TUYỂN CHỌN CÁC BÀI TOÁN SỐ HỌC TRONG KÌ THI CHUYÊN NĂM HỌC 2022 - 2023

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2022 – 2023)

a) Tìm tất cả các nghiệm $(x;y;z)$ của phương trình $x\left(x^2+x+1\right)=z^y-1$ thỏa mãn $x,\ y$ là các số nguyên và z là số nguyên tố.

b) Tìm các số thực x sao cho $x+\sqrt{2022}$ và $\dfrac{3}{x}-\sqrt{2022}$ đều là các số nguyên.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình

$$(x+y)(2x+3y)^2+2x+y+2=0.$$

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bạc Liêu năm học 2022 – 2023)

a) Chứng minh biểu thức $S=n^3(n+2)^2+(n+1)\left(n^3-5n+1\right)-2n-1$ chia hết cho 120, với n là số nguyên.

b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2022 – 2023)

a) Tìm ba số nguyên $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $x^4+9y^2+25z^2=x^2+6xy+2022$.

b) Cho chín số nguyên dương $a_1,\ a_2,\ldots,\ a_9$ đều không có ước số nguyên tố nào khác $3;\ 5$ và 7. Chứng minh rằng trong chín số đã cho luôn tồn tại hai số mà tích của hai số này là một số chính phương.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Kạn năm học 2022 – 2023)

Tìm các số nguyên tố $x,\ y,\ z$ thỏa mãn $5(x+y+z)=xyz$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên của phương trình: $(2x-y+3)^2=3\left(x-3y-y^2+2\right)$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Dương năm học 2022 – 2023)

Chứng minh rằng $A=a^7-a$ chia hết cho 7, với mọi $a\in\mathbb{Z}$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2022 – 2023)

Cho $a,\ b,\ c$ là các số nguyên. Đặt $S=(a+2021)^5+(2b-2022)^5+(3c+2023)^5$; $P=a+2b+3c+2022$. Chứng minh rằng S chia hết cho 30 khi và chỉ khi P chia hết cho 30.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2022 – 2023)

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $x^2-6y^2+xy+2y-x-7=0$.

b) Cho $x,\ y$ là các số nguyên thỏa mãn $x^2-2021y^2+2022$ chia hết cho xy. Chứng minh rằng $x,\ y$ là các số lẻ và nguyên tố cùng nhau.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cà Mau năm học 2022 – 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn đẳng thức: $a^2+b^2=a+b+ab$.

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2022 – 2023)

Tìm các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $x^{2022}=y^{2022}-y^{1348}-y^{674}+2$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đà Nẵng năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa mãn $a^3=\left(b^2+a\right)b+5$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đak Nông năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các nghiệm nguyên $(x;y)$ của phương trình:

$$2x^2+y^2-3xy-x-y-13=0.$$

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Thuận năm học 2022 – 2023)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^4+x^2-y^2-y+4=0$.

b) Cho ba số nguyên dương a, b, c thỏa mãn $a^2+b^2=c^2$. Chứng minh rằng $abc \vdots 60$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Gia Lai năm học 2022 – 2023)

Tìm nghiệm tất cả các số nguyên x, y thỏa mãn

$$x^2y^2-2x^2y+3x^2+4xy-4x+2y^2-4y-1=0.$$

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Giang năm học 2022 – 2023)

Tìm nghiệm nguyên của phương trình $(2x+y)(x-y)+x+8y=22$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn

$$x^4-6x^3+18x^2-y^2-32x+4y+20=0.$$

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

a) Chứng minh nếu n là số tự nhiên lẻ thì $3^{2n+1}-7$ chia hết cho 20.

b) Tìm tất cả cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $y(x^2+x+1)=(x+1)(y^2-1)$.

c) Tìm hai số nguyên dương m và n sao cho $\dfrac{m^3}{m+n}$ và $\dfrac{n^3}{m+n}$ đều là các số nguyên tố.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

a) Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh rằng 5^p+p^2 chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn:

$$x^3-x^2y+2x=5x^2-2y-1.$$

Bài 20. (Đề thi vào 10 chuyên KHTN (vòng II) thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn đẳng thức:

$$(x+y)(5x+y)^3+xy^3=(5x+y)^3+x^2y^3+xy^4.$$

Bài 21. (Đề thi vào 10 chuyên Sư phạm thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn $ab=cd$.

Chứng minh rằng số $N=a^{2022}+b^{2022}+c^{2022}+d^{2022}$ là hợp số.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm học 2022 – 2023)

a) Tìm số nguyên n để $A=(n^2+3n+2)^2+(n+2)^2$ là số chính phương.

b) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|=a^{2022}+2023$.

Tìm số dư khi chia a^{12} cho 16.

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hải Dương năm học 2022 – 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn phương trình:

$$y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x.$$

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hải Phòng năm học 2022 – 2023)

Chứng minh rằng nếu $2^n = 10a + b$ với a, b, n là các số tự nhiên thỏa mãn $0 < b < 10$ và $n \ge 1$ thì ab chia hết cho 6.

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hậu Giang năm học 2022 – 2023)

Tìm hai số nguyên tố p, q sao cho $p + q$ và $p - q$ đều là số nguyên tố.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Đắc Lắc năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các số nguyên dương x, y thỏa mãn $5x^2 + 3y^2 = 20x - 24y + 477$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nghệ An năm học 2022 – 2023)

a) Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $(x-y)^2(8-xy)+4=12(x-y)$.

b) Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng $2^n + 36$ và $12^{2n} + 25$ không đồng thời là số chính phương.

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hưng Yên năm học 2022 – 2023)

Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $x^4 - 2x^3 + x^2 - 16y^2 + 12x - 16y + 4 = 0$.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Khánh Hòa năm học 2022 – 2023)

Cho các số tự nhiên a, b, c thỏa mãn $2a^2 + 3b^3 = 4c^4$. Chứng minh a, b, c đều chia hết cho 6.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2022 – 2023)

a) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^2 + 3pq + 4q^2$ là một số chính phương.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p sao cho tồn tại các số tự nhiên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 6xy = p - 8$.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lạng Sơn năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn phương trình $x^2 + 2xy - 6x - 6y + 6 = 0$.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2022 – 2023)

a) Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì biểu thức $P = n(13n+1)(2n+1)$ chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $3x^2 + 2y^2 + x = 2(xy + y + 2)$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lâm Đồng năm học 2022 – 2023)

Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì $2023n^3 - n$ chia hết cho 6.

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Yên Bái năm học 2022 – 2023)

a) Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, số $B = 9.5^{2n} + 13.3^n$ luôn chia hết cho 22.

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(a; b)$ sao cho ab là ước của $a^2 + b$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (đề chuyên Toán) năm học 2022 – 2023)

a) Chứng minh rằng $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120$ chia hết cho 24 với mọi số tự nhiên n.

b) Cho p là số nguyên tố có dạng $4k+3 (k \in \mathbb{N})$. Chứng minh nếu $a, b \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^2 + b^2$ chia hết cho p thì $a \vdots p$ và $b \vdots p$. Từ đó suy ra phương trình $x^2 + 4x + 9y^2 = 58$ không có nghiệm nguyên.

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các số nguyên dương a và các số nguyên tố p sao cho $a^2 = 7p^4 + 9$.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ (đề chung) năm học 2022 – 2023)
Cho n số nguyên dương sao cho $4n+13$ và $5n+16$ là các số chính phương. Chứng minh rằng $2023n+45$ chia hết cho 24.

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ (đề chuyên Toán) năm học 2022 – 2023)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình $x^2-2xy+8x+4(y-4)^2=0$.

b) Chứng minh rằng nếu m, n là hai số tự nhiên thỏa mãn $2022m^2+m=2023n^2+n$ thì $2022(m+n)+1$ là số chính phương.

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Yên năm học 2022 – 2023)

Cho các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $(x+y)^4+5z=63x$.

Tính giá trị biểu thức $Q=x+y+z$.

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Bình năm học 2022 – 2023)
Tìm $n\in\mathbb{N}$ để n^5+1 chia hết cho n^3+1.

Bài 41. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Nam năm học 2022 – 2023)

a) **(Chuyên Tin)** Tìm tất cả các số nguyên dương n để n^4-3n^2+1 là số nguyên tố.

b) **(Chuyên Toán)** Tìm tất cả các cặp số nguyên x, y thỏa mãn $x^3+x^2=y^3+y^2$.

Bài 42. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ngãi năm học 2022 – 2023)

a) Chứng minh rằng $n^4+2n^3-n^2-2n$ chia hết cho 24 với mọi số nguyên n.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $25n^2+10n+48$ là tích của hai số nguyên dương chẵn liên tiếp.

Bài 43. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ninh năm học 2022 – 2023)

a) Chứng minh rằng với x là số nguyên bất kỳ thì $25x+1$ không thể viết dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.

b) Tìm tất cả các số thực x sao cho $\left\{\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}\right\}=\dfrac{1}{2}$, trong đó ký hiệu $\{a\}=a-[a]$ với $[a]$ là số nguyên lớn nhất không vượt quá a.

Bài 44. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2022 – 2023)

1) Tìm tất cả các số nguyên tố p và q thỏa mãn $p^2-2q^2=1$.

2) Ba cầu thủ của một đội bóng trò chuyện với nhau về số áo được in trên áo mỗi người, nội dung như sau:
An: Tôi nhận ra rằng các số trên áo của chúng ta đều là số nguyên tố có hai chữ số.
Bình: Tổng hai số trên ảo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi đã trôi qua vào tháng này. Chung: Thật thú vị! Tổng hai số trên áo của hai bạn là ngày sinh nhật của tôi sắp tới vào tháng này.
An: Và tổng hai số trên áo hai bạn là ngày hôm nay.
Hãy xác định số áo của An, Bình và Chung.

Bài 45. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2022 – 2023)

a) Cho $A=2.\left(1^{2023}+2^{2023}+.....+2022^{2023}\right)$. Chứng minh rằng $A\,\vdots\,2022$

b) Tìm các nghiệm nguyên của phương trình $2x^2+5y^2+4x=21$.
Với hai số nguyên dương a, b bất kỳ, ta có $a^{2023}+b^{2023}\,\vdots\,(a+b)$.

Bài 46. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tuyên Quang năm học 2022 – 2023)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $3xy+x-6y=4$.

Bài 47. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2022 – 2023)

Tìm các số tự nhiên $x,\ y$ thỏa mãn: $(2^x+1)(2^x+2)(2^x+3)(2^x+4)-5^y=11879$.

Bài 48. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Nguyên năm học 2022 – 2023)

Tìm các số nguyên tố $a,\ b,\ c$ sao cho: $a^4+b^4+c^4+54=11abc$.

Bài 49. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hóa (Chuyên Toán) năm học 2022 – 2023)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^2-3y^2-2xy-2x+14y-11=0$.

b) Tìm tất cả các số nguyên dương n để 2^n+n^2+25 là lập phương của một số nguyên tố.

Bài 50. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hóa (Chuyên Tin) năm học 2022 – 2023)

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $(x;y)$ sao cho $x^2+y^2-2(x+y)=xy$.

b) Cho p là số nguyên tố lẻ. Tìm tất cả các số nguyên dương n để n^2-np là bình phương của một số nguyên dương.

Bài 51. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả số nguyên $x,\ y$ thỏa mãn $x^3-x^2(y+1)+x(7+y)-4-y=0$.

Bài 52. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2022 – 2023)

Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn $y=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

Bài 1. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Ninh năm học 2022 – 2023)

a) Biến đổi giả thiết thành $(x^2+1)(x+1)=z^y$. $\quad(*)$

Do $x,\ y,\ z$ đều nguyên nên từ $(*)$ suy ra $x,\ y\ge 0$.

Đồng thời vì z là số nguyên tố nên $\begin{cases}x^2+1=z^a\\x+1=z^b\end{cases}$ $(a,\ b\in\mathbb{Z};\ a\ge b\ge 0)$.

Khi đó ta có $x^2+1\,\vdots\,x+1\Rightarrow(x+1)(x-1)+2\,\vdots\,x+1$.

Dẫn tới $2\,\vdots\,(x+1)\Rightarrow x\in\{0;1\}$ (do $x\ge 0$).

Với $x=0\Rightarrow(*)\Leftrightarrow z^y=1\Leftrightarrow y=0$ và z là số nguyên tố bất kỳ.

Với $x=1\Rightarrow(*)\Leftrightarrow z^y=4\Leftrightarrow x=y=2.$

Vậy $(x;y;z)=(1;2;2)$ hoặc $(x;y;z)=(0;0;k)$ với k là số nguyên tố bất kỳ.

b) Giả sử $x+\sqrt{2022}=a\ (a\in\mathbb{Z})\Rightarrow x=a-\sqrt{2022}$

$$\Rightarrow\frac{3}{x}-\sqrt{2022}=\frac{3}{a-\sqrt{2022}}-\sqrt{2022}=\frac{3\left(a+\sqrt{2022}\right)}{a^2-2022}-\sqrt{2022}$$

$$=\frac{3a}{a^2-2022}+\left(\frac{3}{a^2-2022}-1\right).\sqrt{2022}.$$

Vì $\frac{3}{x}-\sqrt{2022}\in\mathbb{Z}$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $\begin{cases}\frac{3a}{a^2-2022}\in\mathbb{Z}\\ \frac{3}{a^2-2022}-1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=\pm45\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=45-\sqrt{2022}\\ x=-45-\sqrt{2022}\end{array}\right.$.

Bài 2. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bà Rịa – Vũng Tàu năm học 2022 – 2023)

Đặt $a=x+y;\ b=2x+3y$ thì từ giả thiết ta được:

$$ab^2+4a-b+2=0\Leftrightarrow a\left(b^2+4\right)=b-2\Leftrightarrow a=\frac{b-2}{b^2+4}$$

Do $x,\ y\in\mathbb{Z}\Rightarrow a,\ b\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{b-2}{b^2+4}\in\mathbb{Z}$.

Với $b=2\Rightarrow a=0\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\ 2x+3y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=2\end{cases}$ (thử lại đúng).

Với $b\neq2\Rightarrow|b-2|\geq b^2+4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}b-2\geq b^2+4\\ 2-b\geq b^2+4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2-b+6\leq0\\ b^2+b+2\leq0\end{array}\right.$ (vô lý).

Vậy $(x;y)=(-2;2)$.

Bài 3. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bạc Liêu năm học 2022 – 2023)

a) $S=n^3(n+2)^2+(n+1)\left(n^3-5n+1\right)-2n-1$

$=n\left(n^4+5n^3+5n^2-5n-6\right)=n\left(n^2-1\right)\left(n^2+5n+6\right)$

$=(n-1)n(n+1)(n+2)(n+3)$.

Trong 5 số nguyên liên tiếp có 1 số chia hết cho $2;\ 3;\ 4;\ 5$.

Do đó $S\,\vdots\,(2.3.4.5)\Rightarrow S\,\vdots\,120$.

b) Ta có: $(2x+y)(x-y)+3(2x+y)-5(x-y)=22$

$\Leftrightarrow(2x+y)(x-y+3)-5(x-y+3)=7$

$\Leftrightarrow(2x+y-5)(x-y+3)=7=1.7=7.1=(-7).(-1)=(-1).(-7)$.

Sau khi thử các trường hợp ta được $(x;y)\in\{(-2;8),(-2;2)\}$.

Bài 4. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Giang năm học 2022 – 2023)

a) Phương trình đã cho tương đương với $\left(x^2-1\right)^2+(x-3y)^2+(5z)^2=2023$.

Với $x,\ y,\ z$ là các số nguyên ta có: $\left(x^2-1\right)^2,\ (x-3y)^2,\ (5z)^2$ là các số chính phương (bình phương của số nguyên).

Mỗi số nguyên khi chia cho 8 được số dư là một trong các số $0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3;\ 4$

$\Rightarrow$ Mỗi số chính phương khi chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0;\ 1;\ 4$.

Từ đó $\left(x^2-1\right)^2+(x-3y)^2+(5z)^2$ là tổng của 3 số chính phương nên nó chia cho 8 sẽ được số dư là một trong các số $0;\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6$

Mặt khác 2023 chia cho 8 dư 7.

Do vậy, không thể tìm được ba số nguyên $x,\ y,\ z$ thỏa mãn yêu cầu của đề bài.

Bài 5. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bắc Kạn năm học 2022 – 2023)

Vì $5(x+y+z)=xyz\Rightarrow xyz\,\vdots\,5$.

Suy ra trong 3 số $x,\ y,\ z$ có ít nhất một số chia hết cho 5.

Vì vai trò $x,\ y,\ z$ như nhau, giả sử $z\vdots 5,$ mà z là số nguyên tố nên $z=5$.

Khi đó phương trình trở thành: $x+y+5=xy \Leftrightarrow (x-1)(y-1)=6=2.3=1.6$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-1=2 \\ y-1=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ (loại vì $x,\ y$ nguyên tố).

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-1=1 \\ y-1=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $(x;y;z)\in\{(2;7;5);(2;5;7);(7;5;2);(7;2;5);(5;2;7);(5;7;2)\}$.

Bài 6. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bến Tre năm học 2022 – 2023)

Ta có: $(2x-y+3)^2=3\left(x-3y-y^2+2\right)(2x-y+3)^2=3\left(x-3y-y^2+2\right)$

$\Leftrightarrow 4x^2+y^2+9-4xy-6y+12x=3x-9y-3y^2+6$

$\Leftrightarrow 4x^2+4y^2+3-4xy+3y+9x=0$

$\Leftrightarrow 64x^2+64y^2+48-64xy+48y+144x=0$

$\Leftrightarrow (8x)^2+(-4y)^2+9^2-64xy+144x-72y+48y^2+120y=33$

$\Leftrightarrow (8x-4y+9)^2+3(4y+5)^2=108\ (*) \Rightarrow 3(4y+5)^2\le 108 \Rightarrow (4y+5)^2\le 36$.

Mặt khác từ $(*)$ suy ra $(8x-4y+9)^2\vdots 3 \Rightarrow (8x-4y+9)^2\vdots 9$. Mà $108\vdots 9 \Rightarrow (4y+5)^2\vdots 9$.

Mà $(4y+5)^2$ là số chính phương lẻ nên $(4y+5)^2=9 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4y+5=3 \\ 4y+5=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-\dfrac{1}{2}(ktm) \\ y=-2\Rightarrow x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy $(x;y)=(-1;-2)$.

Bài 7. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Dương năm học 2022 – 2023)

Với mọi $a\in\mathbb{Z}$ ta có $A=a^7-a=a\left(a^3-1\right)\left(a^3+1\right)$.

Nếu $a\vdots 7\Rightarrow A\vdots 7$.

Nếu a không chia hết cho 7 thì $a\equiv 1,2,3,4,5,6\ (\text{mod}\,7)\Rightarrow a^3\equiv 1,6\ (\text{mod}\,7)\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^3-1\vdots 7 \\ a^3+1\vdots 7 \end{array}\right.$.

Vậy $A\vdots 7$ với mọi $a\in\mathbb{Z}$.

Bài 8. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Định năm học 2022 – 2023)

$P=a+2b+3c+2022=(a+2021)+(2b-2022)+(3c+2023)$.

$S-P=\left[(a+2021)^5-(a+2021)\right]+\left[(2b-2022)^5-(2b-2022)\right]+\left[(3c+2023)^5-(3c+2023)\right]$

Với $n\in\mathbb{Z}$ thì $n^5-n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5n(n-1)(n+1)$.

Suy ra $\left(n^5-n\right)\vdots 5$ và $\left(n^5-n\right)\vdots 2;\ \left(n^5-n\right)\vdots 3$.

Do đó $\left(n^5-n\right)\vdots 30$, từ đó $(S-P)\vdots 30$. Do $P\vdots 30\Rightarrow S\vdots 30$.

Bài 9. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Phước năm học 2022 – 2023)

a) Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x-2y)(x+3y)+2y-x-7=0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x+3y-1)=7=(-7).(-1)=(-1).(-7)=1.7=7.1$.

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-2y=-7 \\ x+3y-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow y=\dfrac{7}{5}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ x+3y-1=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ y=-1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\begin{cases} x-2y=1 \\ x+3y-1=7 \end{cases} \Leftrightarrow y=\dfrac{7}{5}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 4: $\begin{cases} x-2y=7 \\ x+3y-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy các cặp số nguyên cần tìm là $(x;y)\in\{(-3;1);(5;-1)\}$.

b) Nếu $x,\ y$ là hai số chẵn thì $x^2-2021y^2+2022$ không chia hết cho 4 và xy chia hết cho 4 (vô lý).

Nếu $x,\ y$ có 1 số chẵn, 1 số lẻ thì $x^2-2021y^2+2022$ là số lẻ và xy là số chẵn (vô lý).

Giả sử $(x,y)=d\Rightarrow x^2-2021y^2 \vdots d^2$ và $xy \vdots d^2$.

Từ giả thiết suy ra $2022 \vdots d^2$. Mà $2022=2.3.337\Rightarrow d=1$.

Bài 10. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cà Mau năm học 2022 – 2023)

Ta có $a^2+b^2=a+b+ab\Leftrightarrow(a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2=2$

$\Rightarrow$ Trong 3 số $(a-1)^2,(b-1)^2,(a-b)^2$ phải có đúng hai số bằng 1 và 1 số bằng 0.

Giải các trường hợp, ta thu được 6 nghiệm nguyên:

$$(a;b)\in\{(1;2);(2;1);(1;0);(0;1);(0;0);(2;2)\}.$$

Bài 11. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Cao Bằng năm học 2022 – 2023)

Ta có: $x^{2022}=y^{2022}-y^{1348}-y^{674}+2.\qquad (1)$

Đặt $\begin{cases} a=x^{674} \\ b=y^{674} \end{cases}(a,\ b\in\mathbb{N}^*)$, ta được phương trình: $a^3=b^3-b^2-b+2$.

Xét: $a^3-(b-1)^3=b^3-b^2-b+2-b^3+3b^2+1=2b^2-4b+3=2(b-1)^2+1>0$

$\Rightarrow a^3>(b-1)^3\Rightarrow a^3\ge b^3\Leftrightarrow b^3-b^2-b+2\ge b^3$

$\Leftrightarrow b^2+b-2\le 0\Leftrightarrow(b+2)(b-1)\le 0$ (do $b+2>b-1$)

$\Rightarrow\begin{cases} b+2\ge 0 \\ b-1\le 0 \end{cases}\Rightarrow -2\le b\le 1.$

Do $b\in\mathbb{N}^*\Rightarrow b=1\Rightarrow y^{674}=1\Rightarrow y=1$ (do $y\in\mathbb{N}^*$) $\Rightarrow x=1$ (do $x\in\mathbb{N}^*$).

Vậy $(x;y)=(1;1)$.

Bài 12. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đà Nẵng năm học 2022 – 2023)

Ta có $a^3=(b^2+a)b+5\Leftrightarrow a^3-b^3=ab+5\ (*)\Leftrightarrow(a-b)(a^2+ab+b^2)=ab+5$.

Trường hợp 1: $a>b\Rightarrow ab+5>a^2+ab+b^2\Rightarrow a^2+b^2\le 5$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} a=2,b=1(tm) \\ a=1,b=-2(ktm) \\ a=-1;b=-2(tm) \\ a=-2;b=-2(ktm) \end{array}\right..$$

Trường hợp 2: $a<b$

Gọi $d=(a,b)$ thì ta có $\begin{cases} a=dm_1 \\ b=dm_2 \end{cases} (m_1;m_2)=1 \Rightarrow m_2>m_1$. Thay vào $(*)$ ta được:

$$d^3m_1^3-d^3m_2^3=d^2m_1m_2+5 \Leftrightarrow d^2\left(m_1^3-m_2^3-m-m_1m_2\right)=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} d^2=1 \\ m_1^3-m_2^3-m_1m_2=5 \end{array}\right..$$

Từ đây ta sẽ có được: $m_1^3=m_2^3+m_1m_2+5$.

Nếu $m_1m_2>0 \Rightarrow m_1^3>m_2^3$ (không thỏa mãn).

Do đó $m_1m_2<0$ hay $a<0;\ b>0$. Ta lại có $a^3=\left(b^2+a\right)b+5$.

$(\text{VT})<0$ mà $(\text{VP})>0$, do đó trường hợp này không có cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa đề bài.

Vậy cặp số nguyên $(a;b)$ thỏa đề là $(a;b)\in\{(2;1);(-1;-2)\}$.

Bài 13. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Đak Nông năm học 2022 – 2023)

Ta có: $2x^2+y^2-3xy-x-y-13=0 \Leftrightarrow (x-y-2)(2x-y+3)=7$.

Ta xét các trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x-y-2=1 \\ 2x-y+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x-y-2=-1 \\ 2x-y+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-12 \end{cases}.$

Trường hợp 3: $\begin{cases} x-y-2=7 \\ 2x-y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-11 \\ y=-20 \end{cases}.$

Trường hợp 4: $\begin{cases} x-y-2=-7 \\ 2x-y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}.$

Vậy tập nghiệm nguyên của phương trình đã cho là
$S=\{(1;-2);(-11;-12);(-11;20);(1;6)\}$.

Bài 14. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Bình Thuận năm học 2022 – 2023)

a) Ta có: $x^4+x^2-y^2-y+4=0 \Leftrightarrow \left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=-4$

$\Leftrightarrow \left(x^2+y+1\right)\left(x^2-y\right)=(-1).4=4.(-1)$.

Do $x^2+y+1+x^2-y=2x^2+1>0$ nên ta xét 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases} x^2+y+1=-1 \\ x^2-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=-2 \\ x^2-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2=2 \\ x^2-y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm1 \\ y=-3 \end{cases}.$

Trường hợp 2: $\begin{cases} x^2+y+1=4 \\ x^2-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=3 \\ x^2-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm1 \\ y=2 \end{cases}.$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình là $(x;y)\in\{(1;-3),(-1;-3),(1;2);(-1;-2)\}$.

b) Ta chứng minh: a hoặc b chia hết cho 3 $\Rightarrow abc\,\vdots\,3$.

Nếu a và b cùng không chia hết cho 3.

Suy ra a^2+b^2 chia cho 3 dư 2 (vì số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1)

$\Rightarrow c^2$ chia cho 3 dư 2, mâu thuẫn với số chính phương chia cho 3 dư 0 hoặc 1.

Do đó a và b cùng không chia hết cho 3 không xảy ra.

Vậy $abc\,\vdots\,3$. $\qquad\qquad (1)$

Ta chứng minh: a và b cùng chẵn $\Rightarrow ab\vdots 4 \Rightarrow abc\vdots 4$.
Nếu a và b cùng lẻ suy ra c là số lẻ mặt khác số chính phương lẻ chia 4 dư 1.
Do đó a^2, b^2 chia cho 4 có dư là 1 suy ra c^2 chia cho 4 dư 2 điều này mâu thuẫn với số chính phương chẵn chia 4 dư 0 ($a^2+b^2=c^2$ là số chẵn), do đó a và b cùng lẻ không xảy ra.
Trường hợp a và b không cùng tính chẵn lẻ và do a, b có vai trò như nhau nên ta giả sử a là số chẵn và b là số lẻ.
Ta có b^2, c^2 chia cho 8 dư 1 (vì số chính phương lẻ chia 8 dư 1)
Suy ra c^2-b^2 chia hết cho $8 \Rightarrow c^2-b^2=a^2\vdots 8 \Rightarrow a\vdots 4 \Rightarrow abc\vdots 4.$ $\quad (2)$
Ta chứng minh a hoặc b chia hết cho $5 \Rightarrow ab\vdots 5 \Rightarrow abc\vdots 5$.
a và b cùng không chia hết cho 5 suy ra a^2, b^2 chia cho 5 dư 1 hoặc 4 (vì số chính phương chia 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4).
Suy ra a^2+b^2 chia cho 5 dư 0, 2 hoặc 3 $\Rightarrow c^2$ chia cho 5 dư 0, 2 hoặc 3.
Mặt khác số chính phương chia cho 5 dư 0 hoặc 1 hoặc 4.
Do đó $c^2\vdots 5 \Rightarrow c\vdots 5 \Rightarrow abc\vdots 5$. $\quad (3)$
Ta có abc chia hết cho 3, 4, 5 mà $\text{BCNN}(3,4,5)=60 \Rightarrow abc\vdots 60$.

Bài 15. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Gia Lai năm học 2022 – 2023)

Ta có: $x^2y^2-2x^2y+3x^2+4xy-4x+2y^2-4y-1=0$

$\Leftrightarrow (x^2y^2-2x^2y+x^2)+(2x^2+4xy+2y^2)-4x-4y-1=0$

$\Leftrightarrow (xy-x)^2+2(x+y)^2-4(x+y)+2=3$

$\Leftrightarrow (xy-x)^2+2(x+y-1)^2=3$

Vì x, y là các số nguyên nên $(xy-x)^2$ và $(x+y-1)^2$ là các số tự nhiên.

Do đó $(xy-x)^2+2(x+y-1)^2=3 \Leftrightarrow \begin{cases}(xy-x)^2=1\\(x+y-1)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}[x(y-1)]^2=1\\x^2+(y-1)^2+2x(y-1)=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x(y-1)=1\\x^2+(y-1)^2=-1\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x(y-1)=-1\\x^2+(y-1)^2=3\end{cases}$.

Cả hai trường hợp đều không thỏa mãn
Vậy không tồn tai các số nguyên x, y thỏa mãn đề bài.

Bài 16. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Giang năm học 2022 – 2023)

$(2x+y)(x-y)+x+8y=22 \Leftrightarrow 2x^2-xy-y^2+x+8y-15=7$

$\Leftrightarrow (2x^2-2xy+6x)+(xy-y^2+3y)-(5x-5y+15)=7$

$\Leftrightarrow 2x(x-y+3)+y(x-y+3)-5(x-y+3)=7$

$\Leftrightarrow (x-y+3)(2x+y-5)=7=1.7=7.1=(-1).(-7)=(-7).(-1)$

Trường hợp 1: $\begin{cases}x-y+3=1\\2x+y-5=7\end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{10}{3}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases}x-y+3=7\\2x+y-5=1\end{cases} \Rightarrow y=-\dfrac{2}{3}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\begin{cases} x-y+3=-1 \\ 2x+y-5=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=2 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Trường hợp 4: $\begin{cases} x-y+3=-7 \\ 2x+y-5=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ y=8 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y) \in \{(-2;2);(-2;8)\}$.

Bài 17. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán tỉnh Hà Nam năm học 2022 – 2023)

Ta có: $x^4-6x^3+18x^2-y^2-32x+4y+20=0$

$\Leftrightarrow x^4-6x^3+18x^2-32x+24=y^2-4y+4$

$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2-2x+6)=(y-2)^2$.

Với $y=2 \Rightarrow x=2$.

Với $y \neq 2$, ta có $(y-2)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên x^2-2x+6 là số chính phương. Đặt $x^2-2x+6=m^2$ $(m \in \mathbb{N}^*)$

$\Rightarrow (x-1)^2+5=m^2 \Leftrightarrow (x-1-m)(x-1+m)=-5$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1+m=5 \\ x-1-m=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=-1 \end{array}\right. \\ m=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1+m=0 \\ x-1-m=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=11 \\ y=-7 \end{array}\right. \\ m=3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy các bộ số $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là

$(2;2)$, $(3;5)$, $(3;-1)$, $(-1;11)$, $(-1;-7)$.

Bài 18. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Toán thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

a) Đặt $n=2k+1$ với k là số tự nhiên, khi đó ta có:

$$3^{2n+1}-7=3^{4k+3}-7=81^k.27-7 \equiv 27-7 \equiv 0 \pmod{20} \Rightarrow \text{đpcm}.$$

b) Dễ thấy $(x^2+x+1;x+1)=(x(x+1)+1,x+1)=1$.

Từ phương trình, ta suy ra $y(x^2+x+1)$ chia hết cho $x+1$.

Mà $(x^2+x+1,x+1)=1$ nên $y \vdots (x+1)$.

Đặt $y=k(x+1)$ với k là số nguyên dương.

Khi đó, từ phương trình đã cho, ta suy ra: $k(x^2+x+1)=y^2-1=k^2(x+1)^2-1$.

Do đó: $1=k^2(x+1)^2-k(x^2+x+1)>k^2(x+1)^2-k(x+1)^2=k(k-1)(x+1)^2 \geq 4k(k-1)$.

Suy ra $k<2$.

Mà k là số nguyên dương nên $k=1 \Rightarrow y=x+1$. Thay trở lại phương trình đã cho, ta được:

$$x^2+x+1=(x+1)^2-1=x^2+2x. \text{ Từ đó } x=1 \Rightarrow y=2.$$

Vậy phương trình có nghiệm $(x;y)=(1;2)$.

c) Không mất tính tổng quát, giả sử $m \geq n$.
Đặt $m^3 = p(m+n)$ với p là số nguyên tố. Từ đây, ta suy ra $m \vdots p$.

Kết hợp với $m \geq n$, ta có: $p = \frac{m^3}{m+n} \geq \frac{m^3}{2m} = \frac{m^2}{2} \geq \frac{p^2}{2}$ hay $p \leq 2$ mà p nguyên tố nên $p = 2$.

Như vậy, dấu đẳng thức trong dãy đánh giá trên phải xảy ra, tức là phải có $m = n = p = 2$.
Thử lại, ta thấy thỏa mãn.
Vậy có duy nhất 1 nghiệm $(m;n) = (2;2)$.

Bài 19. (Đề thi vào 10 hệ chuyên Tin thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

a) Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ và p không chia hết cho 3.
Do p lẻ nên hiển nhiên $5^p + p^2$ là số chẵn. (1)
Do p không chia hết cho 3 nên p chia 3 dư 1 hoặc 2, suy ra p^2 chia dư 1.
Mặt khác, do p lẻ nên 5^p chia 3 dư 2. Từ đây, ta suy ra $5^p + p^2$ chia hết cho 3. (2)
Từ (1) và (2), với chú ý $(2,3) = 1$, ta có $5^p + p^2$ chia hết cho 6.

b) Phương trình đã cho có thể được viết lại thành $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = y(x^2 - 2)$. $(*)$

Do $x^2 - 2 \neq 0$ nên từ đây, ta suy ra $x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ chia hết cho $x^2 - 2$.
Từ đó $x^3 - 5x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2)(x - 5) = 4x - 9$ chia hết cho $x^2 - 2$.
Và như thế, ta có $16(x^2 - 2) - (4x + 9)(4x - 9) = 49$ chia hết cho $x^2 - 2$.
Vì $x^2 - 2 \geq -2$ nên từ kết quả trên, ta suy ra $x^2 - 2 \in \{-1;1;7;49\}$ hay $x \in \{-1;1;-3;3\}$.
Lần lượt thay các giá trị này vào phương trình $(*)$, ta tìm được các cặp số nguyên $(x;y)$ thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(-1;7)$, $(1;1)$ và $(-3;-11)$.

Bài 20. (Đề thi vào 10 chuyên KHTN (vòng II) thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

Ta biến đổi như sau:

$$(x+y)(5x+y)^3 + xy^3 = (5x+y)^3 + x^2y^3 + xy^4 \Leftrightarrow (x+y-1)(5x+y)^3 = xy^3(x+y-1).$$

Vì x, y là hai số nguyên dương nên $x + y > 1$. Suy ra: $(5x+y)^3 = xy^3$.
Do đó, ta suy ra x cũng là lập phương của một số nguyên dương.
Đặt $x = z^3$, ta có: $(5z^3 + y)^3 = (zy)^3 \Leftrightarrow 5z^3 + y = zy \Leftrightarrow y(z-1) = 5z^3$.
Nếu $z = 1$ (không thỏa mãn).
Xét $z \neq 1$. Khi đó, ta có $5z^3 \vdots (z-1)$. Vì $5z^3 \equiv 5(\bmod z-1) \Rightarrow 5 \vdots z-1$.
Từ đây ta tìm được $z \in \{2;6\}$. Suy ra: $(z;y) \in \{(2;40);(6;216)\}$
$\Rightarrow (x;y) \in \{(8,40);(216;216)\}$.

Bài 21. (Đề thi vào 10 chuyên Sư phạm thành phố Hà Nội năm học 2022 – 2023)

Từ giả thiết, ta có $\frac{a^{2022}}{c^{2022}} = \frac{d^{2022}}{b^{2022}} = \frac{x}{y}$ với x, y là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau.

Do $\dfrac{x}{y}$ là phân số tối giản nên tồn tại các số nguyên dương $m,\ n$ sao cho $a^{2022}=mx$, $c^{2022}=my,\ d^{2022}=nx,\ b^{2022}=ny$.

Từ đó, ta có: $N=mx+ny+my+nx=(m+n)(x+y)$ là hợp số do $m+n;\ x+y$ là các số nguyên dương lớn hơn 1.

Bài 22. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hà Tĩnh năm học 2022 – 2023)

a) Ta có $A=(n+2)^2\left[(n+1)^2+1\right]$.

Xét $n+2=0 \Leftrightarrow n=-2,$ ta có $A=0$ là số chính phương.

Xét $n+2\neq 0 \Leftrightarrow n\neq -2,$ để A là số chính phương thì $(n+1)^2+1=a^2\ (a\in\mathbb{N})$.

Do đó, ta có $(n+1)^2-a^2=-1 \Leftrightarrow (n+1-a)(n+1+a)=-1$.

Ta có các trường hợp:

Trường hợp 1: $\begin{cases} n+1-a=-1 \\ n+1+a-1 \end{cases} \Leftrightarrow n=-2$ (thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases} n+1-a=1 \\ n+1+a=-1 \end{cases} \Leftrightarrow n=-1$ (thỏa mãn).

Vậy $n=-2$ hoặc $n=-1$ thì A là số chính phương.

b) Ta có $|x|+x=2x$ nếu $x\geq 0,\ |x|+x=0$ nếu $x<0,$ do đó $|x|+x \vdots 2$ với mọi số nguyên x.

Ta có: $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|$

$=(|a-b|+a-b)+(|b-c|+b-c)+(|c-d|+c-d)+(|d-a|+d-a) \vdots 2\ (\forall a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Z})$.

Do đó $|a-b|+|b-c|+|c-d|+|d-a|=a^{2022}+2023$ chia hết cho 2.

Suy ra a^{2022} lẻ, do đó a lẻ, nên a^2 chia 8 dư 1.

Suy ra $(a^6-1) \vdots 8$ và $(a^6+1) \vdots 2$.

Vậy $a^{12}=(a^6-1)(a^6+1)+1$ chia cho 16 dư 1.

Bài 23. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hải Dương năm học 2022 – 2023)

Ta có: $y^2-5y+62=(y-2)x^2+(y^2-6y+8)x$

$\Leftrightarrow (y-2)(y-3)+56=(y-2)x^2+(y-2)(y-4)x$

$\Leftrightarrow (y-2)\left[x^2+(y-4)x-(y-3)\right]=56$

$\Leftrightarrow (x-1)(y-2)(x+y-3)=56$.

Vì $(x-1)+(y-2)=x+y-3$ nên ta phải phân tích số 56 thành tích của ba số nguyên mà tổng hai số đầu bằng số còn lại. Ta có các trường hợp:

*)$56=1.7.8 \Rightarrow (x;y)=(2;9)$ *)$56=7.1.8 \Rightarrow (x;y)=(8;3)$

*)$56=(-8).1.(-7) \Rightarrow (x;y)=(-7;3)$ *)$56=1.(-8).(-7) \Rightarrow (x;y)=(2;-6)$

*)$56=(-8).7.(-1) \Rightarrow (x;y)=(-7;9)$ *)$56=7.(-8).(-1) \Rightarrow (x;y)=(8;-6)$

Vậy phương trình đã cho có 6 nghiệm nguyên:

$$(x;y)\in\{(2;9);(8;3);(-7;3);(2;-6);(-7;9);(8;-6)\}.$$

Bài 24. (Đề thi vào 10 hệ chuyên thành phố Hải Phòng năm học 2022 – 2023)

Ta có $2^n=10a+b \vdots 2 \Rightarrow b \vdots 2$.

Đặt $n=4k+r\ \left(k\in\mathbb{N};\ r\in\{0;1;2;3\}\right)$.

Trường hợp 1: $r=0$. Khi đó: $2^n-1=16^k-1\vdots 5\Rightarrow 2^n-6\vdots 5\Rightarrow n^n-6\vdots 10\Rightarrow b=6\Rightarrow ab\vdots 6$.

Trường hợp 2: $r\in\{1;2;3\}$. Khi đó: $2^n-2^r=2^r\left(16^k-1\right)\vdots 5\Rightarrow 2^n-2^r\vdots 10$.

Mà $2^r\in\{2;4;8\}\Rightarrow b=2^r\Rightarrow 10a=2^n-2^r=2^r\left(16^k-1\right)\vdots 3\Rightarrow a\vdots 3\Rightarrow ab\vdots 6$ (vì $b\vdots 2$).

Bài 25. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hậu Giang năm học 2022 – 2023)

Do $p,\ q$ là số nguyên tố, $p+q,\ p-q$ cũng là số nguyên tố nên $q=2\Rightarrow p\ge 5$.

Nếu $p=5$ thì $p-2=3; p+2=7$ đều là số nguyên tố.

Nếu $p>5$ thì p là số lẻ nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2$, với k là số nguyên dương.

+ Với $p=3k+1$, ta có: $p+2=3k+1+2=3(k+1)$ không là số nguyên tố.

+ Với $p=3k+2$, ta có: $p-2=3k-2-2=3k$ không là số nguyên tố.

Vậy $p=5;\ q=2$.

Bài 26. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Đắc Lắc năm học 2022 – 2023)

Ta có: $5x^2+3y^2=20x-24y+477$

$\Leftrightarrow 5x^2-20x+20+3y^2+24y+48=545$

$\Leftrightarrow 5(x-2)^2+3(y+4)^2=545$.

Do $5(x-2)^2$ và 545 cùng chia hết cho 5 nên $3(y+4)^2\vdots 5$.

Mà $(3,5)=1$ nên $3(y+4)^2\le 545\Leftrightarrow (y+4)^2\le \dfrac{545}{3}\Rightarrow y+4\le 13\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\\ y=6\end{array}\right.$.

Với $y=1\Rightarrow (x-2)^2=94$ (không thỏa mãn).

Với $y=6\Rightarrow (x-2)^2=49\Rightarrow x=9$ (thỏa mãn).

Vậy $(x;y)=(9;6)$.

Bài 27. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nghệ An năm học 2022 – 2023)

a) Đặt $x-y=a,\ xy=b$ thì $a,\ b\in\mathbb{Z}$, ta biến đổi phương trình như sau:

$(x-y)^2(8-xy)+4=12(x-y)\Leftrightarrow a^2(8-b)+4=12a$

$\Leftrightarrow b=\dfrac{8a^2-12a+4}{a^2}=8-\dfrac{12a-4}{a^2}\in\mathbb{Z}\ (1)\Leftrightarrow \dfrac{12a-4}{a^2}\in\mathbb{Z}$.

Suy ra $a^2\,|\,12a-4=4(3a-1)$. Mà $\left(3a-1;a^2\right)=(3a-1;a)=1$ nên $4\vdots a^2$.

Từ đây ta được $a\in\{1;-1;2;-2\}$. Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a=1\Rightarrow (1)\Leftrightarrow b=0\Rightarrow \begin{cases} x-y=1\\ xy=0\end{cases}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; y=-1\\ x=1; y=0\end{array}\right.$.

Trường hợp 2: $a=-1\Rightarrow b=24\Rightarrow y(y-1)=24$ (không có nghiệm nguyên).

Trường hợp 3: $a=2\Rightarrow (1)\Leftrightarrow b=3\Rightarrow y(y+2)=3\Leftrightarrow (y-1)(y+3)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=3\\ y=-3\Rightarrow x=-1\end{array}\right.$.

Trường hợp 4: $a=-2\Rightarrow b=15\Rightarrow y(y-2)=15\Leftrightarrow (y-1)^2=4^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5; x=3\\ y=-3; x=-5\end{array}\right.$.

Vậy $(x;y)\in\{(0;-1);(1;0);(3;1);(-1;3);(3;5);(-5;-3)\}$.

b) Giả sử tồn tại n nguyên dương sao cho 2^n+36 và $12^{2n}+25$ là số chính phương.

Ta lập bảng đồng dư sau:

x	0	1	2	3	4	5	6
x^2	0	1	4	2	2	4	1

Do đó ta rút ra được nhận xét: 1 số chính phương bất kỳ dư $0, 1, 2, 4$ theo modun 7.

Quay trở lại bài toán, vì $2^n+36\equiv 2^n \pmod 3$ nên n chẵn (vì số chính phương bất kỳ chỉ đồng dư $0, 1$ mod 3).

Ta xét các trường hợp sau:

$n=3k,\ k=2t \Rightarrow 12^n+25=5^n+4=125^k+4\equiv(-1)^k+4=5 \pmod 7$, mâu thuẫn với nhận xét.

Chứng minh tương tự: $n=3k+1$ và $n=3k+2$ cũng mâu thuẫn với nhận xét.

Do đó, điều giả sử là sai.

Vậy 2^n+36 và $12^{2n}+25$ không đồng thời là số chính phương với mọi n nguyên dương.

Bài 28. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Hưng Yên năm học 2022 – 2023)

$x^4-2x^3+x^2-16y^2+12x-16y+4=0$

$\Leftrightarrow x^4+x^3-3x^3-3x^2+4x^2+4x+8x+8=16y^4+16y+4$

$\Leftrightarrow (x+1)(x^3-3x^2+4x+8)=(4y+2)^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2(x^2-4x+8)=(4y+2)^2$.

Vì $y\in\mathbb{Z}\Rightarrow 4y+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -1$.

Vì $x,y\in\mathbb{Z}$ nên $(x+1)^2$ và $(4y+2)^2$ là số chính phương khác 0 nên (x^2-4x+8) cũng là số chính phương. Đặt $x^2-4x+8=m\ (m\in\mathbb{N}^*)$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+4=m^2 \Leftrightarrow (x-2)^2-m^2=-4\Leftrightarrow (x-2-m)(x-2+m)=-4\ (*)$.

Do $x-2-m<x-2+m$ nên
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2-m=4 \\ x-2+m=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ m=\dfrac{5}{2} \end{cases} (ktm) \\ \begin{cases} x-2-m=-2 \\ x-2+m=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ m=2 \end{cases} (tm) \\ \begin{cases} x-2-m=-1 \\ x-2+m=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7/2 \\ m=5/2 \end{cases} (ktm) \end{array}\right..$$

Với $x=-2\Rightarrow (4y+2)^2=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4y+2=2 \\ 4y+2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=-1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên $(x;y)\in\{(-2;0);(-2;-1)\}$.

Bài 29. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Khánh Hòa năm học 2022 – 2023)

Từ giả thiết suy ra b là số chẵn, đặt $b=2b_1\ (b_1\in\mathbb{N})$.

Ta có: $2a^2+3b^3=4c^4 \Leftrightarrow 2a^2+24b_1^3=4c^4 \Leftrightarrow a^2+12b_1^3=2c^4$.

Suy ra a là số chẵn, lại đặt $a=2a_1\ \left(a_1\in\mathbb{N}\right)$.

Khi đó $2a^2+12b_1^3=4c^4 \Leftrightarrow 8a_1^2+24b_1^3=4c^4 \Leftrightarrow 2a_1^2+6b_1^3=c^4 \Rightarrow c$ là số chẵn.

Vậy $a,\ b,\ c$ đều chia hết cho 2.

Dễ thấy $2a^2+3b^3$ chia 3 dư 0 hoặc dư 2 $\left(a=3k,\ a=3k\pm1\right)$ và $4c^4$ chia 3 dư 0 hoặc 1.

Suy ra cả hai vế chia hết cho $3 \Rightarrow \begin{cases}2a^2+3b^3 \vdots 3\\ 4c^4 \vdots 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a^2 \vdots 3\\ c^4 \vdots 3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a \vdots 3\\ c \vdots 3\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}a=3m\ \left(m\in\mathbb{N}\right)\\ c=3n\ \left(n\in\mathbb{N}\right)\end{cases}$. Khi đó: $2a^2+3b^3=4c^4 \Leftrightarrow 2.9m^2+3b^3=4.81n^4 \Leftrightarrow 2.3m^2+b^3=4.27n^4$

$\Rightarrow b^3 \vdots 3 \Rightarrow b \vdots 3$.

Vậy $a,\ b,\ c$ đều chia hết cho 6.

Bài 30. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Phúc năm học 2022 – 2023)

a) Giả sử $\left(p;q\right)$ là cặp số nguyên tố sao cho luôn tồn tại số nguyên dương r thỏa mãn $p^2+3pq+4q^2=r^2$. (1)

Giả sử $p,\ q$ đều khác 3.

Ta có: $p^2\equiv q^2\equiv 1\ \left(\bmod 3\right)$ nên $r^2=p^2+3pq+4q^2\equiv p^2+q^2\equiv 2\ \left(\bmod 3\right)$ (vô lý vì số chính phương chia cho 3 có số dư khác 2).

Do đó $p \vdots 3$ hoặc $q \vdots 3$. Mà $p,\ q$ là số nguyên tố nên $\left[\begin{array}{l}p=3\\ q=3\end{array}\right.$.

Nếu $p=3$ thay vào (1) ta được: $r^2=4q^2+9q+9<4p^2+12p+9=\left(2q+3\right)^2$.

Mặt khác $r^2=4q^2+9q+9<4q^2+8q+4=\left(2q+2\right)^2$ nên $\left(2q+3\right)^2>r^2>\left(2q+2\right)^2$.

Điều này vô lý nên trường hợp này không có giá trị r thỏa mãn.

Nếu $q=3$ thay vào (1) ta được: $r^2=p^2+9p+36<p^2+12p+36=\left(p+6\right)^2$.

Lại có: $r^2=p^2+9p+36>p^2+8p+16=\left(p+4\right)^2$.

Suy ra $\left(p+4\right)^2<r^2<\left(p+6\right)^2$.

Do đó $r^2=\left(p+5\right)^2 \Leftrightarrow p^2+9p+36=p^2+10p+25 \Leftrightarrow p=11$ (thỏa mãn).

Vậy $p=11;\ q=3$.

b) Với các số $x,\ y,\ p$ thỏa mãn giả thiết, ta có:

$x^3+y^3-6xy=p-8 \Leftrightarrow \left(x+y\right)^3-3xy\left(x+y\right)-6xy=p-8$

$\Leftrightarrow \left(x+y\right)^3+8-3xy\left(x+y+2\right)=p \Leftrightarrow \left(x+y\right)^3+8-3xy\left(x+y+2\right)=p$

$\Leftrightarrow \left(x+y+2\right)\left[\left(x+y\right)^2-\left(x+y\right).2+4-3xy\right]=p$

$\Leftrightarrow \left(x+y+2\right)\left(x^2+y^2+4-xy-2x-2y\right)=p$

$\Rightarrow x+y+2;\ x^2+y^2+4-xy-2x-2y$ là ước của p.

Ta có: $Ư\left(p\right)=\left\{\pm1;\pm p\right\}$.

Do $x,\ y$ nguyên dương nên $x+y+2>2$, mặt khác p nguyên tố nên ta có:

$\begin{cases}x+y+2=p\\ x^2+y^2+4-xy-2x-2y=1\end{cases}$.

Xét phương trình $x^2+y^2+4-xy-2x-2y=1$

$\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+8-2xy-4x-4y=2 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-2)^2+(y-2)^2=2$.

Vì $x,\ y$ có vai trò như nhau nên giả sử $x \ge y$.

Mà $2^2=1^2+1^2+0^2$; $x,\ y$ là các số nguyên và $x \ge y$ nên xảy ra các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}(x-y)^2=1\\(x-2)^2=1\\(y-2)^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=\pm1\\x-2=\pm1\\y-2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-y=\pm1\\\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.\\y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right.\\y=2\end{cases}.$

Với $x=1;\ y=2 \Rightarrow p=5$.

Với $x=3;\ y=2 \Rightarrow p=7$.

Hai trường hợp còn lại làm tương tự cũng cho ra $\left[\begin{array}{l}p=5\\p=7\end{array}\right.$.

Vậy $p \in \{5;7\}$.

Bài 31. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lạng Sơn năm học 2022 – 2023)

$x^2+2xy-6x-6y+6=0 \Leftrightarrow x^2-6x+9+2xy-6y=-3$

$\Leftrightarrow (x-3)^2+2y(x-3)=3 \Leftrightarrow (x-3)(x-3+2y)=3=1.3=3.1=(-1).(-3)=(-3).(-1)$.

*) $\begin{cases}x-3=1\\x-3+2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$ *) $\begin{cases}x-3=3\\x-3+2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=6\\y=1\end{cases}$

*) $\begin{cases}x-3=-1\\x-3+2y=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=-1\end{cases}$ *) $\begin{cases}x-3=-3\\x-3+2y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=1\end{cases}$

Vậy ta có các cặp số $(4;1);(6;-1),(2;-1),(0;1)$.

Bài 32. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lào Cai năm học 2022 – 2023)

a) Nếu n chẵn $\Rightarrow n\,\vdots\,2$, nếu n lẻ $\Rightarrow 13n+1\,\vdots\,2 \Rightarrow P\,\vdots\,2,\ \forall b\in\mathbb{Z}.$

Nếu $n\equiv 0(\mathrm{mod}\,3) \Rightarrow P\,\vdots\,3.$

Nếu $n\equiv 1(\mathrm{mod}\,3) \Rightarrow (2n+1)\,\vdots\,3$.

Nếu $n\equiv 2(\mathrm{mod}\,3) \Rightarrow (13n+1)\,\vdots\,3 \Rightarrow P\,\vdots\,3$.

Mặt khác $(2,3)=1 \Rightarrow P\,\vdots\,6,\ \forall n\in\mathbb{Z}.$

b) Ta có: $3x^2+2y^2+x=2(xy+y+2) \Leftrightarrow 2y^2-2(x+1)y+3x^2+x-4=0.$ (1)

Ta xem phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn y với x là tham số.

$\Delta'=(x+1)^2-2(3x^2+x-4)=-5x^2+9.$

Để phương trình (1) có nghiệm thì $\Delta'\ge0 \Leftrightarrow -5x^2+9\ge0 \Leftrightarrow x^2\le\dfrac{9}{5}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}x^2=0\\x^2=1\end{array}\right.$ (do $x\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow x\in\{-1;0;1\}$.

Thay vào (1) ta được các nghiệm nguyên $(-1;1)(-1;-1);(0;-1);(1;2),(1;0)$.

Bài 33. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Lâm Đồng năm học 2022 – 2023)

Ta có: $2023n^3-n=2022n^3+n^3-n=2022n^3+(n-1)n(n+1)$.

Vì $2022n^3 \vdots 6$ và $(n-1)n(n+1) \vdots 6$ nên $\Rightarrow 2023n^3 - n \vdots 6$.

Bài 34. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Yên Bái năm học 2022 – 2023)

a) Ta có: $B = 9.5^{2n} + 13.3^{2n} = 9.25^n + 13.3^n$

$= 22.25^n - 13.25^n + 13.3^n = 22.25^n - (13.25^n - 13.3^n)$

$= 22.25^n - 13.(25^n - 3^n) \vdots 22$ (vì $(a^n - b^n) \vdots (a-b)$ với mọi số tự nhiên n).

Vậy với mọi số tự nhiên n, số $B = 9.5^{2n} + 13.3^n$ luôn chia hết cho 22.

b) Gọi ƯCLN của a và b là d, suy ra $a = a_1 d$, $b = b_1 d$ với $(a_1; b_1) = 1$.

Theo đề bài ta có: $(a^2 + b) \vdots ab \Rightarrow (a_1^2 d^2 + b_1 d) \vdots d^2.a_1 b_1 \Rightarrow (a_1^2 d + b_1) \vdots d a_1 b_1$

$\Rightarrow a_1^2 d \vdots b_1$ và $b_1 \vdots d a_1$. Mà $(a_1, b_1) = 1$ nên $a_1 = 1, d = b_1$

$\Rightarrow 2d \vdots d^2 \Rightarrow d \in \{1; 2\} \Rightarrow (a,b) = (1;1), (2;4)$.

Bài 35. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Nam Định (đề chuyên Toán) năm học 2022 – 2023)

a) Ta có: $P(n) = n^4 - 14n^3 + 71n^2 - 154n + 120 = (n^4 - 14n^3 + 49n^2) + 22n^2 - 154n + 120$

$= n^2(n^2 - 14n + 49) + 22n(n-7) + 120 = n^2(n-7)^2 + 10n.(n-7) + 12n(n-7) + 10.12$

$= n(n-7)[n(n-7) + 10] + 12[n(n-7) + 10] = [n(n-7) + 10].[n(n-7) + 12]$

$= (n^2 - 7n + 10)(n^2 - 7n + 12) = (n-2)(n-5)(n-3)(n-4) = (n-5)(n-4)(n-3)(n-2)$.

Vì $P(n)$ là tích của 4 số tự nhiên liên tiếp, trong 4 số tự nhiên liên tiếp luôn có 2 số chẵn, một số chia hết cho 4, số còn lại chia hết cho 2.

Ngoài ra có ít nhất một số chia hết cho 3.

Vì vậy $P(n)$ luôn chia hết cho 24 (đpcm).

b) Giả sử $p = 4k + 3$ và $a^2 + b^2$ chia hết cho p.

Nếu a và b đều không chia hết cho p thì $(a, p) = (b, p) = 1$.

Áp dụng định lý Fermat ta có $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ và $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Khi đó: $a^{4k+2} + b^{4k+2} \equiv 2 \pmod{p}$. (1)

Mà $a^{4k+2} + b^{4k+2} = (a^2)^{2k+1} + (b^2)^{2k+1} \vdots (a^2 + b^2) \vdots p$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2 \vdots p$ hay $p = 2$ (mâu thuẫn với giả thiết $p = 4k + 3$) (vô lý).

Vậy $a \vdots p$ và $b \vdots p$ (do $a^2 + b^2 \vdots p$).

Áp dụng, chứng minh phương trình $x^2 + 4x + 9y^2 = 58$ không có nghiệm nguyên

Ta có: $x^2 + 4x + 9y^2 = 58 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + 9y^2 = 62 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (3y)^2 = 62 \vdots 31$.

Lại có $31 = 7.4 + 3$ nên $\begin{cases} x + 2 \vdots 31 \\ 3y \vdots 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 \vdots 31^2 \\ (3y)^2 \vdots 31^2 \end{cases} \Rightarrow 62 \vdots 31^2$ (vô lý).

Vậy phương trình không có nghiệm nguyên dương.

Bài 36. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Ninh Bình năm học 2022 – 2023)

Dễ thấy $(a; p) = (11; 2)$ và $(a; p) = (24; 3)$ thỏa mãn.

Xét $p > 3$, khi đó a chẵn và $(a-3)(a+3) = 7p^4$.

Đặt $d=\text{ƯCLN}(a-3;a+3)\Rightarrow 6\vdots d$. Mà $a-3$ lẻ nên $3\vdots d\Rightarrow(a-3)\vdots 3\Rightarrow 7p^4\vdots 3\Rightarrow p\vdots 3$ (vô lý).

Nếu $d=1\Rightarrow(a-3,a+3)=1$.

Nếu $p=7\Rightarrow\begin{cases}a-3=1\\a+3=7^5\end{cases}$ (không thỏa mãn).

Nếu $p\neq 7,p^4>7\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-3=1\\a+3=7p^4\end{cases}\Rightarrow 7p^4=7\\\begin{cases}a-3=7\\a+3=p^4\end{cases}\Rightarrow p^4=13\end{array}\right.$ (không thỏa mãn).

Vậy $(a;p)=(11;2),(24;3)$.

Bài 37. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ (đề chung) năm học 2022 – 2023)

Giả sử $4n+13=a^2$ và $5n+16=b^2$ $\left(a,\ b\in\mathbb{N}^*\right)$, từ $4n+13=a^2\Rightarrow a$ là số lẻ.

Ta có $4n+13=a^2\Leftrightarrow 4(n+3)=a^2-1\Leftrightarrow 4(n+3)=(a-1)(a+1)$.

Vì a là số lẻ nên $a-1$; $a+1$ là hai số chẵn liên tiếp, do đó $(a-1)(a+1)\vdots 8$

$\Rightarrow(n+3)\vdots 2\Rightarrow n$ là số lẻ $\Rightarrow b^2=5n+16$ là số lẻ.

Lại có $5n+16=b^2\Leftrightarrow 5(n+3)=(b-1)(b+1)\vdots 8$. Mà $(5,8)=1\Rightarrow(n+3)\vdots 8$. (1)

Ta có $a^2+b^2=9n+29\equiv 2(\text{mod}\,3)$.

Mà $a^2\equiv\{0;1\}(\text{mod}\,3),b^2\equiv\{0,1\}(\text{mod}\,3)\Rightarrow a^2\equiv b^2\equiv 1(\text{mod}\,3)$

$\Rightarrow\begin{cases}4n+13\equiv 1(\text{mod}\,3)\\5n+16\equiv 1(\text{mod}\,3)\end{cases}\Rightarrow(n+3)\equiv 0(\text{mod}\,3)$. (2)

Vì $(3;8)=1$ nên từ (1) và (2) suy ra $(n+3)\vdots 24$.

Từ đó $2023n+45=2016+7(n+3)+24\vdots 24$ (đpcm).

Bài 38. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Thọ (đề chuyên Toán) năm học 2022 – 2023)

a) Phương trình $x^2-2xy+8x+4(y-4)^2=0\Leftrightarrow x^2-2(y-4)x+4(y-4)^2=0$. $(*)$

Xem phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn x, ta cần tìm điều kiện của y để phương trình $(*)$ có nghiệm

$\Leftrightarrow\Delta'\geq 0\Leftrightarrow(y-4)^2-4(y-4)^2=-3(y-4)^2\geq 0\Leftrightarrow y=4\Rightarrow x=0$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x;y)=(0;4)$.

b) $2022m^2+m=2023n^2+n\Leftrightarrow 2022m^2-2022n^2+m-n=n^2$

$\Leftrightarrow(m-n)(2022m+2022n+1)=n^2\ (1)$

Trường hợp 1: Với $m=n\Rightarrow(1)\Leftrightarrow m=n=0\Rightarrow 2022(m+n)+1=1$ là số chính phương

Trường hợp 2: Với $m\neq n\Rightarrow m-n>0$.

Gọi $(m-n;2022m+2022n+1)=d\Rightarrow\begin{cases}m-n\vdots d\\2022m+2022n+1\vdots d\end{cases}\Rightarrow n^2\vdots d^2\Rightarrow n\vdots d\Rightarrow m\vdots d$

$\Rightarrow 2022m+2022n \vdots d \Rightarrow 1 \vdots d \Rightarrow d=1 \Rightarrow (m-n;2022m+2022n+1)=1$ hay $m-n$ và $2022m+2022n+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau.

Mặt khác $(m-n)(2022m+2022n+1)=n^2$ là số chính phương nên suy ra $2022(m+n)+1$ là số chính phương (đpcm).

Bài 39. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Phú Yên năm học 2022 – 2023)

Tính giá trị biểu thức $Q=x+y+z$.

Ta có: $63x=(x+y)^4+5z \ge 16x^2y^2+5z$.

Do đó $63x>16x^2y^2 \Rightarrow 63>16xy^2 \Rightarrow xy^2 \le 3 \Rightarrow \begin{cases} x\le 3 \\ y\le 1 \end{cases}$.

Nếu $x=1,\ y=1 \Rightarrow 5z+16=63 \Leftrightarrow z=\dfrac{47}{5}$ (không thỏa mãn).

Nếu $x=2,\ y=1 \Rightarrow 5z+81=126 \Leftrightarrow z=9$ (thỏa mãn).

Nếu $x=3,\ y=1$ thì $5z+256=189 \Rightarrow z<0$.

Vậy $Q=12$.

Bài 40. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Bình năm học 2022 – 2023)

Với $n\in\mathbb{N}$, ta có: $n^5+1 \vdots n^3+1 \Leftrightarrow n^2(n^3+1)-(n^2-1) \vdots n^3+1$

$\Leftrightarrow (n^2-1) \vdots n^3+1 \Leftrightarrow (n-1)(n+1) \vdots (n+1)(n^2-n+1)$

$\Leftrightarrow n-1 \vdots n^2-n+1$ (do $n+1\ne 0$)

$\Rightarrow n(n-1) \vdots n^2-n+1 \Leftrightarrow (n^2-n+1)-1 \vdots n^2-n+1$

$\Leftrightarrow 1 \vdots n^2-n+1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n^2-n+1=1 \\ n^2-n+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=1 \\ n=0 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy $n=0,\ n=1$.

Bài 41. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Nam năm học 2022 – 2023)

a) Ta có: $B=n^4-3n^2+1=(n^2-1)^2-n^2=(n^2+n-1)(n^2-n-1)$.

Với $n=1$, ta có $B=-1$ không phải là số nguyên tố.

Với $n=2$, ta có $B=5$ là số nguyên tố.

Với $n>2$, mỗi thừa số của B đều lớn hơn 1 nên B là hợp số.

Vậy $n=2$ thoả mãn đề.

b) Ta có: $x^3+x^2=y^3+y^2 \Leftrightarrow (x^3-y^3)+(x^2-y^2)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2+x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=a\in\mathbb{R} \\ x^2+xy+y^2+x+y=0\ (*) \end{array}\right.$

$(*) \Leftrightarrow x^2+(y+1)x+y^2+y=0$

$\Delta_x=(y+1)^2-4(y^2+y)=-3y^2-2y+1\ge 0 \Leftrightarrow -1\le y\le \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow y\in\{-1;0\}$

$\left[\begin{array}{l} y=-1 \Rightarrow x=0 \\ y=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right. \end{array}\right.$

Vậy nghiệm nguyên của phương trình $(x;y)=\{(a;a);(-1;0);(0;-1)\}$.

Bài 42. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ngãi năm học 2022 – 2023)

a) Ta có: $n^4+2n^3-n^2-2n=(n^3-n)(n+2)=(n-1)n(n+1)(n+2)$

Ta thấy $(n-1)n(n+1)(n+2)$ là tích 4 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 8.

Đồng thời, trong 4 số liên tiếp có 1 số chia hết cho 3 nên tích chia hết cho 3.
Mà $(3,8)=1$ nên tích trên luôn chia hết cho 24 (đpcm).

b) Gọi hai số chẵn liên tiếp lần lượt là $2k$ và $2k+2$ với $k\in\mathbb{Z}^+$.
Theo đề bài ta có phương trình: $25n^2+10n+48=2k(2k+2)\Rightarrow 5n(5n+2)+48=4k(k+1)$.

Vì $k(k+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên

$k(k+1)\vdots 2\Rightarrow 4k(k+1)\vdots 8\Rightarrow 5n(5n+2)+48\vdots 8$.

Mà $48\vdots 8$ nên ta có $5n(5n+2)\vdots 8$, mà $5n$ và $5n+2$ cách nhau 2 đơn vị nên cùng chẵn hoặc cùng lẻ.
Do đó để chia hết cho 8 thì chỉ có thể là cùng chẵn. Do đó $5n$ chẵn hay n chẵn.
Đặt $n=2m\left(m\in\mathbb{Z}^+\right)$. Từ đó ta có

$10m(10m+2)+48=4k(k+1)\Leftrightarrow 5m(5m+1)+12=k(k+1)$

$\Leftrightarrow 25m^2+5m+12=k^2+k\Leftrightarrow(5m-k)(5m+k)+(5m-k)+12=0$

$\Leftrightarrow(5m-k)(5m+k+1)=-12.$

Vì $5m-k<5m+k+1$ nên ta có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\begin{cases}5m-k=-4\\5m+k+1=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{1}{5}\\k=3\end{cases}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $\begin{cases}5m-k=-2\\5m+k+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=-\dfrac{3}{10}\\k=\dfrac{7}{2}\end{cases}$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $\begin{cases}5m-k=-1\\5m+k+1=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=1\\k=6\end{cases}$ (thỏa mãn).

Do đó $n=2m=2.1=2$.

Vậy $n=2$.

Bài 43. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Ninh năm học 2022 – 2023)

a) Giả sử $25x+1=n(n+1);\ (n\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow n+n-1=25x\Leftrightarrow(n-2)(n+3)+5=25x$.

Xét vế phải là $25x\vdots 25$ với mọi x nguyên. $\quad(1)$

Xét vế trái:

Trường hợp 1: $(n-2)\vdots 5$ thì $n+3=(n-2)+5$ cũng chia hết cho 5 nên

$(n-2)(n+3)\vdots 25$

$\Rightarrow$ vế trái $=(n-2)(n+3)+5$ không chia hết cho 25.

Trường hợp 2: $n-2$ không chia hết cho 5 thì $n+3=(n-2)+5$ cũng không chia hết cho 5.
Do đó $(n-2)(n+3)$ không chia hết cho $5 \Rightarrow (n-2)(n+3)+5$ không chia hết cho 5 hay vế trái không chia hết cho 25.
Cả hai trường hợp đều mâu thuẫn với (1).
Vậy $25x+1$ không viết được dưới dạng tích hai số nguyên liên tiếp.

b) Với mọi x, ta có: $3x^2+2x+1=2x^2+(x+1)^2>0, 2x^2+1>0 \Rightarrow \dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}>0.$ (1)

Với mọi x, ta có: $2x \le x^2+1 \Rightarrow \dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1} \le \dfrac{4x^2+2}{2x^2+1}=2.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\left\{\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}\right\}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}=\dfrac{1}{2}$ hoặc $\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}=\dfrac{3}{2}$.

Giải $\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Giải $\dfrac{3x^2+2x+1}{2x^2+1}=\dfrac{3}{2} \Rightarrow x=\dfrac{1}{4}$.

Vậy các số phải tìm là $x=-\dfrac{1}{2}; x=\dfrac{1}{4}$.

Bài 44. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Quảng Trị năm học 2022 – 2023)

a) Từ giả thiết, ta có $p^2=2q^2+1$, suy ra p lẻ.
Khi đó $2q^2=p^2-1=(p-1)(p+1) \vdots 4 \Rightarrow q \vdots 2 \Rightarrow q=2$ (do q nguyên tố)
Suy ra $p=3$.
Vậy $p=3, q=2$.

b) Gọi A, B, C lần lượt là số áo của An, Bình, Chung.
Ta có A, B, C đều là số nguyên tố có 2 chữ số, không lớn hơn 31 và tổng 2 số bất kỳ trong 3 số không vượt quá 31 nên $A, B, C \in \{11;13;17\}$.
Từ giả thiết ta cũng suy ra được $A+C<B+C<A+B \Rightarrow C<A<B$.
Vậy số áo của An là 13, số áo của Bình là 17, số áo của Chung là 11.

Bài 45. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Vĩnh Long năm học 2022 – 2023)

a) Với hai số nguyên dương a, b bất kỳ, ta có $a^{2023}+b^{2023} \vdots (a+b)$.
Áp dụng, ta có:

$2.(1^{2023}+2021^{2023}) \vdots 2022$

$2.(2^{2023}+2020^{2023}) \vdots 2022$

....

$2.(1010^{2023}+1012^{2023}) \vdots 2022.$

Và $2.1011^{2023} \vdots 2022;\ 2022^{2023} \vdots 2022$

$\Rightarrow A=2(1^{2023}+2^{2023}+.....+2022^{2023}) \vdots 2022$.

b) Ta có: $2x^2+5y^2+4x=21 \Leftrightarrow 2(x+1)^2=5(4-y^2)$.

Mà $2(x+1)^2 \ge 0 \Rightarrow 5(4-y^2) \ge 0 \Leftrightarrow y^2 \le 4 \Leftrightarrow y^2 \in \{1;4\}$.

$y^2 = 1 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -4 \end{array}\right.$.

$y^2 = 4 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{6}}{2}$.

Vậy các nghiệm nguyên của phương trình là $(2;1);(2;-1);(-4;1);(-4;-1)$.

Bài 46. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tuyên Quang năm học 2022 – 2023)

a) Ta có $3xy + x - 6y = 4 \Leftrightarrow (x-2)(3y+1) = 2$. (1)

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên $x - 2 \in \mathbb{Z}, 3y + 1 \in \mathbb{Z}$ mà $3y+1$ chia 3 dư 1 nên

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 = 2 \\ 3y + 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 = -1 \\ 3y + 1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \end{array}\right. \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy các cặp số nguyên thỏa mãn là $(4;0),(1;-1)$.

b) Ta có: $P - 2^{2023} = (a^7 - a) + 2(b^7 - b) + 1 = 7t + 1$.

Vì $(a^7 - a) \vdots 7, (b^7 - b) \vdots 7$ và $2^{2023} = 2.(2^3)^{674} = 2.8^{674} \equiv 2 (\bmod 7)$ nên $P \equiv 3 (\bmod 7)$.

Suy ra P không là số chính phương.

Bài 47. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Bình năm học 2022 – 2023)

Đặt $2^x = a \Rightarrow (a+1)(a+2)(a+3)(a+4) - 5^y = 11879$

$\Leftrightarrow [(a+1)(a+4)][(a+2)(a+3)] - 5^y = 11879$

$\Leftrightarrow (a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) - 5 = 11879$

$\Leftrightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 - 5^y = 11880$.

Nếu $y \ge 1 \Rightarrow 5^y \vdots 5 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 \vdots 5 \Rightarrow a^2 + 5a + 5 \vdots 5 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 \vdots 25$.

Như vậy nếu $y \ge 2 \Rightarrow 5^y \vdots 25 \Rightarrow 11880 \vdots 25$ (vô lý)

$$\Rightarrow y < 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 = 11885 (ktm) \\ y = 0 \Rightarrow (a^2 + 5a + 5)^2 = 11881 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Leftrightarrow x = 3 \end{array}\right..$$

Thử lại với $(x;y) = (3;0)$ ta thấy thỏa mãn.

Vậy $(x;y) = (3;0)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn đề bài.

Bài 48. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thái Nguyên năm học 2022 – 2023)

Trường hợp 1: $a \ne 3; b \ne 3; c \ne 3$. Vì a, b, c là các số nguyên tố nên khi đó

$a^4 \equiv 1 (\bmod 3), b^4 \equiv 1 (\bmod 3), c^4 \equiv 1 (\bmod 3) \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \equiv 0 (\bmod 3)$.

Ta có $a^4 + b^4 + c^4 + 54 \equiv 0 (\bmod 3); 11abc \equiv 1 (\bmod 3)$ hoặc $11abc \equiv 2 (\bmod 3)$.

Vậy trường hợp này không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Trong 3 số a, b, c có ít nhất một số bằng 3.

Không mất tính tổng quát, giả sử $a = 3$.

Ta có $3^4+b^4+c^4+54=33bc \Leftrightarrow b^4+c^4+135=33bc.\quad (*)$

Vì $\begin{cases}33bc\equiv 0\pmod 3\\ 135\equiv 0\pmod 3\end{cases} \Rightarrow b^4+c^4\equiv 0\pmod 3.$

Mặt khác b, c là các số nguyên tố nên $b^4\equiv 0\pmod 3$ hoặc $b^4\equiv 1\pmod 3$; $c^4\equiv 0\pmod 3$ hoặc $c^4\equiv 1\pmod 3$.

Vậy từ $b^4+c^4\equiv 0\pmod 3 \Rightarrow \begin{cases}b^4\equiv 0\pmod 3\\ c^4\equiv 0\pmod 3\end{cases}.$

Do b, c là các số nguyên tố nên $b=c=3$.

Thay $b=c=3$ vào $(*)$ ta thấy thỏa mãn

Vậy $a=b=c=3$.

Bài 49. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hóa (Chuyên Toán) năm học 2022 – 2023)

a) Ta có: $x^2-3y^2-2xy+14y-11=0 \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2-2x+2y-4y^2+12y-11=0$

$\Leftrightarrow \left[(x-y)^2-2(x-y)+1\right]-\left[(2y)^2-12y+9\right]=3$

$\Leftrightarrow (x-y-1)^2-(2y-3)^2=3 \Leftrightarrow (x-3y+2)(x+y-4)=3$

Vì $x, y\in\mathbb{Z}$ nên $x-3y+2;\ x+y-4\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-3y+2;\ x+y-4\in\{-1;1;-3;3\}$.

Ta lập bảng:

$x-3y+2$	-1	1	-3	3
$x+y-4$	-3	3	-1	1
x	0	5	1	4
y	1	2	2	1

Vậy các cặp số nguyên dương $(x;y)$ cần tìm là $(0;1),(5;2),(1;2),(4;1)$.

b) Gọi p là số nguyên tố sao cho $2^n+n^2+25=p^3$. $\quad (*)$

Với $n\in\mathbb{N}^*$ thì $2^n+n^2+25>8$, do đó p là một số nguyên tố lẻ

$\Rightarrow 2^n+n^2+25$ là số lẻ, suy ra n phải là số chẵn.

Xét bảng đồng dư của a và a^3 theo mod 9, ta có $a^3\equiv 0;\pm 1\pmod 9$.

Vì n là số nguyên dương chẵn, nên ta xét n theo mod 6.

Có ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: $n=6k+4\ (k\in\mathbb{N}^*)$.

Ta có: $p^3=2^n+n^2+25=2^{6k+4}+(6k+4)^2+25=16.64^k+36k^2+48k+1$

$\Rightarrow p^3\equiv 16+3k+5\pmod 9 \Leftrightarrow p^3\equiv 3(k+1)\pmod 9 \Leftrightarrow p^3\,\vdots\,3 \Leftrightarrow p=3$.

Thay $p=3$ vào $(*)$ ta được: $2^n+n^2+25=3^3 \Leftrightarrow 2^n+n^2=2$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 2: $n = 6k + 2\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

Ta có: $p^3 = 2^n + n^2 + 25 = 2^{6k+2} + \left(6k+2\right)^2 + 25 = 4.64^k + 36k^2 + 24k + 29$.

Suy ra $p^3 = 4 - 3k + 2\left(\bmod 9\right) \Rightarrow p^3 = 3\left(2-k\right)\left(\bmod 9\right) \Leftrightarrow p^3 \vdots 3 \Rightarrow p = 3$.

Thay $p = 3$ vào $(*)$ ta được: $2^n + n^2 + 25 = 3^3 \Leftrightarrow 2^n + n^2 = 2$ (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: $n = 6k\left(k \in \mathbb{N}^*\right)$.

Ta có: $p^3 = 2^n + n^2 + 25 = 2^{6k} + \left(6k\right)^2 + 25 = 64^k + 36k^2 + 25$.

Nếu $k = 1 \Rightarrow p^3 = 2^6 + 36.1 + 25 = 125 \Rightarrow p = 5 \Rightarrow n = 6$ (thỏa mãn).

Nếu $k = 2 \Rightarrow p^3 = 2^{6.2} + 36.2^2 + 25 = 4265 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ (loại).

Nếu $k = 3 \Rightarrow p^3 = 2^{6.3} + 36.3^2 + 25 = 262493 \Rightarrow p \notin \mathbb{Z}$ (không thỏa mãn).

Nếu $k \ge 4$, bằng quy nạp ta chứng minh được $3.4^k > 36k^2$ với mọi số nguyên $k \ge 4$.

Khi đó, ta có $\left(2^{2k}\right)^3 < p^3 = 2^{6k} + 36^k + 25 < \left(2^{2k} + 1\right)^3$.

Mà $\left(2^{2k}\right)^3$ và $\left(2^{2k}+1\right)^3$ là lập phương hai số nguyên liên tiếp.

Suy ra không có số nguyên tố nào thỏa mãn yêu cầu.

Vậy $n = 6$ thỏa mãn đề bài.

Bài 50. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thanh Hóa (Chuyên Tin) năm học 2022 – 2023)

a) Ta có: $x^2 + y^2 - 2\left(x+y\right) = xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - xy = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - \left(2+y\right)x + y^2 - 2y = 0. \ (*)$$

Xem phương trình $(*)$ là phương trình bậc hai ẩn x.

$\Delta = \left(2+y\right)^2 - 4\left(y^2 - 2y\right) = y^2 + 4y + 4 - 4y^2 + 8y = -3y^2 + 12y + 4$.

Để tồn tại cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $x^2 + y^2 - 2\left(x+y\right) = xy$ thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm $\Rightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 12y + 4 \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{6-4\sqrt{3}}{3} \le y \le \dfrac{6+4\sqrt{3}}{3}$.

Mà y nguyên dương nên $y \in \left\{1;2;3;4\right\}$.

Với $y = 1 \Rightarrow x^2 + 1 - 2\left(x+1\right) = x \Leftrightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$ (không thỏa mãn).

Với $y = 2 \Rightarrow x^2 + 4 - 2\left(x+2\right) = 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \ (ktm) \\ x = 4 \ (tm) \end{array}\right.$.

Với $y = 3 \Rightarrow x^2 + 9 - 2\left(x+3\right) = 3x \Leftrightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$ (không thỏa mãn).

Với $y = 4 \Rightarrow x^2 + 16 - 2\left(x+4\right) = 4x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$ (thỏa mãn).

Vậy có 2 cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán $\left(2;4\right);\left(4;4\right)$.

Bài 51. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Thừa Thiên Huế năm học 2022 – 2023)

Ta có: $x^3 - x^2\left(y+1\right) + x\left(7+y\right) - 4 - y = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - x^2 + 7x - 4 - y\left(x^2 - x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 - x + 1\right)\left(x - y\right) + 2\left(x^2 - x + 1\right) = 2\left(x^2 - 4x + 3\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - x + 1\right)\left(x - y + 2\right) = 2\left(x-1\right)\left(x-3\right)$.

Biện luận theo x ta có các bộ số thỏa mãn $(x;y)\in\{(0;-4);(1;3);(3;5)\}$.

Bài 52. (Đề thi vào 10 hệ chuyên tỉnh Tiền Giang năm học 2022 – 2023)

Ta có: $y=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}\Leftrightarrow yx^2-(y+2)x+y+1=0$.

Với $y=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ (không thỏa mãn).

Với $y\neq 0$, phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=(y+2)^2-4y(y+1)\geq 0\Leftrightarrow -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\leq y\leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Vì $y\in\mathbb{Z},\ y\neq 0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\\ x=2\end{array}\right.\\ y=-1\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\\ x=0\end{array}\right.\end{array}\right.$.

Vậy có 4 cặp số cần tìm là $(1;1),(2;1),(-1;-1),(0;-1)$.