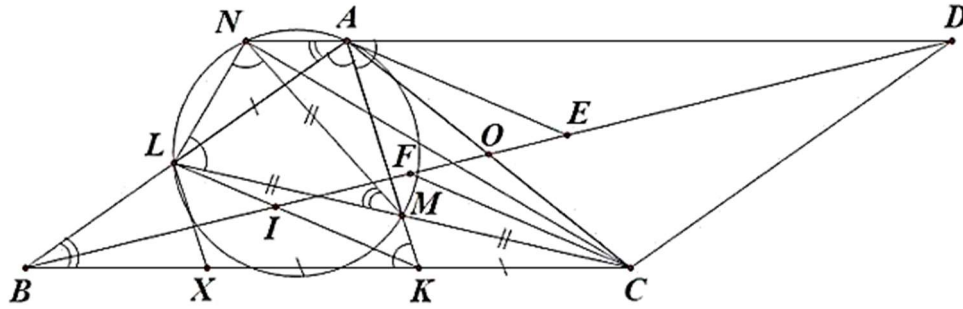
Từ (3) và (4) suy ra $NM = LM = CM$. Do đó $\triangle CNL$ vuông tại N hay $\widehat{CNL} = 90^\circ$.

c) Kẻ $AE \parallel KL$ và $CF \parallel KL$ (E, F thuộc BD), gọi O là giao điểm của AC và BD

Ta có: $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{BE}{BI} + \frac{BF}{BI} = \frac{BO + OE}{BI} + \frac{BO - OF}{BI} = \frac{2BO + OE - OF}{BI}$

Hai tam giác AOE và COF bằng nhau, suy ra $OE = OF$.

Do đó $\frac{BA}{BL} + \frac{BC}{BK} = \frac{2BO}{BI} = \frac{BD}{BI}$.



Với hình vẽ sau, cách chứng minh (1), (2), (3):

Câu a)

Tam giác AMLN nội tiếp đường tròn nên $\widehat{BAK} = \widehat{MNL}$

$$\widehat{ABK} = \widehat{NAL}, \widehat{NAL} = \widehat{NML} \Rightarrow \widehat{ABK} = \widehat{NML}$$

Câu b)

$$\widehat{MLN} = \widehat{MAD} \text{ (do tam giác AMLN nội tiếp đường tròn)}$$

$$= \widehat{MAL} = \widehat{MNL}$$

Suy ra $\triangle NML$ cân tại M hay $NM = LM$ (3)

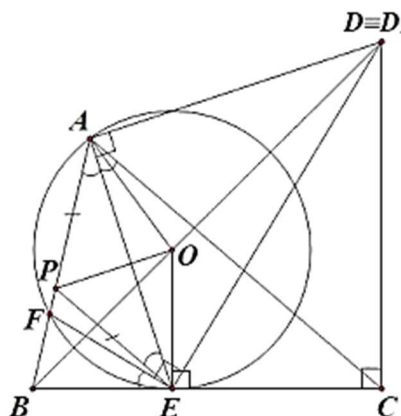
Câu 44. (Trường chuyên Toán Quảng Nam năm 2025 – 2026)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) có AE là đường phân giác (E thuộc cạnh BC). Trên đường thẳng đi qua A và vuông góc với AE lấy điểm D sao cho góc BCD bằng 90° . Trên cạnh AB lấy điểm F sao cho góc DEF bằng 90° .

a) Chứng minh tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn và $BE^2 = BA \cdot BF$.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF , đường thẳng đi qua E và song song với AC cắt cạnh AB tại P . Chứng minh OP vuông góc với AE và điểm O thuộc đường thẳng BD .

Lời giải



a) Theo giả thiết: $\widehat{DAE} = 90^\circ$ và $\widehat{DCE} = 90^\circ$. Vì $\widehat{DAE} + \widehat{DCE} = 180^\circ$ nên tứ giác $ADCE$ nội tiếp đường tròn (đường kính DE).

$\widehat{BAE} = \widehat{CAE}, \widehat{CAE} = \widehat{CDE}$ (cùng chắn cung CE của đường tròn đường kính DE),

$\widehat{CDE} = 180^\circ - 90^\circ - \widehat{CED} = \widehat{BEF} \Rightarrow \widehat{BAE} = \widehat{BEF}$.

Do đó $\triangle BAE$ và $\triangle BEF$ đồng dạng. Do đó $\frac{BA}{BE} = \frac{BE}{BF}$ hay $BE^2 = BA \cdot BF$.

b) Vì $\widehat{AEP} = \widehat{EAC} = \widehat{EAP}$ nên $\triangle AEP$ cân tại P hay $PA = PE$. Vì $PA = PE$ và $OA = OE$ nên OP là đường trung trực của đoạn thẳng AE . Suy ra $OP \perp AE$.

Vì $\widehat{BEF} = \widehat{BAE}$ (theo câu a)) nên BE là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp $\triangle AEF$, suy ra $OE \perp BC \Rightarrow OE \parallel CD$. Vì $OP \parallel DA, OE \parallel DC, EP \parallel CA$ nên $\triangle OEP$ đồng dạng với $\triangle DCA$, suy ra

$$\frac{OE}{DC} = \frac{EP}{CA}.$$

$$EP \parallel CA \Rightarrow \frac{EP}{CA} = \frac{BE}{BC} \quad (2). \text{ Giả sử } BO \text{ cắt } CD \text{ tại } D_1; OE \parallel D_1C \Rightarrow \frac{BE}{BC} = \frac{OE}{D_1C} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{OE}{DC} = \frac{OE}{D_1C} \Rightarrow DC = D_1C$, mà D và D_1 nằm cùng phía đối với đường thẳng BC nên D trùng D_1 . Vậy điểm O thuộc đường thẳng BD .

Câu 45. (Trường chuyên Toán Quảng Ninh năm 2025 – 2026)

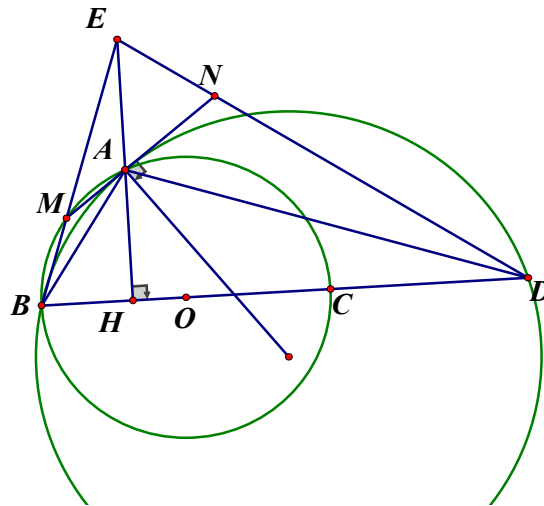
Cho đường tròn (O) , đường kính BC (điểm O là tâm của đường tròn). Điểm A thay đổi thuộc đường tròn (O) sao cho $AB \perp AC$ và A khác B . Điểm H là hình chiếu vuông góc của A trên đường thẳng BC . Điểm D là điểm đối xứng với H qua C , điểm E là điểm đối xứng với H qua A . Tiếp tuyến tại A của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt các đường thẳng EB, ED lần lượt tại M và N .

a) Chứng minh A là trực tâm tam giác BED .

b) Chứng minh M thuộc đường tròn (O) .

c) Khi điểm A thay đổi và thỏa mãn các giả thiết của bài toán, tìm vị trí điểm A để $AM \cdot AN$ lớn nhất.

Lời giải



a) Do A, C là trung điểm của HE, HD nên AC là đường trung bình của tam giác EHD .

Suy ra $AC \parallel ED$ mà AB vuông góc AC hay BA vuông góc ED .

Mà EH vuông góc BC suy ra AI là trục tâm của tam giác BDE .

b) Do MA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp ABD nên $\widehat{BAM} = \widehat{BDA} = \widehat{BAE}$

Suy ra $\triangle BMA \sim \triangle BEA$ (g-g).

Khi đó $BA^2 = BM \cdot BE$. Mặt khác ta chứng minh được $BA^2 = BH \cdot BC$

Khi đó $BH \cdot BC = BM \cdot BE$ hay $\frac{BH}{BM} = \frac{BE}{BC}$

Kết hợp góc $\widehat{EBD}$ chung thì $\triangle EBH \sim \triangle CBM$ (c.g.c).

Như vậy $\widehat{BMC} = 90^\circ$. Suy ra M thuộc (O) .

c) Gọi giao của CM và AH là F .

Ta thấy $CF \parallel AD$. Khi đó F là trung điểm AH .

Ta có: $\widehat{AMF} = \widehat{ABC} = \widehat{AEN}$ suy ra tứ giác $MFNE$ nội tiếp.

Khi đó chứng minh được $AM \cdot AN = AE \cdot AF = AF \cdot AH = \frac{AH^2}{2}$. Mà $AH \leq R$

Như vậy $\max(AM \cdot AN) = \frac{R^2}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi A là điểm chính giữa cung BC .

Câu 46. (Trường chuyên Quảng Trị năm 2025 – 2026)

Cho tứ giác nội tiếp $ABCD$ có các tia AB và DC cắt nhau tại F , các tia AD và BC cắt nhau tại E .

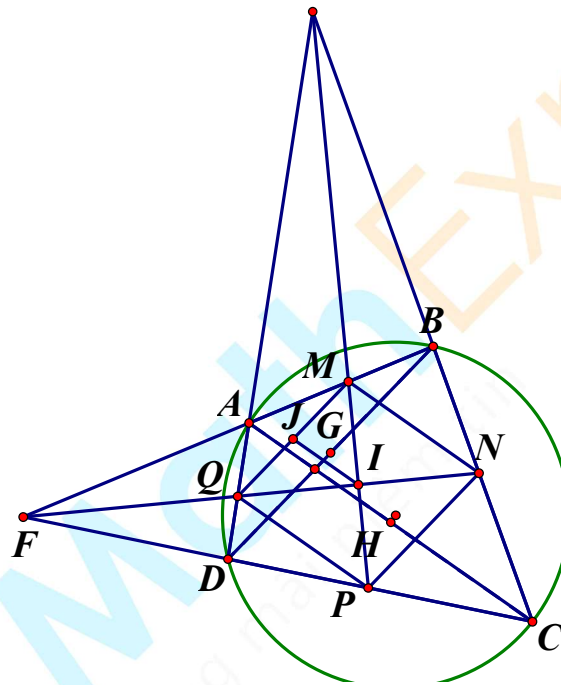
1) Chứng minh rằng $\frac{BD}{AC} = \frac{ED}{EC} = \frac{FB}{FC}$.

2) Đường phân giác của góc AEB cắt các cạnh AB và CD tương ứng tại M và P , đường phân giác của góc AFD cắt các cạnh CB và DA tương ứng tại N và Q .

i) Tứ giác $MNPQ$ là hình gì, tại sao?

ii) Chứng minh rằng giao điểm của MP và NQ nằm trên đoạn thẳng nối các trung điểm của hai đường chéo của tứ giác $ABCD$.

Lời giải



1) Do tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên $\widehat{EAB} = 180^\circ - \widehat{BAD} = \widehat{DCB}$

Kết hợp với $\widehat{DEC}$ chung

Suy ra: $\triangle EAB \sim \triangle ECD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED}$, $\widehat{DEC}$ chung

Khi đó: $\triangle EBD \sim \triangle EAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{ED}{EC} = \frac{BD}{AC}$ (1)

Chứng minh tương tự thì $\frac{FD}{FA} = \frac{FB}{FC}$, $\triangle FBD \sim \triangle FCA$ (c.g.c) $\Rightarrow \frac{FB}{FC} = \frac{BD}{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

2)

i. Ta thấy $MNPQ$ là hình bình hành. Thật vậy

Theo tính chất đường phân giác: $\frac{QD}{QA} = \frac{FD}{FA} = \frac{FB}{FC} = \frac{NB}{NC}, \frac{MB}{MA} = \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EC} = \frac{PD}{PC}$

Mặt khác theo câu a ta có: $\frac{ED}{EC} = \frac{FB}{FC}$. Suy ra $\frac{QD}{QA} = \frac{MB}{MA}, \frac{NB}{NC} = \frac{PD}{PC}$

Suy ra: $MQ \parallel BD \parallel NP$

Tương tự $\frac{QD}{QA} = \frac{PD}{PC}, \frac{NB}{NC} = \frac{MB}{MA}$ suy ra $PQ \parallel AC \parallel MN$

Như vậy $MNPQ$ là hình bình hành.

ii. Gọi I là giao của MP, NQ . Khi đó I là trung điểm của NQ, MP . Gọi G, H là trung điểm của BD, AC . Gọi J là trung điểm của MQ .

Khi đó do $MQ \parallel BD$, ta dễ dàng chứng minh A, J, G thẳng hàng (Thales đảo)

Ta thấy IJ là đường trung bình của tam giác QMN

Ta có: $\frac{IJ}{AH} = \frac{1}{2} \cdot \frac{MN}{AH} = \frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA} = \frac{JG}{AG}$ suy ra G, I, H thẳng hàng

Như vậy ta có giao điểm I của NQ và MP nằm trên GH .

Câu 47. (Trường chuyên Sóc Trăng năm 2025 – 2026)

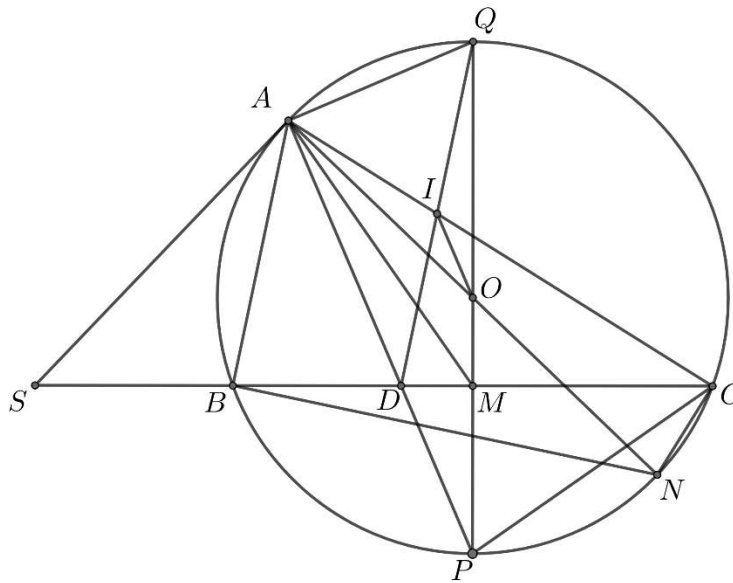
Từ một điểm S bên ngoài đường tròn (O) kẻ tiếp tuyến SA của đường tròn (A là tiếp điểm). Vẽ đường thẳng đi qua S cắt đường tròn (O) tại hai điểm B, C sao cho điểm O nằm trong góc ASC và B nằm giữa S, C . Gọi M là trung điểm của BC .

a) Chứng minh bốn điểm S, A, O, M cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tia phân giác trong của góc BAC cắt BC tại D . Chứng minh $SA = SD$.

c) Tia AD cắt đường tròn (O) tại P khác A . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM . Chứng minh OI song song AP .

Lời giải



a) Ta có $\widehat{SAO} = 90^\circ$ (SA là tiếp tuyến của (O))

ΔSAO nội tiếp đường tròn đường kính SO

Ta lại có $OB = OC$ (bán kính)

Suy ra ΔOBC cân tại O nên OM là đường trung tuyến cũng là đường cao của ΔOBC .

Khi đó $\widehat{SMO} = 90^\circ$

ΔSMO nội tiếp đường tròn đường kính SO

Suy ra bốn điểm S, A, O, M cùng nằm trên đường tròn đường kính SO .

b) Kẻ đường kính AN của (O)

Ta có $\widehat{BAN} = \widehat{BCN}$ (cùng chắn $\widehat{BN}$)

Mà $\widehat{SAB} + \widehat{BAN} = 90^\circ$ và $\widehat{SCA} + \widehat{BCN} = 90^\circ$

Nên $\widehat{SAB} = \widehat{SCA}$

$\widehat{SDA} = \widehat{DAC} + \widehat{ACD} = \widehat{DAB} + \widehat{BAS} = \widehat{SAD}$ d

Do đó ΔSAD cân tại S . Suy ra $SA = SD$.

c) Kẻ đường kính PQ của (O)

Khi đó $\widehat{QAD} = \widehat{QMD} = 90^\circ$ nên tứ giác $AQMD$ nội tiếp đường tròn đường kính QD

Suy ra I là trung điểm QD

Từ đó ta được OI là đường trung bình của ΔQDP . Do đó OI song song AP .

Câu 48. (Trường chuyên Sơn La năm 2025 – 2026)

Cho đường tròn (O) đường kính $AB=2R$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AO , điểm E thuộc đường tròn (O) (E không trùng với A và B). Các tia Ax và By lần lượt là tiếp tuyến tại A và B của đường tròn (O) (Ax, By cùng thuộc một nửa mặt phẳng chứa điểm E có bờ là đường thẳng AB). Qua điểm E kẻ đường thẳng d vuông góc với EI cắt Ax, By lần lượt tại M và N .

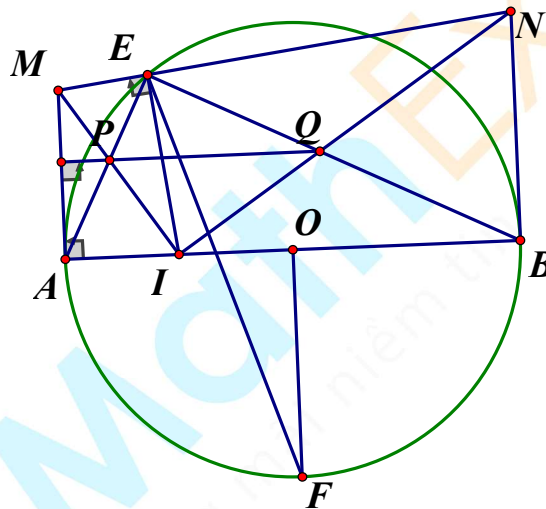
a) Chứng minh $AMEI$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$ và $AE.IN = BE.IM$.

c) Gọi P là giao điểm của AE và MI ; Q là giao điểm của BE và NI . Chứng minh hai đường thẳng PO và AM vuông góc.

d) Gọi F là điểm chính giữa của cung AB không chứa điểm E của đường tròn (O) . Giả sử ba điểm E, I, F thẳng hàng. Tính diện tích tam giác MON theo R .

Lời giải



Ta thấy E thuộc (O) nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$

a) Ta có: $\widehat{MEI} = \widehat{MAI} = 90^\circ$

Suy ra tứ giác $MEIA$ nội tiếp đường tròn đường kính MI

b) Tương tự câu a ta có tứ giác $MEIA$ nội tiếp suy ra $\widehat{ENI} = \widehat{EBI}$

Từ câu ta cũng suy ra được $\widehat{IME} = \widehat{EAB}$

Do đó: $\triangle ABE \sim \triangle MNI$

Suy ra: $\frac{AE}{BE} = \frac{MI}{NI} \Rightarrow AE.NI = BE.MI$

c) Từ $\triangle ABE \Rightarrow \triangle MNI$ suy ra $\widehat{MIN} = 90^\circ$. Suy ra: Tứ giác $EPIQ$ nội tiếp

Khi đó $\widehat{EPQ} = \widehat{EIM} = \widehat{INM} = \widehat{EBA}$. Suy ra $PQ \parallel AB$. Do đó: PQ vuông góc với AM

d) Do E, I, F thẳng hàng nên $45^\circ = \widehat{IEA} = \widehat{IMA}$. Suy ra tam giác MAI cân tại A

Tương tự IBN cân tại B

$$\text{Khi đó } AI = AM = \frac{R}{2}; BI = BN = \frac{3R}{2}$$

$$\text{Ta có: } S_{MON} = S_{AMNB} - S_{MAI} - S_{BIN} = \frac{1}{2}(AM + BN) \cdot AB - \frac{1}{2}AI^2 - \frac{1}{2}BI^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot 2R - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{9R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

Câu 49. (Trường chuyên Thái Bình năm 2025 – 2026)

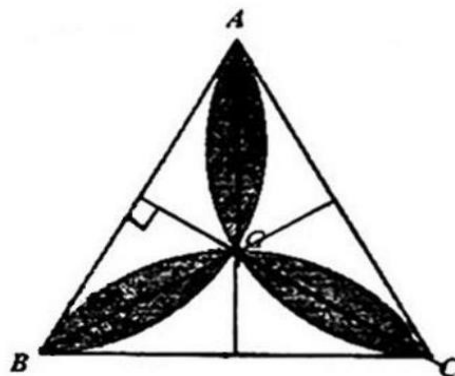
a) Cho tam giác ABC nhọn, không cân ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Kẻ các đường cao AD, BE, CF (D, E, F là chân các đường cao) cắt nhau tại điểm H . Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P, Q (F nằm giữa P và E), đường thẳng EF cắt BC tại điểm M .

(1). Chứng minh: $MP \cdot MQ = ME \cdot MF$.

(2). Gọi N là điểm đối xứng của O qua đường thẳng BC . Chứng minh: N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

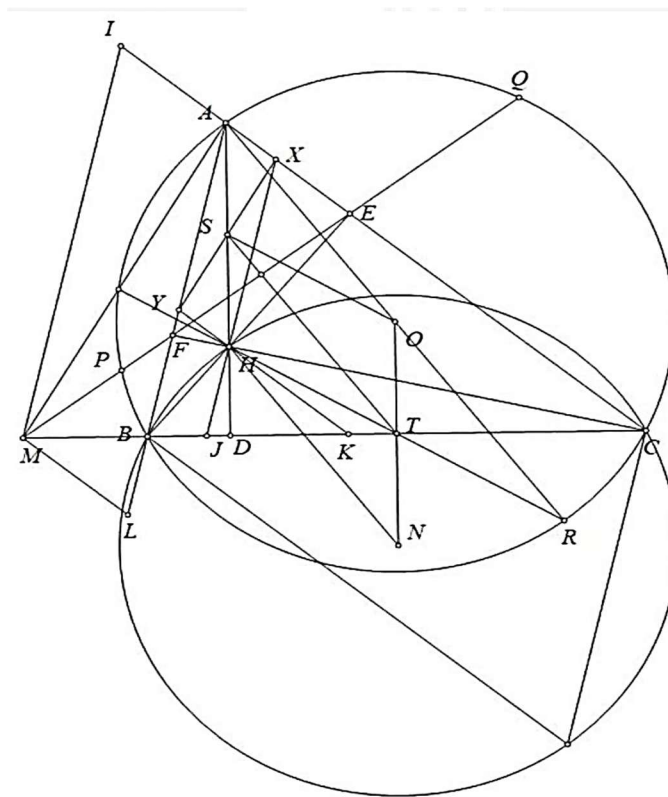
(3). Đường thẳng đi qua H , song song với AB và cắt AC tại điểm X . Đường thẳng đi qua H , song song với AC và cắt AB tại điểm Y . Chứng minh: Đường trung trực của đoạn thẳng XY đi qua điểm O .

b) Một Logo như hình vẽ bên. Phần tô đậm là giao của các cặp hình tròn ngoại tiếp các tam giác: $\triangle ABG, \triangle ACG$ và $\triangle BCG$. Tính diện tích phần tô đậm (theo đơn vị cm^2), biết rằng tam giác ABC đều có cạnh bằng 20 cm, G là trọng tâm của tam giác ABC (lấy $\pi = 3,14$, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

a)



(1). Ta có tứ giác $BCFE$ nội tiếp. Do đó, $\angle MFB = \angle ECM$

Tức là $\Delta MFB \sim \Delta MCE$ nên suy ra $\frac{MF}{MC} = \frac{MB}{ME}$ hay ta có $MB \cdot MC = MF \cdot ME$.

Lại có tứ giác $BCQP$ nội tiếp, do đó $\triangle MPB \sim \triangle MCQ$. Do đó $\frac{MB}{MQ} = \frac{MP}{MC}$ có $MB \cdot MC = MP \cdot MQ$.

Từ đây ta có điều phải chứng minh.

(2). Gọi T là trung điểm BC , khi này ta có bổ đề cơ bản $AH = 2OT$.

Do đó $AH = ON$ mà $AH \parallel ON$ (do cùng vuông góc với BC) nên tứ giác $AONH$ là hình bình hành.

Do đó $AO = HN = OB = OC = NB = NC$.

Vậy ta có N là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC .

(3). Ta có tứ giác $AYHX$ là hình bình hành, do đó trung điểm AH trùng với trung điểm XY

Gọi giao điểm của AO với (O) là R , khi đó ta có H, R, T thẳng hàng.

Goi trung điểm AH là S khi đó OS song song với HR theo tính chất đường trung bình.

Kẻ ML song song AC , L thuộc AB , YH cắt BC tại K .

Khi này ta có $\frac{ML}{BK} = \frac{MB}{YK}$, lại có $\frac{YK}{YH} = \frac{AC}{AE}$.

Do đó $\frac{ML}{YH} = \frac{MB \cdot AC}{BK \cdot AE}$.

Kẻ MI song song AB , I thuộc AC , XH cắt BC tại J .

Khi này ta có $\frac{IM}{XJ} = \frac{CM}{CJ}$, $\frac{XJ}{XH} = \frac{AB}{AF}$ do đó $\frac{IM}{XH} = \frac{AB \cdot CM}{AF \cdot CJ}$. Do đó $\frac{YH}{AF} = \frac{XH}{AE} \cdot \frac{AF}{AC}$.

Từ đây, ta chứng minh $\frac{AB \cdot CM}{AF \cdot CJ} = \frac{MB \cdot AC}{BK \cdot AE}$ ta lại có $\frac{BK}{BC} = \frac{BH}{BE}$ và $\frac{CJ}{CB} = \frac{CH}{CF}$ thì có được điều phải chứng minh.

Khi đó $\triangle HXY \sim \triangle LAM$ mà HX song song AL , HY song song ML nên $HY \parallel ML$ nên $XY \parallel AM$. Mặt khác theo định lý Brocard cho ta $HT \perp AM$ nên $OS \perp XY$. Ta có điều phải chứng minh.

b) Tính diện tích mỗi hình viên phân (tô đậm) $JG = JA = JB = GA = GB = \frac{20\sqrt{3}}{3} = R \Rightarrow \widehat{AJG} = 60^\circ$

Diện tích hình quạt chứa cung AG nhỏ là $\frac{60 \cdot \pi \cdot R^2}{360} = \frac{1}{6} \pi R^2 = \frac{200}{9} \pi$

$S_{\triangle AGJ} = \frac{AH \cdot GJ}{2}$ ($H = GJ \cap AB$ mà $AH = \frac{AJ \cdot \sqrt{3}}{2} = 10$ (Áp dụng pytago)

Nên S_1 hình viên phân (tô đậm) $= \frac{200}{9} \pi - \frac{100\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow$ Diện tích phần tô đậm là $6S_1 = 6 \left(\frac{200\pi}{9} - \frac{100\sqrt{3}}{3} \right) \approx 72,5 \text{ (cm}^2\text{)}$

Câu 50. (Trường chuyên Thái Nguyên năm 2025 – 2026)

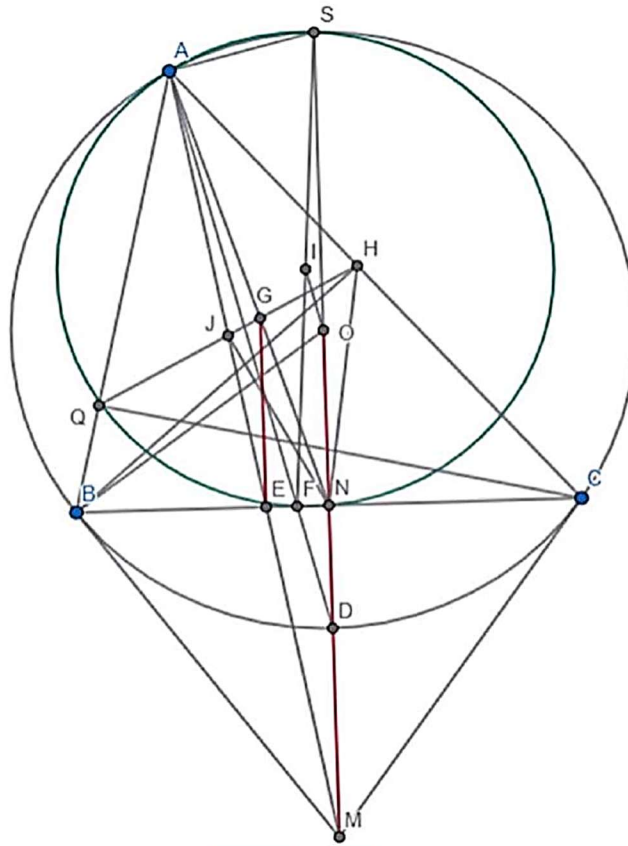
Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC . Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (O) cắt nhau tại M . Hai đường thẳng OM và BC cắt nhau tại N .

a) Chứng minh rằng, $\angle ABO = \angle BHN$

b) Đường thẳng OM cắt đường tròn (O) tại D và S (D nằm giữa O và M). Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại F . Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN . Chứng minh rằng, hai đường thẳng OI và AS vuông góc với nhau.

c) Hai đường thẳng AM và BC cắt nhau tại E . Hai đường thẳng AN và HQ cắt nhau tại G . Chứng minh rằng, hai đường thẳng GE và OM song song với nhau.

Lời giải



a) Ta có tam giác ABO cân tại O và tam giác HNB cân tại N nên $\widehat{BHN} = \widehat{NBH}$.

Ta có biến đổi góc như sau:

$$\widehat{ABO} = \frac{180^\circ - \widehat{AOB}}{2} = \frac{180^\circ - 2\widehat{ACB}}{2} = 90^\circ - \widehat{ACB} = \widehat{HBN} = \widehat{BHN}.$$

b) Do DS đi qua O nên DS là đường kính của đường tròn (O) . Suy ra $\widehat{SAF} = 90^\circ$.

Ta thấy SM vuông góc BC tại N nên $\widehat{SNF} = 90^\circ$.

Khi đó ta chứng minh được tứ giác $ASNF$ nội tiếp. Mà do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AFN nên tứ giác $ASNF$ nội tiếp đường tròn (I) có đường kính là SF .

Do đó ta có: $\begin{cases} OA = OS \\ IA = IS \end{cases} \Rightarrow OI$ là đường trung trực của AS nên OI vuông góc AS .

c) Ta có N là trung điểm của BC , suy ra $NQ = NH = NB = NC$.

Gọi J là trung điểm GH thì NJ vuông góc với GH . Ta có:

$$\frac{AH}{HN} = \frac{\sin \widehat{ABH} \cdot AB}{HN} = \sin \left(\frac{\widehat{HNQ}}{2} \right) \cdot \frac{AB}{HN} = \sin \widehat{HNJ} \cdot \frac{AB}{HN} = \frac{JH \cdot AB}{HN^2} = \frac{HQ \cdot AB}{NQ \cdot BC} \quad (1)$$

Ta có biến đổi góc: $\widehat{BMC} = 180^\circ - \widehat{BOC} = 180^\circ - 2\widehat{BAC} = 180^\circ - 2(90^\circ - \widehat{ACQ}) = \widehat{HNQ}$.

Chú ý tam giác HNQ cân tại N và BCM cân tại M nên

$$\triangle QNH \sim \triangle BMC \Rightarrow \frac{HQ}{BC} = \frac{QN}{BM} \Rightarrow \frac{HQ}{QN \cdot BC} = \frac{1}{BM}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{AH}{HN} = \frac{AB}{BM}$ (3)

Ta có: $\widehat{AHN} = \widehat{AHQ} + \widehat{QHN} = \widehat{ABC} + \widehat{MBC} = \widehat{ABM}$ ($\triangle AQH \sim \triangle ACB$). (4)

Từ (3) (4) suy ra $\triangle AHN \sim \triangle ABM$ (c.g.c) $\Rightarrow \begin{cases} \widehat{NAH} = \widehat{MAB} \quad (5) \\ \frac{AN}{AM} = \frac{AH}{AB} \quad (*) \end{cases}$

Từ (5) suy ra $\triangle AHG \sim \triangle ABE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AG}{AE} = \frac{AH}{AB} \quad (**)$

Từ (*) và (**) thì $\frac{AG}{AE} = \frac{AN}{AM} \Rightarrow GE \parallel OM$. Ta có điều phải chứng minh.

Câu 51. (Trường chuyên Thanh Hóa năm 2025 – 2026)

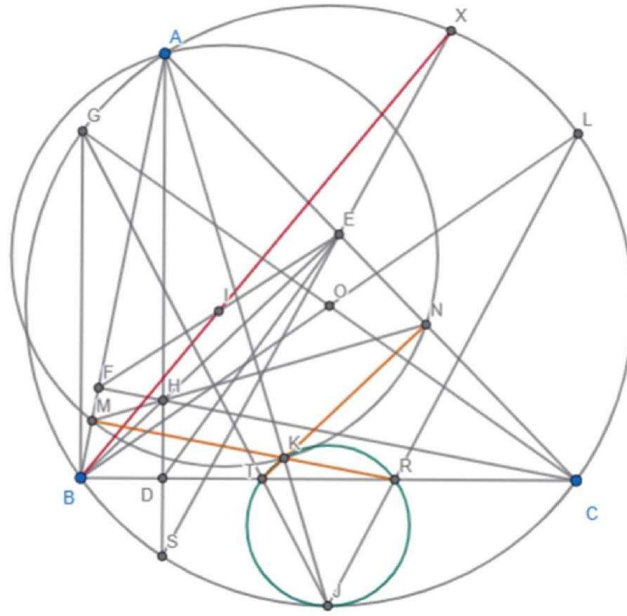
Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm di động trên đường tròn $(O; R)$ sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC .

a) Đường thẳng chứa tia phân giác góc ngoài tại đỉnh H của tam giác BHC cắt AB, AC lần lượt tại hai điểm M, N . Chứng minh tam giác AMN cân.

b) Kẻ các đường cao BE và CF của tam giác ABC . Gọi S là giao điểm thứ hai khác A của đường thẳng AH và đường tròn (O) . Đường thẳng SE cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai X (khác S). Chứng minh đường thẳng BX đi qua trung điểm của đoạn thẳng EF .

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt tia phân giác của góc BAC tại K . Chứng minh điểm K thuộc một đường tròn cố định.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{ACH} = \widehat{ABH}$ do cùng cộng với góc BAC bằng 90° . Và có $\widehat{CHN} = \widehat{BHM}$

Khi đó $\widehat{ANM} = \widehat{ACH} + \widehat{CHN} = \widehat{ABH} + \widehat{BHM} = \widehat{AMN}$.

Suy ra tam giác AMN cân tại A .

b) Gọi AD là đường cao của tam giác ABC .

Ta có $\widehat{HCB} = \widehat{BAH} = \widehat{SCB}$ suy ra tam giác HCS cân tại C .

Hay D là trung điểm của HS .

Ta có tứ giác $AEDB$ nội tiếp suy ra $\widehat{FBE} = \widehat{HDE}$ (1)

Và các tứ giác $AEHF, HECD$ nội tiếp thì $\widehat{FEB} = \widehat{BAH} = \widehat{BCH} = \widehat{DEH}$.

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle BFE \sim \triangle DHE \Rightarrow \frac{BF}{DH} = \frac{EF}{HE} \Rightarrow \frac{BF}{2DH} = \frac{EF}{2HE} \Rightarrow \frac{BF}{SH} = \frac{FI}{HE}$.

Suy ra $\triangle BFI \sim \triangle SHE$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{FBI} = \widehat{HSE} = \widehat{ABX}$. Suy ra B, I, X thẳng hàng.

c) Gọi J là giao của AK với (O) . Kẻ hai đường kính CG, BL của (O) .

Gọi T, R là giao của JG, JL với BC .

Ta có: $\triangle BGC \sim \triangle EHC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{TB}{TC} = \frac{BG}{GC} = \frac{EH}{HC} = \frac{NE}{NC} \Rightarrow TN \parallel BE$.

Do tam giác AMN cân và K là điểm chính giữa cung nhỏ MN của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN nên AK là đường kính, khi đó $\widehat{ANK} = 90^\circ$.

Hay $TN \parallel BE \parallel KN$. nên T, K, N thẳng hàng.

Do G, J cố định suy ra T cố định.

Tương tự R cố định.

$$\text{Ta có } \widehat{TJR} + \widehatTKR = \frac{\widehat{GOL}}{2} + \widehat{MKN} = \frac{\widehat{BOC}}{2} + \widehat{MKN} = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác $KRJT$ nội tiếp.

Mặt khác do T, R, J cố định nên đường tròn ngoại tiếp tam giác TJR cố định.

Suy ra K luôn thuộc một đường tròn cố định.

Câu 52. (Trường chuyên Tiền Giang năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có đường cao AH và đường phân giác trong AD (H, D thuộc cạnh BC). Kẻ DM vuông góc với AB tại M , kẻ DN vuông góc với AC tại N . Gọi P là trực tâm của tam giác ABD , Q là giao điểm của BP và AD . Chứng minh rằng:

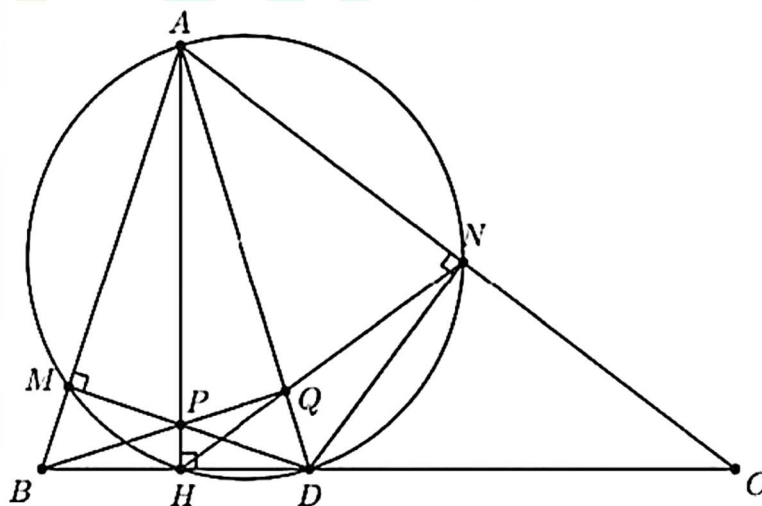
a) Năm điểm A, M, H, D, N cùng thuộc một đường tròn.

b) $\frac{BH}{BM} = \frac{CH}{CN}.$

c) $\frac{AQ}{QD} = \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BH}{DH}.$

d) Ba điểm H, Q, N thẳng hàng.

Lời giải



a) Dễ thấy $\widehat{AMD} = \widehat{AHD} = \widehat{AND} = 90^\circ$ (gt), suy ra năm điểm A, M, H, D, N cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét hai tam giác CDN và CAH có

Góc $\widehat{ACB}$ chung,

$$\widehat{CND} = \widehat{CHA} = 90^\circ \text{ (gt),}$$

Suy ra $\triangle CDN \sim \triangle CAH$ (g - g), dẫn đến $\frac{CH}{CN} = \frac{CA}{CD}$ (1)

Xét hai tam giác BDM và BAH có

Góc $\widehat{ABC}$ chung,

$$\widehat{BMD} = \widehat{BHA} = 90^\circ \text{ (gt),}$$

Suy ra $\triangle BDM \sim \triangle BAH$ (g - g), dẫn đến $\frac{BH}{BM} = \frac{BA}{BD}$ (2)

Mặt khác AD là đường phân giác trong của tam giác ABC nên

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}, \text{ hay } \frac{CD}{CA} = \frac{BD}{BA}$$

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\frac{BH}{BM} = \frac{CH}{CN}$.

$$\text{c) Ta có: } \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BH}{DH} = \frac{DM \cdot \cot \widehat{BAD}}{DM \cdot \cot \widehat{ABD}} \cdot \frac{AH \cdot \cot \widehat{ABD}}{AH \cdot \cot \widehat{BDA}} = \frac{\cot \widehat{BAD}}{\cot \widehat{BDA}} = \frac{QA}{QB} \cdot \frac{QD}{QB} = \frac{QA}{QD}.$$

d) Xét tam giác ABD có AH, DM lần lượt là hai đường cao cắt nhau tại P , suy ra P là trực tâm của tam giác ABD , dẫn đến $BQ \perp AD$, hay $\widehat{BQA} = 90^\circ$.

Ta có: $\widehat{BHA} = \widehat{BQA} = 90^\circ$, suy ra bốn điểm A, B, H, Q cùng thuộc một đường tròn, hay tứ giác $ABHQ$ nội tiếp.

$$\text{Do đó } \widehat{BAQ} + \widehat{BHQ} = 180^\circ.$$

$$\text{Mà } \widehat{BHQ} + \widehat{DHQ} = 180^\circ \text{ (kề bù) nên } \widehat{DHQ} = \widehat{BAD} \text{ (4).}$$

$$\text{Mặt khác } \widehat{BAD} = \widehat{CAD} \text{ (AD là phân giác của } \widehat{BAC} \text{) (5)}$$

$$\text{Và } \widehat{CAD} = \widehat{DHN} \text{ góc nội tiếp chắn cung } \widehat{DN} \text{ của đường tròn đường kính AD) (6)}$$

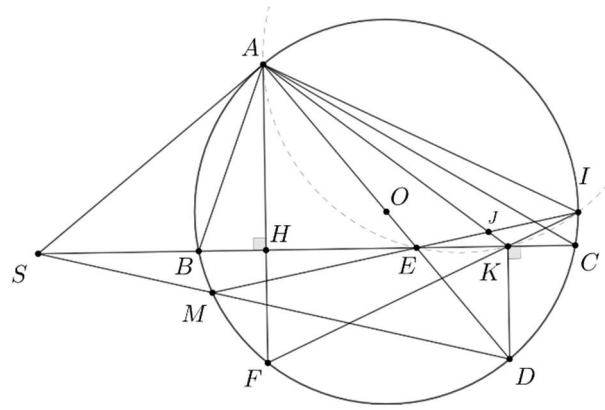
Từ (4), (5), (6) suy ra $\widehat{DHQ} = \widehat{DHN}$, dẫn đến ba điểm H, Q, N thẳng hàng.

Câu 53. (Trường chuyên Tuyên Quang năm 2025 – 2026)

Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp (O) . Kẻ đường kính AD của (O) ; AD cắt BC ở E ; đường cao AH của tam giác ABC cắt (O) ở F khác A . Gọi K là hình chiếu của D trên BC ; FK cắt (O) ở I khác F .

- a) Chứng minh rằng $FH = DK$.
- b) Gọi J là giao điểm của AK và EI . Chứng minh rằng $JE \cdot JI = JA \cdot JK$.
- c) Tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC ở S . Chứng minh rằng SD, EI và (O) cùng đi qua một điểm.

Lời giải



a) Ta có $\widehat{AFD} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn).

Mặt khác $FH \perp HK$, $DK \perp HK$ nên $FHKD$ là hình chữ nhật.

Suy ra $FH = DK$.

b) Từ ý a) ta có $FD \parallel HK$, suy ra $\widehat{IKC} = \widehat{IFD}$ (đồng vị) $= \widehat{IAD}$ (góc nội tiếp) $= \widehat{IAE}$ do đó $IAEK$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{EAK} = \widehat{EIK}$ hay $\widehat{EAJ} = \widehat{KIJ}$.

Mặt khác $\widehat{AJE} = \widehat{IJK}$ (đối đỉnh) nên hai tam giác EAJ và KIJ đồng dạng.

Suy ra $\frac{JA}{JI} = \frac{JE}{JK}$ hay $JE \cdot JI = JA \cdot JK$.

c) Gọi M là giao điểm của EI với (O) .

Vì SA là tiếp tuyến nên $SA \perp AD$ suy ra $SAKD$ nội tiếp, do đó

$\widehat{ADS} = \widehat{AKS} \equiv \widehat{AKE} = \widehat{AIE}$ (tứ giác $AIKE$ nội tiếp) $\equiv \widehat{AIM} = \widehat{ADM}$ (góc nội tiếp).

Suy ra S, M, D thẳng hàng hay SD, EI và (O) cùng đi qua điểm M .

Câu 54. (Trường chuyên Hà Nội năm 2025 – 2026)

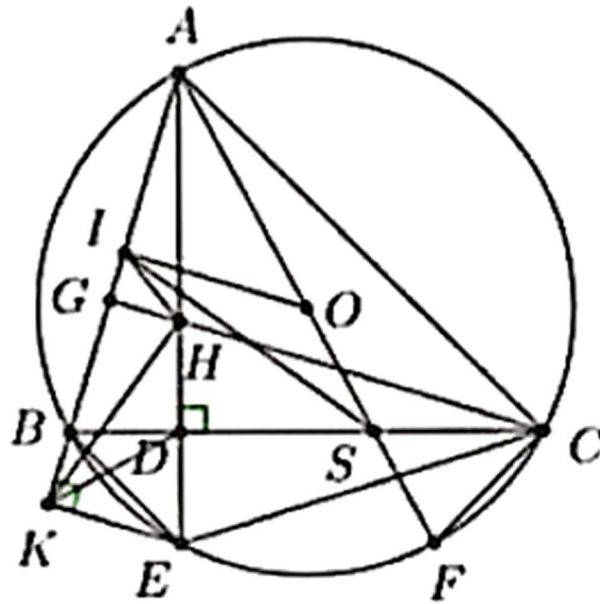
Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$), nội tiếp đường tròn (O) . Đường cao AD của tam giác ABC cắt đường tròn (O) tại điểm E (E khác A). Gọi K là chân đường vuông góc kẻ từ điểm E đến đường thẳng AB .

(1) Chứng minh bốn điểm E, D, B, K cùng thuộc một đường tròn.

(2) Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm S . Chứng minh EA là tia phân giác của góc CEK và $AB.AC = AE.AS$.

(3) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và I là trung điểm của đoạn thẳng AB . Chứng minh đường thẳng SI vuông góc với đường thẳng HK .

Lời giải



(1) Tam giác BKE vuông tại K (do $EK \perp AB$)

Do đó B, K, E cùng thuộc đường tròn đường kính BE (1)

Tam giác BDE vuông tại D (do $AD \perp BC$)

Do đó B, D, E cùng thuộc đường tròn đường kính BE (2)

Từ (1) và (2) ta có B, K, E, D cùng thuộc đường tròn đường kính BE

(2) Ta có: $\widehat{ABC} + \widehat{KBD} = 180^\circ$ mà $\widehat{DEK} + \widehat{KBD} = 180^\circ$ (do tứ giác $KBDE$ nội tiếp), $\widehat{ABC} = \widehat{DEC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AC) nên $\widehat{DEK} = \widehat{DEC}$

Suy ra EA là tia phân giác của $\widehat{CEK}$

Kẻ đường kính AF của đường tròn

Khi đó A, O, S, F thẳng hàng

Ta có: $\widehat{FAC} + \widehat{AFC} = 90^\circ$ (do tam giác AFC vuông tại C)

Mà $\widehat{ABD} + \widehat{BAD} = 90^\circ$, $\widehat{ABC} = \widehat{AFC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC) nên $\widehat{BAD} = \widehat{FAC}$

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ASC$ có

$$\widehat{BAE} = \widehat{SAC} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{AEB} = \widehat{ACS} \text{ (cùng chắn cung } AB \text{)}$$

Do đó $\triangle ABE \sim \triangle ASC$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{AB}{AS} = \frac{AE}{AC} \text{ hay } AB \cdot AC = AS \cdot AE$$

(3) Gọi G là giao của CH và AB

Khi đó $CG \perp AB$

$$\text{Ta có: } \widehat{BCG} + \widehat{GBC} = 90^\circ, \widehat{BCE} + \widehat{DEC} = 90^\circ, \widehat{DEC} = \widehat{GBC}$$

$$\text{Nên } \widehat{BCG} = \widehat{BCE}$$

Khi đó $\triangle DHC = \triangle DEC$ (g.c.g) nên $DH = DE$

$$\text{Ta có: } \widehat{BAS} = \widehat{BAD} + \widehat{DAS}, \widehat{DAC} = \widehat{DAS} + \widehat{SAC}, \widehat{SAC} = \widehat{BAD}$$

$$\text{Do đó } \widehat{BAS} = \widehat{DAC}$$

Tứ giác $BDEK$ nội tiếp nên $\widehat{DKE} = \widehat{DBE}$

$$\text{Mà } \widehat{DBE} = \widehat{DAC} = \widehat{BAS} \text{ nên } \widehat{DKE} = \widehat{BAS}$$

$$\text{Xét } \triangle DKE \text{ và } \triangle SAB \text{ có } \begin{aligned} \widehat{DKE} &= \widehat{BAS} \\ \widehat{DEK} &= \widehat{ABS} \end{aligned}$$

Do đó $\triangle DKE \sim \triangle SAB$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{KE}{AB} = \frac{DE}{SB}$$

$$\text{Mà } AB = 2IB, DE = \frac{1}{2}HE \text{ nên } \frac{KE}{2IB} = \frac{HE}{2SB} \text{ hay } \frac{KE}{IB} = \frac{HE}{SB}$$

$$\text{Mà } \widehat{KEH} = \widehat{IBS} \text{ nên } \triangle EKH \sim \triangle BIS \text{ (c.g.c)}$$

$$\text{Do đó } \widehat{EKH} = \widehat{BIS}$$

$$\text{Mà } \widehat{EKH} + \widehat{IKH} = \widehat{IKE} = 90^\circ \text{ nên } \widehat{BIS} + \widehat{IKH} = 90^\circ$$

Suy ra $KH \perp IS$ (đpcm)