

MỤC LỤC

HỆ THỐNG ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I LỚP 9	TRANG	
	Đề	Đáp án
ĐỀ SỐ 1	3	19
ĐỀ SỐ 2	5	26
ĐỀ SỐ 3	7	33
ĐỀ SỐ 4	9	39
ĐỀ SỐ 5	11	47
ĐỀ SỐ 6	13	54
ĐỀ SỐ 7	15	60
ĐỀ SỐ 8	16	66

HỆ THỐNG ĐỀ THI



MathExpress
Sáng mãi niềm tin

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 1

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

1, Thực hiện phép tính

a) $\frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} + 3\sqrt{3}$

b) $(2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} - \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$

2) Định luật Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong Hệ Mặt Trời xác định mối quan hệ giữa chu kỳ quay quanh Mặt Trời của một hành tinh và khoảng cách giữa hành tinh đó với Mặt Trời.

Định luật được cho bởi công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$. Trong đó, d là khoảng cách giữa hành tinh quay xung quanh Mặt Trời và Mặt Trời (đơn vị: triệu dặm, 1 dặm = 1609 mét), t là thời gian hành tinh quay quanh Mặt Trời đúng một vòng (đơn vị: ngày của Trái Đất).



a) Trái Đất quay quanh Mặt Trời trong 365 ngày. Hãy tính khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của đơn vị km).

b) Một năm Sao Hỏa dài bằng 687 ngày trên Trái Đất, nghĩa là Sao Hỏa quay xung quanh Mặt Trời đúng một vòng với thời gian bằng 687 ngày Trái Đất. Hãy tính khoảng cách giữa Sao Hỏa và Mặt Trời (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của đơn vị km).

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$;

b) Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$;

c) Cho $P = A \cdot B$, tìm các số nguyên tố x để $P < 0$.

Bài 3. (2,0 điểm)

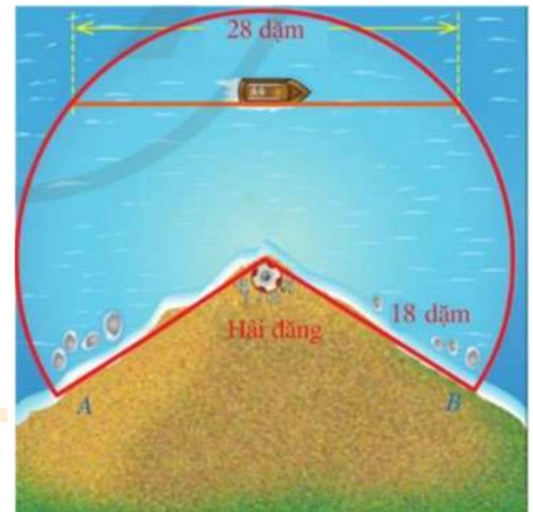
Một đội công nhân A và B làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Khi làm chung được 8 ngày thì đội A được điều động đi làm việc khác, đội B tăng gấp đôi năng suất, do đó đội B đã hoàn thành phần việc còn lại trong 8 ngày tiếp theo. Hỏi với năng suất ban đầu thì mỗi đội làm một mình sẽ hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Bài 4. (3,5 điểm)

1) Hình vẽ bên biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một ngọn hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung $\widehat{AB}$ có số đo 245° .

a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



2) Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB .

a) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

Vì sao?

b) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O') . Chứng minh rằng ba điểm $E; C; K$ thẳng hàng

c) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O')

Bài 5. (0,5 điểm)

Người ta dùng 100 m rào để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh vườn để có thể rào được?

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 2

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

Thực hiện phép tính:

a) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$

b) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{4\sqrt{x}}{16-x}$ với $x \geq 0; x \neq 16$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$;

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$;

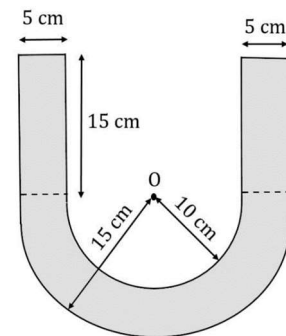
c) Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Bài 3. (2,0 điểm)

Nhằm đáp ứng nhu cầu sử dụng khẩu trang chống dịch bệnh, theo kế hoạch, 2 tổ sản xuất của một nhà máy dự định làm 720 000 chiếc khẩu trang. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ 1 đã sản xuất vượt kế hoạch 15% và tổ 2 vượt kế hoạch 12%, vì vậy họ đã làm được 819 000 chiếc khẩu trang. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ sản xuất bao nhiêu chiếc khẩu trang?

Bài 4. (3,5 điểm)

1) Hình bên mô tả mặt cắt của một chi tiết máy ép nhựa có dạng ở giữa là nửa hình vành khuyên giới hạn bởi hai nửa đường tròn $(O; 15\text{cm})$, $(O; 10\text{cm})$ và hai đầu là hai hình chữ nhật có chiều dài 15 cm, chiều rộng 5 cm. Tính diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimet vuông).



- 2) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến tại A của (O) lấy điểm C . Gọi E là giao điểm của CB với (O) . Từ O kẻ đường thẳng song song với AE , cắt BC tại M .
- a) Chứng minh bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.
- b) Tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt OM tại D và cắt AC tại H ; BH cắt AD tại I . Chứng minh DB là tiếp tuyến của (O)
- c) Chứng minh EI vuông góc với AB .

Bài 5. (0,5 điểm)

Bác An xây một bể nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $18m^3$ đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng cho mỗi mét vuông. Tính chi phí thấp nhất để bác An xây bể.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 3

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính:

a) $A = 2\sqrt{500} + 3\sqrt{125} - 4\sqrt{80}$

b) $B = (3 - \sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{\frac{4}{9}}$

2) Tốc độ của một chiếc canô và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v = 5\sqrt{l}$. Trong đó, l là độ dài đường nước sau đuôi canô (mét), v là tốc độ của canô (m/giây).



a) Một canô đi từ huyện Năm Căn về huyện Đất Mũi (Cà Mau) để lại đường sóng nước sau đuôi dài $7 + 4\sqrt{3}$ m. Tính tốc độ của canô (*Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai*).

b) Khi canô chạy với tốc độ 54km/giờ thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài bao nhiêu mét?

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn B .

b) Cho biểu thức $P = B : A$. Tìm giá trị của x để $P < 0$.

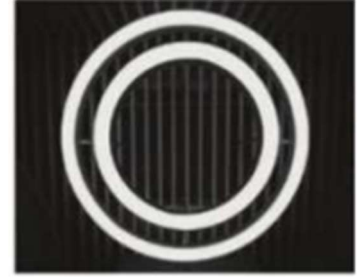
c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{P}$ với $x > 1$.

Bài 3. (2,0 điểm)

Chị Hoa chia số tiền 400 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 27 triệu đồng. Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6%/năm và khoản đầu tư thứ hai là 8%/năm. Tính số tiền chị Hoa đầu tư cho mỗi khoản.

Bài 4. (3,5 điểm)

1) Hình vẽ bên mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15cm , 18cm , 21cm , 24cm . Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.



2) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H . Lấy I là trung điểm của BC . Gọi K là điểm đối xứng của H qua I .

a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C . Chứng minh: $OI \parallel AH$

c) Chứng minh rằng: $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho một tấm nhôm hình tam giác đều có cạnh bằng 20 (cm) . Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài đoạn MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

HẾT

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 4

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2 điểm)

1) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{12} + 2\sqrt[3]{27} + 3\sqrt{75} - 6$

b) $B = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}+1} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

2) Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (mét) và thời gian chuyển động x (giây) được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Người ta thả một vật nặng từ độ cao $55m$ trên tháp nghiêng Pi – da xuống đất (sức cản của không khí không đáng kể)



a) Hãy cho biết sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Khi vật nặng còn cách đất $25m$ thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

Bài 2 (2 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$;

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$;

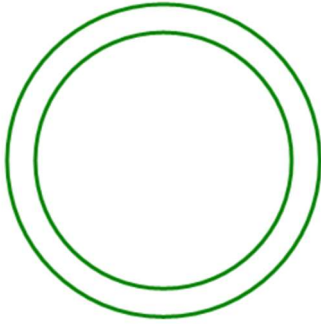
c) Với $P = A : B$. Tìm giá trị của x để $P + 2 = 3\sqrt{P}$.

Bài 3 (2 điểm)

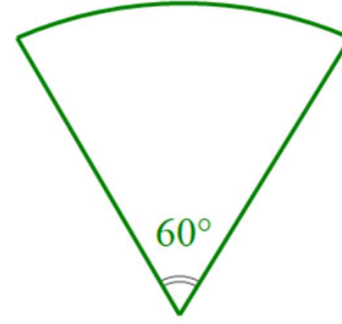
Một mảnh vườn hình chữ nhật của gia đình anh Bình có chu vi bằng $54m$ và chiều dài lớn hơn chiều rộng $3m$. Anh Bình dự định trồng hoa trên mảnh vườn đó với các chi phí cần cho $1 m^2$ để trồng hoa là $50\,000$ đồng. Hỏi anh Bình sẽ phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên mảnh vườn đó?

Bài 4 (3,5 điểm)

1) Trong cuộc thi thiết kế logo cho trường học, bạn An thiết kế một logo có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 4cm và 5cm như hình 1. Bạn Bình thiết kế một logo có dạng hình quạt tròn với bán kính 3cm và góc ở tâm là 60° như hình 2. Tính diện tích của mỗi logo đó (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 1



Hình 2

2) Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A sao cho $OA = 2R$, vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn $(O; R)$, B và C là các tiếp điểm. Vẽ đường kính BOD .

a) Chứng minh 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường trung trực của BD cắt AC và CD lần lượt tại S và E . Chứng minh rằng tứ giác $OCEA$ là hình thang cân.

c) Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng OA và đường tròn $(O; R)$. K là giao điểm của tia SI và AB . Tính theo R diện tích của tứ giác $AKOS$.

Bài 5 (0,5 điểm)

Chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, ...) được cho bởi $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 000 đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 5

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2 điểm)

1) Thực hiện phép tính:

a) $3\sqrt{80} - 3\sqrt{125} + 10\sqrt{5} + 7\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$

b) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$

2) Công thức $h = 0,4\sqrt[3]{x}$ biểu diễn mối tương quan giữa cân nặng x (tính bằng ki-lô-gam) và chiều cao h (tính bằng mét) của một con hươu cao cổ.



a) Một con hươu cao cổ cân nặng 180kg thì cao bao nhiêu mét?

b) Một con hươu cao cổ có chiều cao 2,56m thì cân nặng bao nhiêu kg?

(Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Bài 2 (2 điểm)

Cho hai biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x=9$;

b) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$;

c) Cho $A = P.Q$. Tìm x để $|A| = -A$.

Bài 3 (2 điểm)

Trong một thí nghiệm, Nam muốn pha chế được 50ml dung dịch muối $CuSO_4$ nồng độ 10%.

Trong phòng thí nghiệm chỉ có sẵn dung dịch $CuSO_4$ nồng độ 5% và dung dịch $CuSO_4$ nồng độ 30%. Hỏi Nam cần sử dụng bao nhiêu mililit dung dịch mỗi loại có sẵn để pha được dung dịch mong muốn?

Bài 4 (3,5 điểm)

1) Để làm một chiếc quạt giấy, người thợ làm quạt thường sử dụng 18 thanh tre làm cốt và khâu cố định 1 đầu. Mỗi thanh tre dài 35cm . Để dán mỗi chiếc quạt cả mặt trước và mặt sau, cần hai phần giấy bằng nhau (như hình bên dưới). Phần không được dán giấy của mỗi thanh tre là 10cm . Khi mở rộng nhất, hai thanh ngoài cùng của chiếc quạt tạo với nhau một góc 150° . Tính diện tích giấy tối thiểu cần để dán một chiếc quạt? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



2) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M ở ngoài đường tròn sao cho $OM = \frac{8}{5}R$. Kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O; R)$ (A, B là các tiếp điểm), đường thẳng AB cắt OM tại K .

a) Tính MA, AB theo R .

b) Kẻ đường kính AN của đường tròn $(O; R)$. Kẻ BH vuông góc với AN tại H . Chứng minh $MB \cdot BN = BH \cdot MO$.

c) Đường thẳng MO cắt đường tròn $(O; R)$ tại C và D (C nằm giữa O và M). Gọi E là điểm đối xứng của C qua K . Chứng minh E là trực tâm của tam giác ABD .

Bài 5 (0,5 điểm)

Trong mùa cao điểm du lịch, một tổ hợp nhà nghỉ ở Đà Nẵng gồm 100 phòng đồng giá luôn luôn kín phòng khi giá thuê là 480 nghìn đồng/ phòng. Qua khảo sát các năm trước bộ phận kinh doanh của nhà nghỉ thấy rằng: cứ tăng giá phòng lên $x\%$ ($x \geq 0$) so với lúc kín phòng (giá thuê 480 nghìn đồng/ phòng) thì số phòng cho thuê giảm đi $\frac{4x}{5}\%$. Hỏi nhà nghỉ phải niêm yết giá phòng là bao nhiêu để đạt doanh thu cao nhất?

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 6

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2 điểm)

1) Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{36} - \sqrt[3]{8} + \sqrt{49}$

b) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

2) Thời gian t (tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy Bungee trên cao cách mặt nước d

(tính bằng mét) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức: $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$.



a) Tìm thời gian một người nhảy Bungee từ vị trí cao cách mặt nước $108m$ đến khi chạm mặt nước?

b) Nếu một người nhảy Bungee từ một vị trí khác đến khi chạm mặt nước là 7 giây. Hãy tìm độ cao của người nhảy Bungee so với mặt nước? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 2 (2 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{-6}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{4}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-\sqrt{x}}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$;

b) Rút gọn biểu thức B và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B ;

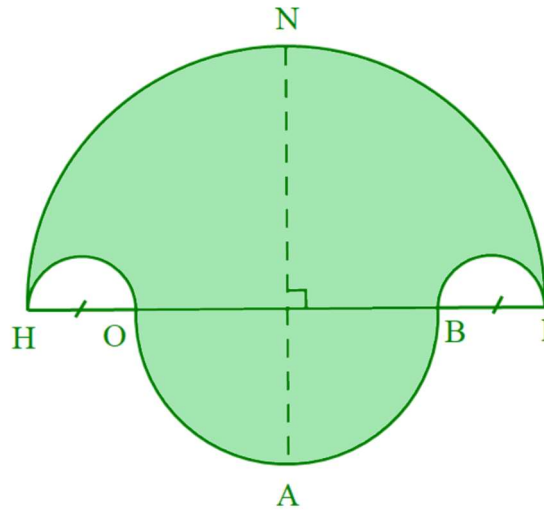
c) Đặt $P = A:B$. So sánh P với $|P|$.

Bài 3 (2 điểm)

Trái bóng Telstar xuất hiện lần đầu tiên ở World Cup 1970 ở Mexico do Adidas sản xuất có diện tích bề mặt trái bóng khoảng 1562 cm^2 . Trái bóng được may từ 32 múi da đen và trắng. Các múi da màu đen hình ngũ giác đều, các múi da màu trắng hình lục giác đều. Trên bề mặt trái bóng, mỗi múi da màu đen có diện tích 37 cm^2 và mỗi múi da màu trắng có diện tích $55,9 \text{ cm}^2$. Hãy tính trên trái bóng có bao nhiêu múi da màu đen và màu trắng.

Bài 4 (3,5 điểm)

1) Cho hình vẽ là các cung tròn của các đường tròn có bán kính khác nhau được xếp nối tiếp nhau. Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ biết $HI = 10\text{ cm}$; $HO = BI = 2\text{ cm}$



2) Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy hai điểm A, B thuộc đường tròn (O) sao cho $AB < 2R$. Vẽ các đường thẳng đi qua A vuông góc với OA và đi qua B vuông góc với OB , hai đường thẳng đó cắt nhau tại M .

a) Chứng minh 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn và chỉ rõ tâm, bán kính của đường tròn này.

b) Qua M vẽ đường thẳng d nằm trong góc OMB cắt đường tròn tại hai điểm C và D ($MC < MD$). H là trung điểm của CD , đường thẳng OH cắt đường thẳng MA tại K . Chứng minh $KA \cdot KM = KO \cdot KH$ và $AH < OM$.

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt hai đường thẳng MA, MB lần lượt tại E và F . Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MEF là nhỏ nhất.

Bài 5 (0,5 điểm)

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3x + 3y - 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} + \frac{27}{\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt{y}}$$

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 7

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (2 điểm) Thực hiện phép tính

$$\text{a) } 4\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{45} + \sqrt{27} - \frac{2}{3}\sqrt{5} \quad \text{b) } \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - (2+\sqrt{3}) \quad \text{c) } \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2}$$

Bài 2: (2 điểm)

$$\text{Cho } M = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left[\frac{25-x}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right] \text{ với } x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25$$

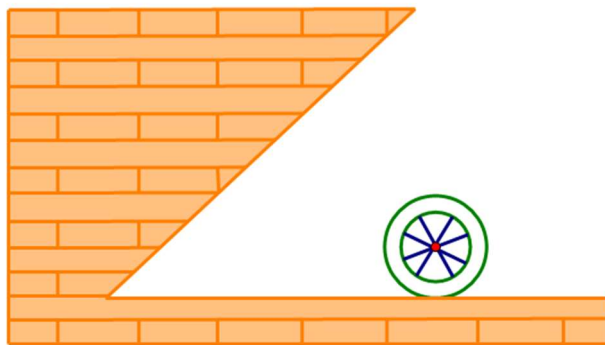
- Rút gọn biểu thức M
- Tính giá trị của M khi $x=16$
- Tìm x nguyên để M nhận giá trị là số nguyên.

Bài 3: (2 điểm)

Ngày chủ nhật hai bạn Tâm và Hiếu được bố mẹ chở đi siêu thị để mua sắm. Khi đến quầy thức ăn Tâm mua 6 chiếc bánh và 3 ly nước, Hiếu mua 5 chiếc bánh và 3 ly nước. Tổng số tiền ăn uống của cả hai bạn là 252 nghìn đồng. Biết giá tiền của một ly nước cao hơn giá tiền của một chiếc bánh là 8 nghìn đồng. Hỏi giá tiền của một cái bánh và một ly nước là bao nhiêu?

Bài 4: (3,5 điểm)

- Một bánh xe có dạng hình tròn bán kính 20cm lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc 60° . Hãy tính khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường.



- Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định ngoài (O) , kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là tiếp điểm).
 - Chứng minh rằng bốn điểm M, A, O, B thuộc một đường tròn.
 - Kẻ đường kính BD của (O) . Chứng minh OM vuông góc AB và MO song song với AD .
 - Trên cung nhỏ AB lấy điểm E (E khác A và B), từ E kẻ tiếp tuyến với (O) cắt MA, MB lần lượt tại I và K . Chứng minh chu vi tam giác MIK không phụ thuộc vào vị trí điểm E .

Bài 5: (0,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $a + b + c = 1$

Tìm giá trị nhỏ nhất: $M = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 8

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (2 điểm) Thực hiện phép tính

a) $\left(\sqrt{75} - \frac{3}{2} : \sqrt{3} - \sqrt{48}\right) \cdot \sqrt{\frac{16}{3}}$ b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Bài 2: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{x-4}{x-2\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0; x \neq 4$

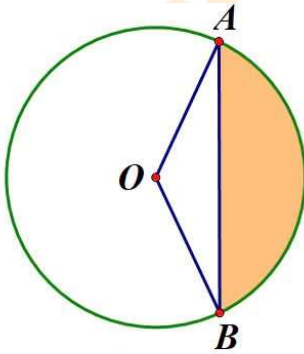
- a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$;
b) Rút gọn biểu thức;
c) Đặt $P = A.B$. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $P < 1$.

Bài 3: (2 điểm)

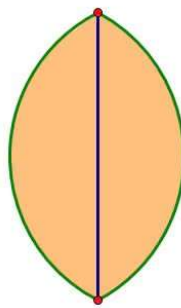
Tại một cửa hàng điện máy tủ lạnh được giảm giá 22% và tivi được giảm giá 25%. Tổng giá niêm yết của hai mặt hàng này là 52 triệu đồng, giá sau khi giảm của hai mặt hàng là 39,81 triệu đồng. Tìm giá niêm yết của tủ lạnh, tivi.

Bài 4: (3,5 điểm)

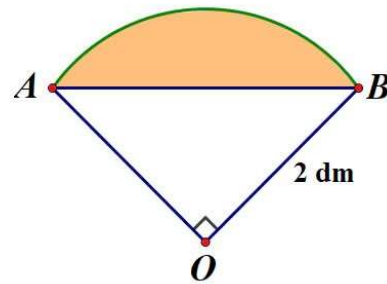
1) Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung (tương ứng) của đường tròn (minh họa bởi phần tô đậm ở hình a). Người ta làm một họa tiết trang trí bằng cách ghép hai hình viên phân bằng nhau (hình b), mỗi hình viên phân đó có góc ở tâm tương ứng là 90° và bán kính đường tròn tương ứng là 2 dm (hình c). Tính diện tích của họa tiết trang trí đó (lấy $\pi \approx 3,14$)



Hình a



Hình b



Hình c

2) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , M là trung điểm của AC . Lấy E là hình chiếu của A trên BM .

- a) Chứng minh A, E, H, B cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh $BE.BM = BH.BC$.
c) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với BC , cắt tia AE tại K .
Chứng minh $HM^2 = ME.MB$ và tính số đo góc MHK .

Bài 5: (0,5 điểm)

Cho ba số thực dương x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{2x}{2x+y} + \frac{2y}{2y+z} + \frac{2z}{2z+x}$$

----- HẾT -----



MathExpress
Sáng mãi niềm tin

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT



ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 1

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính

$$a) \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} + 3\sqrt{3}$$

$$b) (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} - \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} a) & \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{3\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+1} + 3\sqrt{3} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}-1} - \frac{3(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}+1)} + 3\sqrt{3} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} - 3 + 3\sqrt{3} \\ &= \frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} - 3 + 3\sqrt{3} \\ &= \sqrt{3}+1-3+3\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3}-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & (2+\sqrt{7})\sqrt{11-4\sqrt{7}} - \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2} \\ &= (2+\sqrt{7})\sqrt{7-4\sqrt{7}+4} - |\sqrt{5}+3| \\ &= (2+\sqrt{7})\sqrt{(\sqrt{7}-2)^2} - (\sqrt{5}+3) \\ &= (2+\sqrt{7})|\sqrt{7}-2| - \sqrt{5}-3 \\ &= (2+\sqrt{7})(\sqrt{7}-2) - \sqrt{5}-3 \\ &= 7-4-\sqrt{5}-3 \\ &= -\sqrt{5} \end{aligned}$$

2) Định luật Kepler về sự chuyển động của các hành tinh trong Hệ mặt trời xác định mối quan hệ giữa chu kỳ quay quanh Mặt Trời của một hành tinh và khoảng cách giữa hành tinh đó với Mặt Trời.

Định luật được cho bởi công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$. Trong đó, d là khoảng cách giữa hành tinh quay xung quanh Mặt Trời và Mặt Trời (đơn vị: triệu dặm, 1 dặm = 1609 mét), t là thời gian hành tinh quay quanh Mặt Trời đúng một vòng (đơn vị: ngày của Trái Đất).



a) Trái Đất quay quanh Mặt Trời trong 365 ngày. Hãy tính khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của đơn vị km).

b) Một năm Sao Hỏa dài bằng 687 ngày trên Trái Đất, nghĩa là Sao Hỏa quay xung quanh Mặt Trời đúng một vòng với thời gian bằng 687 ngày Trái Đất. Hãy tính khoảng cách giữa Sao Hỏa và Mặt Trời (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của đơn vị km).

Lời giải

a) Thay $t = 365$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta được:

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} \approx 92,8 \text{ (triệu dặm)} \approx 149,3 \text{ (triệu km)}$$

Vậy khoảng cách giữa Trái Đất và Mặt Trời khoảng 149,3 triệu km

b) Thay $t = 687$ vào công thức $d = \sqrt[3]{6t^2}$, ta được:

$$d = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} \approx 141,478 \text{ (triệu dặm)} \approx 227,6 \text{ (triệu km)}$$

Vậy khoảng cách giữa Sao Hỏa và Mặt Trời khoảng 227,6 triệu km

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$;

b) Chứng minh $B = \frac{3}{\sqrt{x}+3}$;

c) Cho $P = A \cdot B$, tìm các số nguyên tố x để $P < 0$.

Lời giải

a) Thay $x = 25$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta được: $A = \frac{\sqrt{25}+3}{\sqrt{25}-2} = \frac{5+3}{5-2} = \frac{8}{3}$

Vậy với $x = 25$ thì $A = \frac{8}{3}$.

b) Với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} - \frac{x+9}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} - \frac{x+9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x+3\sqrt{x}-x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{3}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 4$ ta có điều phải chứng minh.

c) Ta có : $P = A.B = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{3}{\sqrt{x}+3} = \frac{3}{\sqrt{x}-2}$

Để $P = \frac{3}{\sqrt{x}-2} < 0$ thì $\sqrt{x}-2 < 0$ (vì $3 > 0$)

Suy ra $x < 4$. Kết hợp với điều kiện xác định ta có: $0 \leq x < 4$

Mà x là số nguyên tố. Suy ra $x \in \{2; 3\}$

Vậy để $P < 0$ thì $x \in \{2; 3\}$.

Bài 3. (2,0 điểm)

Một đội công nhân A và B làm chung một công việc và dự định hoàn thành trong 12 ngày. Khi làm chung được 8 ngày thì đội A được điều động đi làm việc khác, đội B tăng gấp đôi năng suất, do đó đội B đã hoàn thành phần việc còn lại trong 8 ngày tiếp theo. Hỏi với năng suất ban đầu thì mỗi đội làm một mình sẽ hoàn thành công việc đó trong bao lâu?

Lời giải

Gọi thời gian một mình hoàn thành công việc của đội A và B lần lượt là x, y ($x, y \in \mathbb{N}^*$, đơn vị: ngày)

Mỗi ngày đội A làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc)

Mỗi ngày đội B làm được: $\frac{1}{y}$ (công việc)

Vì hai đội làm chung và dự định hoàn thành công việc trong 12 ngày nên ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Khi làm chung được 8 ngày thì 2 đội làm được: $8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$ (công việc)

8 ngày tiếp theo đội B làm được: $\frac{8}{y}$ (công việc)

Vì khi làm chung được 8 ngày thì đội A được điều động đi làm việc khác, đội B tiếp tục làm phần việc còn lại. Kể từ khi làm một mình, do cải tiến cách làm nên năng suất của đội B tăng gấp đôi, do đó đội B đã hoàn thành phần việc còn lại trong 8 ngày tiếp theo nên ta có phương trình:

$$8 \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) + 8 \cdot \frac{2}{y} = 1 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{8} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Suy ra:
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{2}{y} = \frac{1}{8} - \frac{1}{12} = \frac{1}{24} \end{cases} \quad \text{Do đó: } \begin{cases} x = 16 \\ y = 48 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

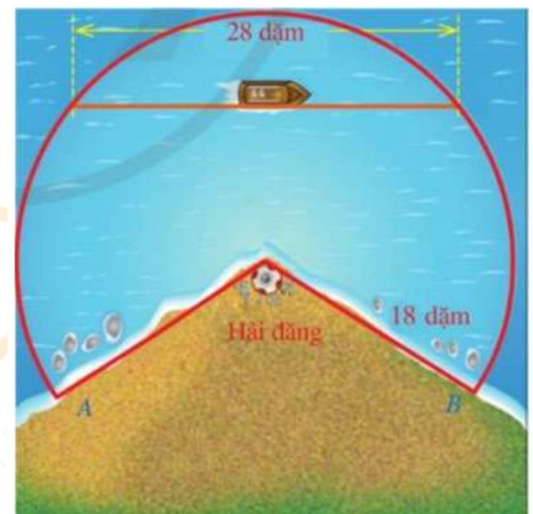
Vậy thời gian một mình hoàn thành công việc của đội A và B lần lượt là 16 ngày và 48 ngày.

Bài 4. (3,5 điểm)

1) Hình vẽ bên biểu diễn vùng biển được chiếu sáng bởi một ngọn hải đăng có dạng một hình quạt tròn với bán kính 18 dặm, cung $\widehat{AB}$ có số đo 245° .

a) Hãy tính diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ hải đăng theo đơn vị kilômét vuông (lấy 1 dặm = 1609 m và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

b) Giả sử một con thuyền di chuyển dọc theo dây cung có độ dài 28 dặm của đường tròn với tâm là tâm của hình quạt tròn, bán kính là 18 dặm. Tính khoảng cách nhỏ nhất từ con thuyền đến hải đăng (theo đơn vị dặm và làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



2) Cho đường tròn (O) đường kính AB , điểm C nằm giữa A và O . Vẽ đường tròn (O') có đường kính CB .

a) Kẻ dây DE của (O) vuông góc với AC tại trung điểm H của AC . Tứ giác $ADCE$ là hình gì?

Vì sao?

b) Gọi K là giao điểm của DB và đường tròn (O') . Chứng minh rằng ba điểm E ; C ; K thẳng hàng

c) Chứng minh HK là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Lời giải

1)

a) Đổi 18 dặm = 28,962 km

Diện tích vùng biển có thể nhìn thấy ánh sáng từ ngọn hải đăng là:

$$S = \frac{\pi \cdot 28,962^2 \cdot 245}{360} \approx 1793 \text{ (km}^2\text{)}$$

Hay $AD \perp DB$ mà $AD \parallel EC$ (Vì tứ giác $ADCE$ là hình thoi)

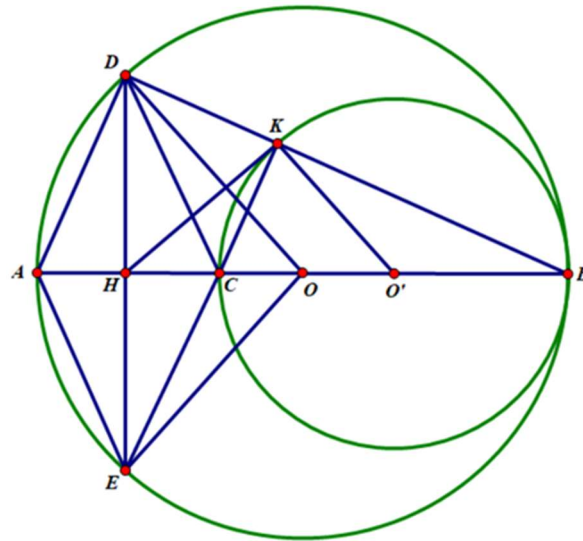
Do đó $EC \perp DB$ (quan hệ từ song song đến vuông góc) (1)

Xét đường tròn (O') đường kính CB có $K \in (O')$

Nên suy ra $\widehat{CKB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn của (O'))

Hay $CK \perp DB$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $E; C; K$ thẳng hàng



c) Xét tam giác DKE vuông tại K có KH là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên:

$$HK = HE = \frac{1}{2}DE$$

Suy ra $\triangle HKE$ cân tại H do đó: $\widehat{HKE} = \widehat{HEK}$

Lại có $O'C = O'K$ (bán kính của (O')) nên tam giác $O'CK$ cân tại O'

Suy ra $\widehat{O'KC} = \widehat{O'CK}$ mà $\widehat{O'CK} = \widehat{HCE}$ (hai góc đối đỉnh)

Do đó $\widehat{O'KC} = \widehat{HCE}$

Mà: $\widehat{HEK} + \widehat{HCE} = 90^\circ$ (hai góc phụ nhau)

Nên $\widehat{HKE} + \widehat{O'KC} = 90^\circ$

Suy ra: $\widehat{HKO'} = 90^\circ$

Do đó $HK \perp KO'$

Vậy HK là tiếp tuyến của đường tròn (O') .

Bài 5. (0,5 điểm)

Người ta dùng 100 m rào để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để thả gia súc. Biết một cạnh của hình chữ nhật là bức tường (không phải rào). Tính diện tích lớn nhất của mảnh vườn để có thể rào được?

Lời giải

Đặt cạnh của hình chữ nhật lần lượt là x, y ($x, y > 0$; y là cạnh của bức tường)

Ta có: $2x + y = 100$ (1)

Diện tích hình chữ nhật là: $S = xy = 2x \cdot \frac{y}{2}$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$

Ta có: $(a-b)^2 \geq 0$ với mọi a, b

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a+b)^2 \geq 4ab$$

Suy ra: $\frac{(a+b)^2}{4} \geq ab$ (điều phải chứng minh).

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh với hai số thực không âm $a = x$; $b = \frac{y}{2}$ ta có:

$$\frac{\left(x + \frac{y}{2}\right)^2}{4} \geq x \cdot \frac{y}{2}$$

Do đó diện tích lớn nhất của S là $1250 m^2$ khi $x = \frac{y}{2}$ suy ra: $y = 2x$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $x = 25$; $y = 50$.

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn là $1250 m^2$ khi chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn lần lượt là $50 m$; $25 m$.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 2

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

Thực hiện phép tính :

$$a) \frac{\sqrt{12}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}+2}$$

$$b) \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$$

Lời giải

$$a) \frac{\sqrt{12}-\sqrt{4}}{\sqrt{3}-1} + \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{\sqrt{4}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} + \frac{5-4}{\sqrt{5}+2} = \sqrt{4} + \frac{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)}{\sqrt{5}+2} = 2 + \sqrt{5} - 2 = \sqrt{5}$$

$$b) \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{20} + |\sqrt{5}-2| = \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 = -2$$

Bài 2. (2 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{4\sqrt{x}}{16-x}$ với $x \geq 0; x \neq 16$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$;

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$;

c) Tìm x để biểu thức $Q = A \cdot B$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a) Thay $x = 4$ (thoả mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta được :

$$A = \frac{\sqrt{4}-5}{\sqrt{4}+2} = \frac{2-5}{2+2} = \frac{-3}{4}$$

Vậy với $x = 4$ thì $A = \frac{-3}{4}$

b) Với $x \geq 0; x \neq 16$ ta có:

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+4} - \frac{2}{\sqrt{x}-4} - \frac{4\sqrt{x}}{16-x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-4)} - \frac{2(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} + \frac{4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-4) - 2(\sqrt{x}+4) + 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{x - 4\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 8 + 4\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{x - 2\sqrt{x} - 8}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}
 \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 16$ thì $B = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4}$

c) Ta có: $Q = A.B = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+4} = \frac{\sqrt{x}+4-9}{\sqrt{x}+4} = 1 - \frac{9}{\sqrt{x}+4}$

Do $x \geq 0$ nên $\sqrt{x} \geq 0$, suy ra $\sqrt{x}+4 \geq 4$ hay $0 < \frac{1}{\sqrt{x}+4} \leq \frac{1}{4}$

$$\frac{-9}{4} \leq \frac{-9}{\sqrt{x}+4} < 0$$

$$\frac{-5}{4} \leq 1 - \frac{9}{\sqrt{x}+4} < 1$$

Mà Q nguyên nên $Q = -1$ hoặc $Q = 0$

Với $Q = -1$ ta có: $1 - \frac{9}{\sqrt{x}+4} = -1$ suy ra: $\frac{9}{\sqrt{x}+4} = 2$

$$2\sqrt{x} + 8 = 9$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{4} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Với $Q = 0$ ta có: $1 - \frac{9}{\sqrt{x}+4} = 0$ suy ra: $\frac{9}{\sqrt{x}+4} = 1$

$$\sqrt{x} + 4 = 9$$

$$\sqrt{x} = 5$$

$$x = 25 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy để Q nhận giá trị nguyên thì $x \in \left\{ \frac{1}{4}; 25 \right\}$

Bài 3. (2,0 điểm)

Nhằm đáp ứng nhu cầu sử dụng khẩu trang chống dịch bệnh, theo kế hoạch, 2 tổ sản xuất của một nhà máy dự định làm 720 000 chiếc khẩu trang. Do áp dụng kĩ thuật mới nên tổ 1 đã sản xuất vượt kế hoạch 15% và tổ 2 vượt kế hoạch 12%, vì vậy họ đã làm được 819 000 chiếc khẩu trang. Hỏi theo kế hoạch mỗi tổ sản xuất bao nhiêu chiếc khẩu trang?

Lời giải

Gọi số khẩu trang tổ 1 sản xuất theo kế hoạch là x (khẩu trang) ($x \in \mathbb{N}^*; 0 < x < 720\,000$)

Số khẩu trang tổ 2 sản xuất theo kế hoạch là y (khẩu trang) ($y \in \mathbb{N}^*; 0 < y < 720\,000$)

Theo kế hoạch, 2 tổ sản xuất của một nhà máy dự định làm 720 000 khẩu trang nên ta có phương trình: $x + y = 720\,000$ (1)

Mặt khác tổ 1 đã sản xuất vượt kế hoạch 15% nên trong thực tế tổ 1 đã sản xuất được :

$$x + 15\%x = 1,15x \text{ (khẩu trang)}$$

Tổ 2 đã sản xuất vượt kế hoạch 12% nên trong thực tế tổ 2 đã sản xuất được :

$$y + 12\%y = 1,12y \text{ (khẩu trang)}$$

Do vượt kế hoạch nên 2 tổ đã làm được 819 000 khẩu trang nên ta có phương trình :

$$1,15x + 1,12y = 819\,000 \text{ (2)}$$

Từ phương trình (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 720\,000 & (1) \\ 1,15x + 1,12y = 819\,000 & (2) \end{cases}$

Từ (1) ta có phương trình: $y = 720\,000 - x$

Thế vào phương trình (2), ta được: $1,15x + 1,12(720\,000 - x) = 819\,000$ (3)

Giải phương trình (3): $1,15x + 806\,400 - 1,12x = 819\,000$

$$0,03x + 806\,400 = 819\,000$$

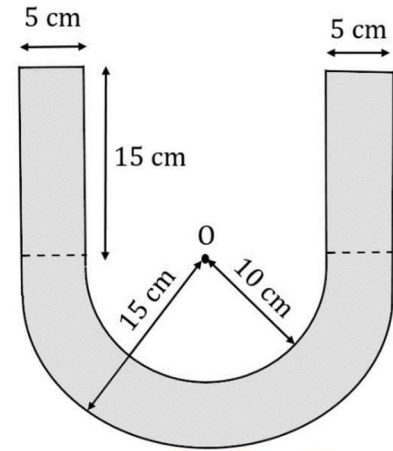
$$x = 420\,000 \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay $x = 420\,000$ vào phương trình $y = 720\,000 - x$, ta có: $y = 300\,000$ (thỏa mãn)

Vậy theo kế hoạch tổ 1 sản xuất được 420 000 khẩu trang và tổ 2 sản xuất được 300 000 khẩu trang.

Bài 4. (3,5 điểm)

1) Hình bên mô tả mặt cắt của một chi tiết máy ép nhựa có dạng ở giữa là nửa hình vành khuyên giới hạn bởi hai nửa đường tròn $(O; 15\text{cm})$, $(O; 10\text{cm})$ và hai đầu là hai hình chữ nhật có chiều dài 15 cm, chiều rộng 5 cm. Tính diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của centimet vuông).

**Lời giải**

1)

Diện tích mặt cắt của hai đầu hình chữ nhật là: $2.5.15 = 150 \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích hình tròn $(O; 15\text{cm})$ là $S_1 = \pi.15^2 = 225\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích hình tròn $(O; 10\text{cm})$ là $S_2 = \pi.10^2 = 100\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Nên diện tích nửa hình vành khuyên giới hạn bởi hai nửa đường tròn là:

$$\frac{S_1 - S_2}{2} = \frac{225\pi - 100\pi}{2} = 62,5\pi \approx 196,35 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Suy ra diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó khoảng:

$$150 + 196,35 = 346,35 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích mặt cắt của chi tiết máy ép nhựa đó khoảng $346,35 \text{ cm}^2$.

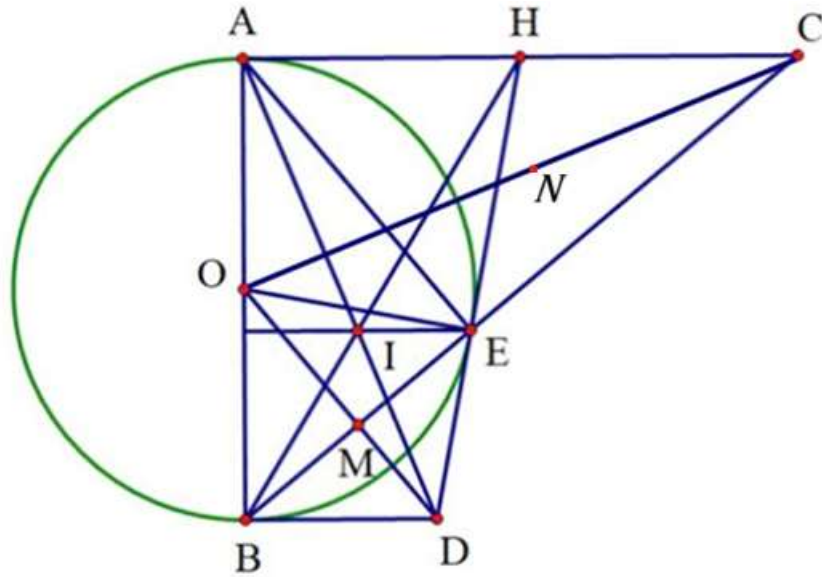
2) Cho đường tròn (O) đường kính AB . Trên tiếp tuyến tại A của (O) lấy điểm C . Gọi E là giao điểm của CB với (O) . Từ O kẻ đường thẳng song song với AE , cắt BC tại M .

a) Chứng minh bốn điểm A, C, O, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Tiếp tuyến tại E của đường tròn (O) cắt OM tại D và cắt AC tại H ; BH cắt AD tại I . Chứng minh DB là tiếp tuyến của (O)

c) Chứng minh EI vuông góc với AB .

Lời giải



a) Có AB là đường kính của (O)

Mà E nằm trên đường tròn (O) nên $\widehat{AEB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn (O))

Suy ra $AE \perp EB$

Mà $OM \parallel AE$ (giả thiết)

Suy ra $OM \perp EB$. Nên $\widehat{OMC} = 90^\circ$

Gọi N là trung điểm của OC . Vì CA là tiếp tuyến của (O) với tiếp điểm A . Suy ra $OA \perp AC$

Tam giác OAC vuông tại A có OC là cạnh huyền.

Suy ra điểm A thuộc đường tròn tâm N , bán kính bằng $\frac{1}{2}OC$ (1)

Tương tự, tam giác OMC vuông tại M (do $\widehat{OMC} = 90^\circ$) có OC là cạnh huyền.

Suy ra điểm M thuộc đường tròn tâm N , bán kính bằng $\frac{1}{2}OC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra bốn điểm $O; A; M; C$ cùng thuộc đường tròn tâm N , bán kính bằng $\frac{1}{2}OC$

(điều phải chứng minh).

b) Vì $OB = OE$ (bán kính đường tròn (O)) nên $\triangle OBE$ cân tại O

Mà OM là đường cao ứng với cạnh BE (do $OM \perp EB$)

Suy ra OM là đường trung trực của đoạn thẳng BE .

Mà $D \in OM$ nên $DE = DB$.

Xét $\triangle ODB$ và $\triangle ODE$ có:

OD chung

$OE = OB$ (bán kính đường tròn (O))

$DE = DB$ (chứng minh trên)

Suy ra $\triangle ODB = \triangle ODE$ (c.c.c)

Nên $\widehat{OBD} = \widehat{OED} = 90^\circ$ (hai góc tương ứng) hay $DB \perp OB$

Vậy DB là tiếp tuyến của (O) (điều phải chứng minh)

c) Ta có HA, HE là hai tiếp tuyến với (O) (giả thiết)

Suy ra $HA = HE$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Ta có: $AH \perp BA$; $AB \perp BD$ suy ra: $AH \parallel BD$ (quan hệ vuông góc tới song song)

Xét $\triangle IDB$ với $AH \parallel BD$ có: $\frac{HI}{IB} = \frac{AH}{BD}$ (hệ quả định lý Thalès)

Mà $HA = HE$ và $DB = DE$ (chứng minh trên)

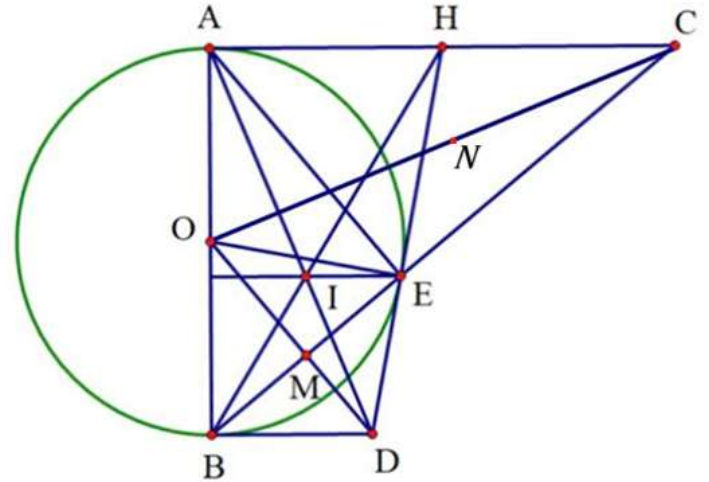
Nên $\frac{HI}{IB} = \frac{HE}{DE}$

Xét $\triangle HBD$ có: $\frac{HI}{IB} = \frac{HE}{DE}$

Suy ra: $EI \parallel BD$ (định lý Thalès đảo)

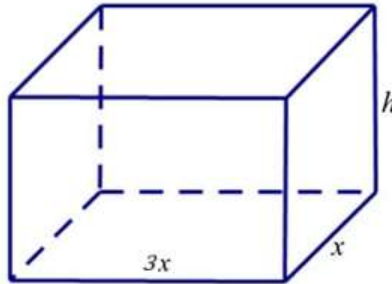
Mà $BD \perp AB$ (do DB là tiếp tuyến của (O))

Vậy $EI \perp AB$ (điều phải chứng minh).



Bài 5. (0,5 điểm)

Bác An xây một bể nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $18m^3$, đáy bể là một hình chữ nhật có chiều dài gấp ba lần chiều rộng. Giá thuê nhân công để xây bể là 500000 đồng cho mỗi mét vuông. Tính chi phí thấp nhất để bác An xây bể.

Lời giải

Gọi chiều rộng của đáy bể nước là x (m), chiều dài của đáy bể nước là $3x$ (m), với $x > 0$

Suy ra chiều cao của bể nước là: $h = \frac{6}{x^2}$ (m)

Tổng diện tích cần xây là: $S = S_{xq} + S_d = 2xh + 2.3.xh + 3x^2 = 8xh + 3x^2$ (m^2)

$$\text{hay } S = \frac{48}{x} + 3x^2 = 3(x^2 - 4x + 4) + 12x + \frac{48}{x} - 12 = 3(x-2)^2 + 12(x + \frac{4}{x}) - 12 \text{ (} m^2 \text{)}$$

Để tính chi phí thấp nhất để xây bể ta cần tìm diện tích cần xây nhỏ nhất.

Với mọi $a, b \geq 0$ ta có: $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ suy ra $a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$ nên $a + b \geq 2\sqrt{ab}$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$

Áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh cho hai số dương x và $\frac{4}{x}$ ta có: $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$

Mà: $(x-2)^2 \geq 0$ với mọi x

Suy ra: $S \geq 36$ (m^2)

Dấu "=" xảy ra khi $x - 2 = 0$ và $x = \frac{4}{x}$ hay $x = 2$ (m)

Khi đó chi phí thấp nhất để xây bể là: $36.500000 = 18000000$ (đồng)

Vậy chi phí thấp nhất để xây bể là 18 triệu đồng.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 3

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Thực hiện phép tính:

a) $A = 2\sqrt{500} + 3\sqrt{125} - 4\sqrt{80}$

b) $B = (3 - \sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{\frac{4}{9}}$

Lời giải

a) $A = 2\sqrt{500} + 3\sqrt{125} - 4\sqrt{80}$

$$A = 2\sqrt{100 \cdot 5} + 3\sqrt{25 \cdot 5} - 4\sqrt{16 \cdot 5}$$

$$A = 20\sqrt{5} + 15\sqrt{5} - 16\sqrt{5}$$

$$A = 19\sqrt{5}$$

b) $B = (3 - \sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{3} - \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} + \sqrt{\frac{4}{9}}$

$$B = \sqrt{2} - \frac{2}{3} - |1 - \sqrt{2}| + \frac{2}{3}$$

$$B = \sqrt{2} - (\sqrt{2} - 1) = 1$$

2) Tốc độ của một chiếc canô và độ dài đường sóng nước để lại sau đuôi của nó được cho bởi công thức $v = 5\sqrt{l}$. Trong đó, l là độ dài đường nước sau đuôi canô (mét), v là tốc độ của canô (m/giây).

a) Một canô đi từ huyện Năm Căn về huyện Đất Mũi (Cà Mau) để lại đường sóng nước sau đuôi dài $7 + 4\sqrt{3}$ m. Tính tốc độ của canô (*Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai*)

b) Khi canô chạy với tốc độ 54km/giờ thì đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài bao nhiêu mét?



Lời giải

a) Thay $l = 7 + 4\sqrt{3}$ vào công thức $v = 5\sqrt{l}$, ta được:

$$v = 5\sqrt{l} = 5\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} \approx 18,66 \text{ (m / s)} \approx 67,18 \text{ (km / h)}$$

Vậy tốc độ của canô khoảng 18,66m/s hay 67,18 km/h.

b) Thay $v = 54 \text{ km/h} = 15\text{m/s}$ vào công thức $v = 5\sqrt{l}$, ta được:

$$5\sqrt{l} = 15 \text{ suy ra } l = 9 \text{ (m)}$$

Vậy đường sóng nước để lại sau đuôi chiếc canô dài 9 m.

Bài 2. (2 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{x+3}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{1-x}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Rút gọn B .

b) Cho biểu thức $P = B : A$. Tìm giá trị của x để $P < 0$.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{P}$ với $x > 1$.

Lời giải

a) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}}{1-x} = \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+1+x-\sqrt{x}-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x-2\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0; x \neq 1$ thì $B = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$

b) Ta có: $P = B : A = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} : \frac{x+3}{\sqrt{x}+1} = \frac{\sqrt{x}-1}{x+3}$

Để $P = \frac{\sqrt{x}-1}{x+3} < 0$ thì $\sqrt{x}-1 < 0$ (vì $x \geq 0$ nên $x+3 \geq 3 > 0$) suy ra $x < 1$

Kết hợp với điều kiện xác định $x \geq 0; x \neq 1$ suy ra $0 \leq x < 1$

c) Với $P = \frac{\sqrt{x}-1}{x+3}$ thì $\frac{1}{P} = \frac{x+3}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1 + \frac{4}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}-1} + 2$

Nhận thấy với mọi $a, b \geq 0$ ta có: $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$ suy ra $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$ nên $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$

Do $x > 1$ nên ta áp dụng bất đẳng thức vừa chứng minh cho hai số dương $(\sqrt{x}-1)$ và $\frac{4}{\sqrt{x}-1}$ có:

$$\sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}-1} \geq 2\sqrt{4} = 4$$

Suy ra $\frac{1}{P} = \sqrt{x}-1 + \frac{4}{\sqrt{x}-1} + 2 \geq 6$. Dấu “=” xảy ra khi $\sqrt{x}-1 = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ hay $x = 9$ (thỏa mãn)

Vậy GTNN của $\frac{1}{P}$ là 6 khi $x = 9$.

Bài 3. (2 điểm)

Chị Hoa chia số tiền 400 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư. Sau một năm, tổng số tiền lãi thu được là 27 triệu đồng. Lãi suất cho khoản đầu tư thứ nhất là 6%/năm và khoản đầu tư thứ hai là 8%/năm. Tính số tiền chị Hoa đầu tư cho mỗi khoản.

Lời giải

1) Gọi số tiền chị Hoa sử dụng cho khoản đầu tư thứ nhất là x (triệu đồng) ($0 < x < 400$)

Số tiền chị Hoa sử dụng cho khoản đầu tư thứ hai là y (triệu đồng) ($0 < y < 400$)

Vì chị Hoa chia số tiền 400 triệu đồng của mình cho hai khoản đầu tư nên ta có phương trình:

$$x + y = 400 \quad (1)$$

Sau 1 năm, số tiền lãi chị Hoa nhận được từ khoản đầu tư thứ nhất là: $6\%x = 0,06x$ (triệu đồng)

Sau 1 năm, số tiền lãi chị Hoa nhận được từ khoản đầu tư thứ hai là: $8\%y = 0,08y$ (triệu đồng)

Vì tổng số tiền lãi chị Hoa thu được sau một năm là 27 triệu đồng nên ta có phương trình:

$$0,06x + 0,08y = 27 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 400 & (1) \\ 0,06x + 0,08y = 27 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (1) ta có: $y = 400 - x$ (3)

Thay $y = 400 - x$ vào phương trình (2) ta được:

$$0,06x + 0,08.(400 - x) = 27$$

$$0,06x + 32 - 0,08x = 27$$

$$-0,02x = -5$$

$$x = 250 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Thay $x = 250$ vào phương trình (3) ta được: $y = 400 - 250 = 150$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy số tiền chị Hoa sử dụng cho khoản đầu tư thứ nhất là 250 triệu đồng, số tiền chị Hoa sử dụng cho khoản đầu tư thứ hai là 150 triệu đồng.

Bài 4. (3,5 điểm)

1) Hình vẽ bên mô tả mặt cắt của chiếc đèn led có dạng hình vành khuyên màu trắng với bán kính các đường tròn lần lượt là 15cm , 18cm , 21cm , 24cm . Tính diện tích hai hình vành khuyên đó.



2) Cho tam giác ABC ($AB < AC$) có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại trực tâm H . Lấy I là trung điểm của BC . Gọi K là điểm đối xứng của H qua I .

a) Chứng minh tứ giác $BHCK$ là hình bình hành

b) Xác định tâm O của đường tròn qua các điểm A, B, K, C . Chứng minh: $OI \parallel AH$

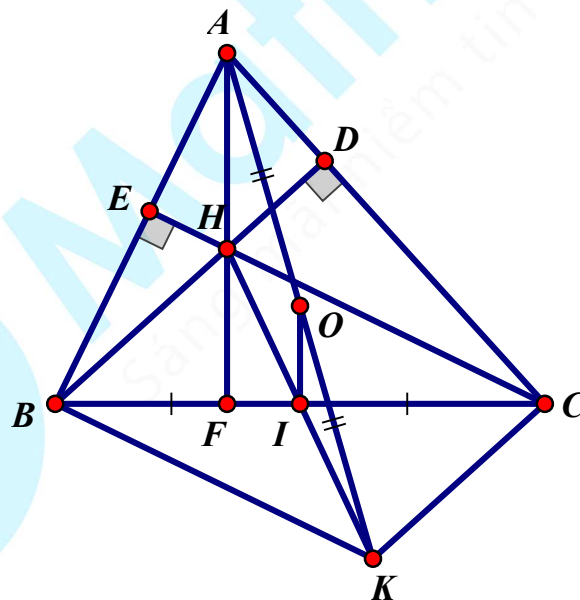
c) Chứng minh rằng: $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$

Lời giải

1) Diện tích hình vành khuyên bên trong là: $S_1 = \pi(18^2 - 15^2) = 99\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

Diện tích hình vành khuyên bên ngoài là: $S_2 = \pi(24^2 - 21^2) = 135\pi \text{ (cm}^2\text{)}$

2)



a) Vì K là điểm đối xứng của H qua I nên I là trung điểm của HK

Xét tứ giác $BHCK$ có hai đường chéo BC và HK cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường

Suy ra tứ giác $BHCK$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết)

b) Vì tứ giác $BHCK$ là hình bình hành nên $CH \parallel BK$; $BH \parallel CK$ (tính chất)

Suy ra $BK \perp AB$ (do $CH \perp AB$), $CK \perp AC$ (do $BH \perp AC$)

Xét $\triangle ABK$ vuông tại B và $\triangle ACK$ vuông tại C , có cạnh huyền AK

Suy ra A, B, K, C cùng thuộc đường tròn đường kính AK

Do đó tâm O của đường tròn đi qua các điểm

A, B, K, C là trung điểm của AK

Xét $\triangle KAH$ có O là trung điểm của AK và I là trung điểm của HK

Suy ra OI là đường trung bình của $\triangle KAH$

Suy ra $OI \parallel AH$ (điều phải chứng minh).

c) Gọi F là giao điểm của AH và BC

Suy ra $AF \perp BC$ (do H là trực tâm)

Chứng minh được $\triangle BEC \sim \triangle BFA$ (g.g)

Suy ra $\frac{BE}{BF} = \frac{BC}{BA}$ hay $BE \cdot BA = BC \cdot BF$ (1)

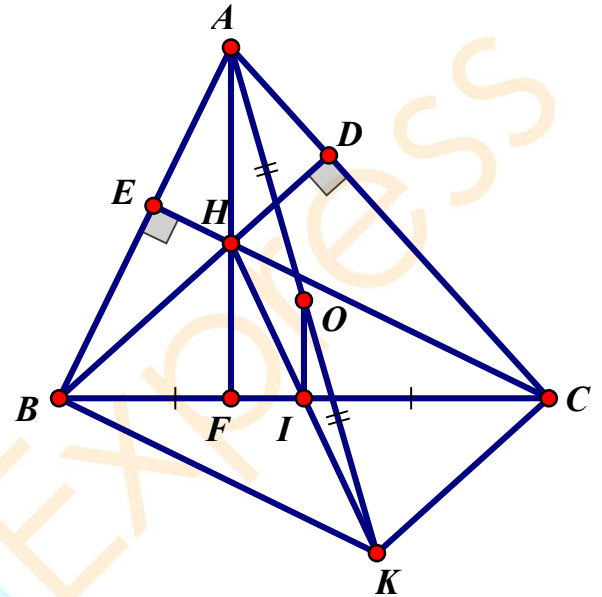
Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle CDB \sim \triangle CFA$ (g.g)

Suy ra $\frac{CD}{CF} = \frac{CB}{CA}$ hay $CD \cdot CA = CF \cdot CB$ (2)

Cộng theo vế của (1) và (2) ta có:

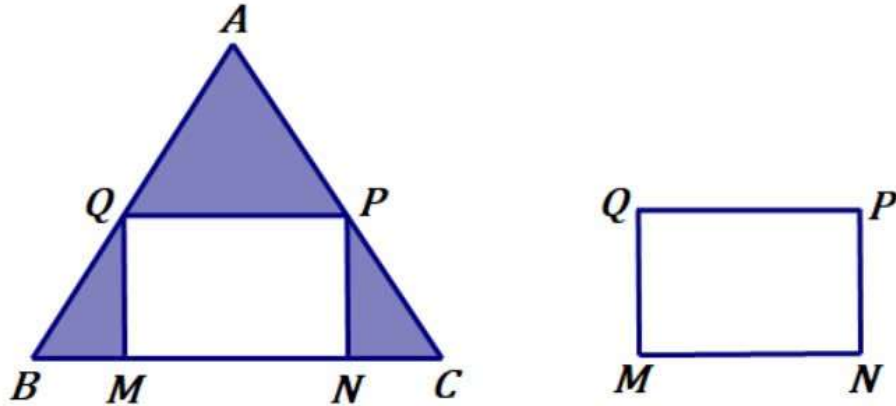
$$\begin{aligned} BE \cdot BA + CD \cdot CA &= BC \cdot BF + CF \cdot CB = BC(BF + CF) \\ &= BC \cdot BC \\ &= BC^2 \end{aligned}$$

Vậy $BE \cdot BA + CD \cdot CA = BC^2$



Bài 5. (0,5 điểm) Cho một tấm nhôm hình tam giác đều có cạnh bằng 20 (cm). Người ta cắt ở ba góc của tấm nhôm đó ba tam giác như hình vẽ dưới đây để được hình chữ nhật $MNPQ$. Tìm độ dài đoạn MB để hình chữ nhật $MNPQ$ có diện tích lớn nhất.

Lời giải



Giả sử $MB = x$ ($0 < x < 10$) suy ra $NC = x$ nên $MN = 20 - 2x$

Vì $\triangle ABC$ đều nên $\hat{B} = 60^\circ$

Xét $\triangle BMQ$ vuông tại M , ta có: $MQ = MB \cdot \tan \hat{B}$ (hệ thức giữa hai cạnh góc vuông)

Suy ra $MQ = x\sqrt{3}$ (cm)

Suy ra $S_{MNPQ} = (20 - 2x) \cdot x\sqrt{3} = 2\sqrt{3}(10 - x) \cdot x$

Với mọi a, b dương ta có: $0 \leq a^2 - 2ab + b^2$

Suy ra: $4ab \leq (a + b)^2$ hay $ab \leq \frac{(a + b)^2}{4}$

Áp dụng với hai số dương $(10 - x)$ và x ta có: $(10 - x) \cdot x \leq \frac{(10 - x + x)^2}{4} = 25$

Suy ra $S_{MNPQ} \leq 2\sqrt{3} \cdot 25 = 50\sqrt{3}$

Dấu “=” xảy ra khi $10 - x = x$ hay $x = 5$

Vậy $MB = 5$ cm thì S_{MNPQ} lớn nhất là $50\sqrt{3}$ cm².

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 4

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2 điểm)

1) Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sqrt{12} + 2\sqrt[3]{27} + 3\sqrt{75} - 6$

b) $B = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}+1} + \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

2) Galilei là người phát hiện ra quãng đường chuyển động của vật rơi tự do tỉ lệ thuận với bình phương của thời gian. Quan hệ giữa quãng đường chuyển động y (mét) và thời gian chuyển động x (giây) được biểu diễn gần đúng bởi công thức $y = 5x^2$. Người ta thả một vật nặng từ độ cao $55m$ trên tháp nghiêng Pi – da xuống đất (sức cản của không khí không đáng kể)



a) Hãy cho biết sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất bao nhiêu mét?

b) Khi vật nặng còn cách đất $25m$ thì nó đã rơi được thời gian bao lâu?

Lời giải

1)

a) $A = \sqrt{12} + 2\sqrt[3]{27} + 3\sqrt{75} - 6$ $= 2\sqrt{3} + 2.3 + 3.5\sqrt{3} - 6$ $= 2\sqrt{3} + 6 + 15\sqrt{3} - 6$ $= 17\sqrt{3}$	b) $B = \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}+1} + \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}} - \frac{5-1}{\sqrt{5}+1} + \sqrt{5+2\sqrt{5}+1}$ $= \sqrt{5} - 1 - (\sqrt{5} - 1) + \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2} = \sqrt{5} - 1 - \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}+1 = \sqrt{5} + 1$
---	---

2)

a) Thay $x = 3$ vào công thức $y = 5x^2$, ta được:

$$y = 5.3^2 = 45 \text{ (m)}$$

Vậy sau 3 giây thì vật nặng còn cách mặt đất là: $55 - 45 = 10 \text{ (m)}$.

b) Quãng đường chuyển động của vật nặng còn cách đất $25m$ là: $55 - 25 = 30 (m)$

Thay $y = 30$ vào công thức $y = 5x^2$, ta được:

$$30 = 5x^2$$

$$x^2 = 6$$

$$x = \sqrt{6} \approx 2,4 \text{ (giây)} \text{ (Do } x > 0 \text{)}$$

Vậy khi vật nặng còn cách đất $25m$ thì nó đã rơi được thời gian khoảng $2,4$ giây.

Bài 2 (2 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3}$ và $B = \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}$.

c) Với $P = A : B$. Tìm giá trị của x để $P + 2 = 3\sqrt{P}$

Lời giải

a) Thay $x = 9$ (thoả mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta có: $A = \frac{2\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{3}$

Vậy với $x = 9$ thì $A = \frac{4}{3}$

b) Với $x > 0; x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{3x-4}{x-2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}-1}{2-\sqrt{x}} \\ &= \frac{3x-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \\ &= \frac{3x-4 - (\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3x-4 - (x-4) - x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{3x-4-x+4-x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

c) Với $x > 0; x \neq 4$ ta có: $P = A : B = \frac{2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+3} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} = \frac{2(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+1} = \frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+3}$

Xét: $P + 2 = 3\sqrt{P}$ (1)

Điều kiện $P \geq 0$, suy ra $\frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+3} \geq 0$

Với $x > 0$ suy ra $\sqrt{x} > 0$. Do đó $\sqrt{x} + 3 > 3 > 0$

Suy ra $2(\sqrt{x}-2) \geq 0$ hay $\sqrt{x} \geq 2$ nên $x \geq 4$

Kết hợp điều kiện xác định ta có $x > 4$

Khi đó biến đổi (1) ta được: $P - 3\sqrt{P} + 2 = 0$
 $(\sqrt{P} - 1)(\sqrt{P} - 2) = 0$

TH1: $\sqrt{P} - 1 = 0$ Suy ra $\sqrt{P} = 1$ hay $P = 1$

TH2: $\sqrt{P} - 2 = 0$ Suy ra $\sqrt{P} = 2$ hay $P = 4$

Với $P = 1$ ta có:

$$\frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+3} = 1$$

$$2(\sqrt{x}-2) = \sqrt{x}+3$$

$$2\sqrt{x}-4 = \sqrt{x}+3$$

$$\sqrt{x} = 7$$

$$x = 49 \text{ (thoả mãn)}$$

Với $P = 4$ ta có:

$$\frac{2(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}+3} = 4$$

$$2(\sqrt{x}-2) = 4(\sqrt{x}+3)$$

$$2\sqrt{x}-4 = 4\sqrt{x}+12$$

$$\sqrt{x} = -8 \text{ (vô lý)}$$

Vậy với $x = 49$ thì $P + 2 = 3\sqrt{P}$

Bài 3 (2 điểm)

Một mảnh vườn hình chữ nhật của gia đình anh Bình có chu vi bằng 54m và chiều dài lớn hơn chiều rộng 3m. Anh Bình dự định trồng hoa trên mảnh vườn đó với các chi phí cần cho $1 m^2$ để trồng hoa là 50 000 đồng. Hỏi anh Bình sẽ phải chi bao nhiêu tiền để trồng hoa trên mảnh vườn đó?

Lời giải

Gọi chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật là $x(m)$ ($3 < x < 27$)

Chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật là $y(m)$ ($0 < y < x$)

Chu vi mảnh vườn hình chữ nhật của gia đình anh Bình là 54m nên ta có phương trình:

$$2.(x+y)=54 \text{ hay } x+y=27 \quad (1)$$

Do chiều dài lớn hơn chiều rộng là 3m nên ta có phương trình: $x-y=3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+y=27 & (1) \\ x-y=3 & (2) \end{cases}$$

Cộng từng vế của phương trình (1) và (2) ta có:

$$2x=30 \text{ hay } x=15(m) \text{ (thỏa mãn)}$$

Thay $x=15$ vào phương trình (1) ta được:

$$15+y=27 \text{ hay } y=12(m) \text{ (thỏa mãn)}$$

Do đó mảnh vườn hình chữ nhật có chiều dài là 15m, chiều rộng là 12m.

Nên diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là:

$$15.12=180 (m^2)$$

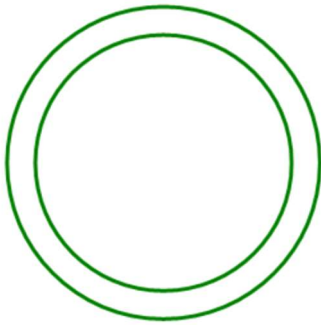
Do đó anh Bình cần phải chi hết số tiền để trồng hoa trên mảnh vườn đó là:

$$50\,000.180 = 9\,000\,000 \text{ (đồng)}$$

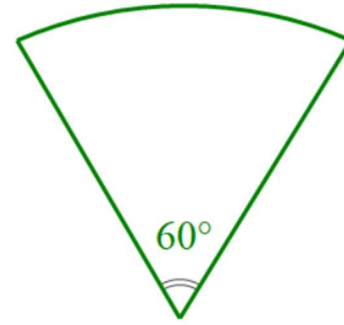
Vậy anh Bình sẽ phải chi 9 000 000 đồng để trồng hoa trên mảnh vườn đó.

Bài 4 (3,5 điểm).

1) Trong cuộc thi thiết kế logo cho trường học, bạn An thiết kế một logo có dạng hình vành khuyên giới hạn bởi hai đường tròn có bán kính lần lượt là 4cm và 5cm như hình 1. Bạn Bình thiết kế một logo có dạng hình quạt tròn với bán kính 3cm và góc ở tâm là 60° như hình 2. Tính diện tích của mỗi logo đó (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 1



Hình 2

2) Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm A sao cho $OA = 2R$, vẽ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn $(O; R)$, B và C là các tiếp điểm. Vẽ đường kính BOD . Gọi I là giao điểm của đoạn thẳng OA và đường tròn $(O; R)$.

a) Chứng minh 4 điểm A, B, O, C cùng thuộc một đường tròn.

b) Đường trung trực của BD cắt AC và CD lần lượt tại S và E . Chứng minh rằng tứ giác $OCEA$ là hình thang cân.

c) K là giao điểm của tia SI và AB . Tính theo R diện tích của tứ giác $AKOS$.

Lời giải

1) Diện tích logo bạn An thiết kế là: $\pi.(5^2 - 4^2) \approx 28,27(\text{cm}^2)$

Diện tích logo bạn Bình thiết kế là: $\frac{\pi.3^2.60}{360} \approx 4,71(\text{cm}^2)$

Vậy diện tích của logo do bạn An và bạn Bình thiết kế lần lượt là khoảng $28,27 \text{ cm}^2$ và $4,71 \text{ cm}^2$.

c) Vì OS là đường trung trực của BD (giả thiết) nên $OS \perp BO$

Mà $AB \perp BO$ (do AB là tiếp tuyến tại B của (O))

Suy ra $AB \parallel OS$. Do đó $\widehat{IAK} = \widehat{IOS}$ (hai góc so le trong).

Vì AB, AC là tiếp tuyến của đường tròn $(O; R)$ nên

AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra: $\widehat{SOA} = \widehat{IAK} = \widehat{SAO}$ nên $\triangle SOA$ cân tại S

Lại có: SI là đường trung tuyến ($OI = IA = \frac{OA}{2} = R$)

Suy ra: $SI \perp OA$ hay $KS \perp OA$ (5)

Xét $\triangle OIS$ và $\triangle AIK$ có:

$IO = IA$ (chứng minh trên)

$\widehat{AIK} = \widehat{OIS} = 90^\circ$ (do $KS \perp OA$)

$\widehat{IAK} = \widehat{IOS}$ (chứng minh trên)

Suy ra $\triangle OIS = \triangle AIK$ (g - c - g) nên $IK = IS$ (hai cạnh tương ứng).

Xét tứ giác $OKAS$ có: I là trung điểm của KS ($IK = IS$); I là trung điểm của OA ($OI = IA$)

Suy ra tứ giác $OKAS$ là hình bình hành (dấu hiệu nhận biết) (6)

Từ (5) và (6) suy ra tứ giác $OKAS$ là hình thoi (dấu hiệu nhận biết)

Ta có $\triangle OAB$ vuông tại B có $OA = 2OB = 2R$

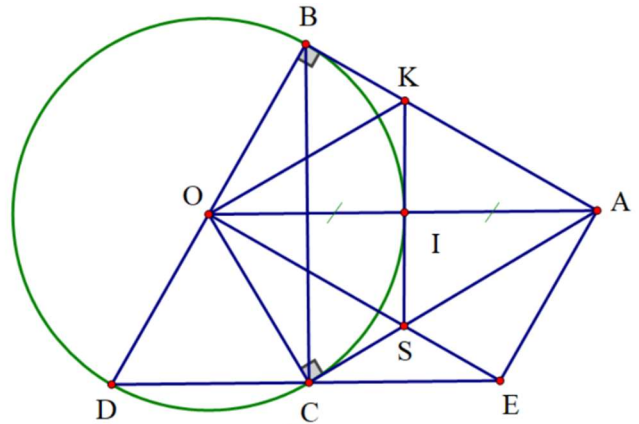
Suy ra $\widehat{OAB} = 30^\circ$ hay $\widehat{KAI} = 30^\circ$

Xét $\triangle KAI$ vuông tại I có: $\tan \widehat{KAI} = \tan 30^\circ = \frac{KI}{AI}$

Suy ra: $KI = AI \cdot \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} R$

Suy ra: $KS = 2KI = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$

Vậy diện tích của tứ giác $AKOS$ là: $S_{AKOS} = \frac{OA \cdot SK}{2} = \frac{2R \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} R}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} R^2$



Bài 5 (0,5 điểm)

Chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí (bao gồm: lương cán bộ, công nhân viên, giấy in, ...) được cho bởi $C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10\,000$, $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4000 đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ với $T(x)$ là tổng chi phí (xuất bản và phát hành) cho x cuốn tạp chí, được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn. Khi chi phí trung bình cho mỗi cuốn tạp chí $M(x)$ thấp nhất, tính chi phí cho mỗi cuốn tạp chí đó.

Lời giải

Vì chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4000 đồng nên chi phí phát hành cho x cuốn là $4000x$ (đồng).

Ta có: $T(x) = C(x) \cdot 10\,000 + 4\,000x = x^2 + 2\,000x + 100\,000\,000$ (đồng)

$$\text{Suy ra } M(x) = \frac{T(x)}{x} = \frac{x^2 + 2000x + 100\,000\,000}{x} = x + 2000 + \frac{100\,000\,000}{x} \text{ (đồng)}$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau:

Với hai số thực không âm a, b ta luôn có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

Thật vậy: Do $a, b \geq 0$, bình phương hai vế ta có:

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \text{ (Luôn đúng với mọi } a, b \geq 0 \text{) (điều phải chứng minh)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Thay $a = x$, $b = \frac{100\,000\,000}{x}$ vào (1) ta có:

$$x + \frac{100\,000\,000}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{100\,000\,000}{x}} = 2 \cdot \sqrt{x \cdot \frac{100\,000\,000}{x}} = 2 \cdot 10\,000 = 20\,000$$

$$\text{Do đó } M(x) = x + \frac{100\,000\,000}{x} + 2\,000 \geq 20\,000 + 2\,000 = 22\,000 \text{ (đồng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{100\,000\,000}{x}$ hay $x = 10\,000$ (thỏa mãn)

Vậy chi phí trung bình thấp nhất cho mỗi cuốn tạp chí là 22 000 đồng.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 5

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2 điểm)

1) Thực hiện phép tính

a) $3\sqrt{80} - 3\sqrt{125} + 10\sqrt{5} + 7\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}$

b) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2}$

2) Công thức $h = 0,4\sqrt[3]{x}$ biểu diễn mối tương quan giữa cân nặng x (tính bằng ki-lô-gam) và chiều cao h (tính bằng mét) của một con hươu cao cổ.



a) Một con hươu cao cổ cân nặng 180kg thì cao bao nhiêu mét?

b) Một con hươu cao cổ có chiều cao $2,56\text{m}$ thì cân nặng bao nhiêu kg?

(Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

1)

$$\begin{aligned} a) & 3\sqrt{80} - 3\sqrt{125} + 10\sqrt{5} + 7\sqrt{(3-\sqrt{5})^2} \\ &= 3\sqrt{16 \cdot 5} - 3\sqrt{25 \cdot 5} + 10\sqrt{5} + 7|3-\sqrt{5}| \\ &= 3 \cdot 4\sqrt{5} - 3 \cdot 5\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 7(3-\sqrt{5}) \\ &= 12\sqrt{5} - 15\sqrt{5} + 10\sqrt{5} + 21 - 7\sqrt{5} \\ &= 21 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) & \frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{(-2)^2 \cdot 5} + \sqrt{(\sqrt{5}-2)^2} \\ &= \frac{\sqrt{5}(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{20} + |\sqrt{5}-2| \\ &= \sqrt{5} - 2\sqrt{5} + \sqrt{5} - 2 \\ &= -2 \end{aligned}$$

2)

a) Thay $x = 180$ vào công thức $h = 0,4\sqrt[3]{x}$, ta được:

$$h = 0,4 \cdot \sqrt[3]{180} \approx 2,26 \text{ m}$$

Vậy chiều cao của con hươu cao cổ khoảng $2,26 \text{ m}$.

b) Thay $h = 2,56$ vào công thức $h = 0,4\sqrt[3]{x}$, ta được:

$$0,4\sqrt[3]{x} = 2,56$$

$$\sqrt[3]{x} = \frac{2,56}{0,4}$$

$$\sqrt[3]{x} = 6,4$$

$$x = (6,4)^3 \approx 262,14(kg)$$

Vậy cân nặng của hươu cao cổ khoảng 262,14 kg.

Bài 2 (2 điểm)

Cho hai biểu thức $Q = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}$ và $P = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$

a) Tính giá trị của biểu thức Q khi $x = 9$.

b) Chứng minh $P = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

c) Cho $A = P \cdot Q$. Tìm x để $|A| = -A$

Lời giải

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức Q ta có: $Q = \frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{9}+2} = \frac{4}{5}$

Vậy với $x = 9$ thì $Q = \frac{4}{5}$.

b) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} + \frac{3}{\sqrt{x}+1} - \frac{6\sqrt{x}-4}{x-1} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-1) - (6\sqrt{x}-4)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\ &= \frac{x + \sqrt{x} + 3\sqrt{x} - 3 - 6\sqrt{x} + 4}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

c) Với $x \geq 0; x \neq 1$ ta có:

$$A = P \cdot Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}$$

Để $|A| = -A$ thì $A \leq 0$ suy ra $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \leq 0$

Với $x \geq 0$ thì $\sqrt{x} \geq 0$ suy ra $\sqrt{x}+2 \geq 2 > 0$

Do đó: $\sqrt{x}-1 \leq 0$ suy ra $\sqrt{x} \leq 1$ hay $x \leq 1$

Kết hợp điều kiện xác định ta có $0 \leq x < 1$. Vậy với $0 \leq x < 1$ thì $|A| = -A$.

Bài 3 (2 điểm)

Trong một thí nghiệm, Nam muốn pha chế được 50 ml dung dịch muối CuSO_4 nồng độ 10%. Trong phòng thí nghiệm chỉ có sẵn dung dịch CuSO_4 nồng độ 5% và dung dịch CuSO_4 nồng độ 30%. Hỏi Nam cần sử dụng bao nhiêu mililit dung dịch mỗi loại có sẵn để pha được dung dịch mong muốn?

Lời giải

Gọi số mililit dung dịch CuSO_4 nồng độ 5% cần dùng là $x(\text{ml})$ ($0 < x < 50$)

Số mililit dung dịch CuSO_4 nồng độ 30% cần dùng là $y(\text{ml})$ ($0 < y < 50$)

Theo đề cần tạo ra 50 ml dung dịch CuSO_4 sau pha chế nên ta có phương trình : $x + y = 50$ (1)

Mặt khác Nam trộn dung dịch CuSO_4 nồng độ 5% và dung dịch CuSO_4 nồng độ 30% có sẵn để tạo ra dung dịch CuSO_4 có nồng độ 10% nên ta có phương trình : $0,05x + 0,3y = 0,1.50$

Hay : $x + 6y = 100$ (2)

Từ phương trình (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x + y = 50 & (1) \\ x + 6y = 100 & (2) \end{cases}$$

Trừ từng vế của phương trình (2) cho phương trình (1) ta được : $5y = 50$ hay $y = 10(\text{ml})$

Thay $y = 10$ vào phương trình (1) ta có $x + 10 = 50$ hay $x = 40(\text{ml})$

Do đó: Dung dịch CuSO_4 nồng độ 5% cần dùng là 40 ml

Dung dịch CuSO_4 nồng độ 30% cần dùng là 10 ml

Vậy bạn Nam cần trộn 40 ml dung dịch CuSO_4 nồng độ 5% và 10 ml dung dịch CuSO_4 nồng độ 30% để tạo ra dung dịch mong muốn.

Bài 4 (3,5 điểm)

1) Để làm một chiếc quạt giấy, người thợ làm quạt thường sử dụng 18 thanh tre làm cốt và khâu cố định 1 đầu. Mỗi thanh tre dài 35cm. Để dán mỗi chiếc quạt cả mặt trước và mặt sau, cần hai phần giấy bằng nhau (như hình bên dưới). Phần không được dán giấy của mỗi thanh tre là 10cm. Khi mở rộng nhất, hai thanh ngoài cùng của chiếc quạt tạo với nhau một góc 150° .

Tính diện tích giấy tối thiểu cần để dán một chiếc quạt ?

(Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



2) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M ở ngoài đường tròn sao cho $OM = \frac{8}{5}R$. Kẻ các tiếp tuyến MA, MB với đường tròn $(O; R)$ (A, B là các tiếp điểm), đường thẳng AB cắt OM tại K .

a) Tính MA, AB theo R .

b) Kẻ đường kính AN của đường tròn $(O; R)$. Kẻ BH vuông góc với AN tại H . Chứng minh $MB \cdot BN = BH \cdot MO$.

c) Đường thẳng MO cắt đường tròn $(O; R)$ tại C và D (C nằm giữa O và M). Gọi E là điểm đối xứng của C qua K . Chứng minh E là trực tâm của tam giác ABD .

Lời giải

1)

$$\text{Diện tích quạt là: } \frac{\pi \cdot R^2 \cdot n}{360} = \frac{150}{360} \cdot \pi \cdot 35^2 = \frac{6125}{12} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

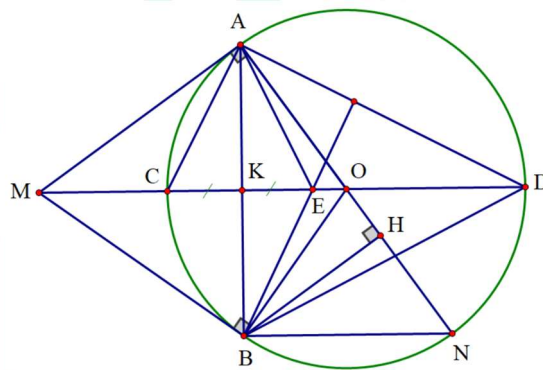
$$\text{Diện tích phần không được dán giấy là: } \frac{\pi \cdot r^2 \cdot n}{360} = \frac{150}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{125}{3} \pi \text{ (cm}^2\text{)}$$

Diện tích giấy tối thiểu cần để dán một chiếc quạt là:

$$2 \cdot \left(\frac{6125}{12} \pi - \frac{125}{3} \pi \right) = 2 \cdot \frac{1875}{4} \pi \approx 2945,24 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích giấy tối thiểu cần để dán một chiếc quạt khoảng $2945,24 \text{ cm}^2$.

2)



a) Vì MA là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MA \perp AO$ hay $\widehat{MAO} = 90^\circ$

Xét $\triangle MAO$ vuông tại A có: $MA^2 + AO^2 = MO^2$ (định lý Pythagore)

$$\text{Suy ra } MA^2 = MO^2 - AO^2 = \left(\frac{8}{5}R \right)^2 - R^2 = \frac{64}{25}R^2 - R^2 = \frac{39}{25}R^2$$

$$\text{Suy ra } MA = \frac{\sqrt{39}}{5}R$$

Vì MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $MA = MB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Mà $OA = OB (= R)$

Suy ra OM là đường trung trực của AB hay $KA = KB$.

Ta có: $S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot MO$ hay $AK \cdot MO = 2S_{\Delta AMO}$

Xét ΔAMO vuông tại A có: $S_{\Delta AMO} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AO$ hay $AM \cdot AO = 2S_{\Delta AMO}$.

Do đó $AK \cdot MO = AM \cdot AO$

$$AK \cdot \frac{8}{5}R = \frac{\sqrt{39}}{5}R \cdot R$$

Suy ra $AK = \frac{\sqrt{39}}{8}R$. Do đó $AB = 2AK = 2 \cdot \frac{\sqrt{39}}{8}R = \frac{\sqrt{39}}{4}R$

b)

Xét ΔABN có: $OB = OA = ON = R$

Mà BO là trung tuyến ứng với AN suy ra ΔABN vuông tại B

Suy ra $BN \perp AB$

Vì $BN \parallel MO$ (cùng vuông góc với AB)

Nên $\widehat{AOM} = \widehat{ANB}$ (hai góc đồng vị) (1)

Vì MA, MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên OM là tia phân giác của $\widehat{AOB}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau). Suy ra $\widehat{AOM} = \widehat{BOM}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{ANB} = \widehat{BOM}$ hay $\widehat{HNB} = \widehat{BOM}$

Xét ΔBHN và ΔMBO có:

$$\widehat{BHN} = \widehat{MBO} = 90^\circ$$

$$\widehat{HNB} = \widehat{BOM}$$

Suy ra $\Delta BHN \sim \Delta MBO (g - g)$

Suy ra: $\frac{BH}{MB} = \frac{BN}{MO}$ (cặp cạnh tỉ lệ)

Hay $MB \cdot BN = BH \cdot MO$ (điều phải chứng minh)

Bài 5 (0,5 điểm)

Trong mùa cao điểm du lịch, một tổ hợp nhà nghỉ ở Đà Nẵng gồm 100 phòng đồng giá luôn luôn kín phòng khi giá thuê là 480 nghìn đồng/ phòng. Qua khảo sát các năm trước bộ phận kinh doanh của nhà nghỉ thấy rằng: cứ tăng giá phòng lên $x\%$ ($x > 0$) so với lúc kín phòng (giá thuê 480 nghìn đồng/ phòng) thì số phòng cho thuê giảm đi $\frac{4x}{5}\%$. Hỏi nhà nghỉ phải niêm yết giá phòng là bao nhiêu để đạt doanh thu cao nhất?

Lời giải

Số phòng cho thuê lúc giá phòng tăng $x\%$ là: $100 - 100 \cdot \frac{4x}{5}\% = 100 - \frac{4}{5}x$ (phòng)

Tổng doanh thu tương ứng là:

$$A(x) = \left(100 - \frac{4}{5}x\right)(480 + 480 \cdot x\%) = \left(100 - \frac{4}{5}x\right)(480 + 4,8x) = 3,84(125 - x)(100 + x) \text{ (nghìn đồng)}$$

Với mọi a, b ta luôn có:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(a + b)^2 \geq 4ab$$

$$\text{Hay } ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Dấu "=" xảy ra khi $(a - b)^2 = 0$ hay $a = b$

$$\text{Thay } a = 125 - x \text{ và } b = 100 + x \text{ vào (1) ta có: } (125 - x)(100 + x) \leq \left(\frac{125 - x + 100 + x}{2}\right)^2$$

$$\text{Suy ra } A(x) = 3,84(125 - x)(100 + x) \leq 3,84\left(\frac{125 - x + 100 + x}{2}\right)^2 = 48\,600 \text{ (nghìn đồng)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $125 - x = 100 + x$ hay $x = 12,5$ (thỏa mãn)

Giá phòng niêm yết là: $480 + 480 \cdot 12,5\% = 540$ (nghìn đồng)

Vậy để đạt doanh thu cao nhất, nhà nghỉ phải niêm yết giá phòng là 540 nghìn đồng.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 6

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2 điểm)

1) Thực hiện phép tính

a) $\sqrt{36} - \sqrt[3]{8} + \sqrt{49}$

b) $\sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

2) Thời gian t (tính bằng giây) từ khi một người bắt đầu nhảy Bungee trên cao cách mặt nước d

(tính bằng mét) đến khi chạm mặt nước được cho bởi công thức: $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$.



a) Tìm thời gian một người nhảy Bungee từ vị trí cao cách mặt nước $108m$ đến khi chạm mặt nước?

b) Nếu một người nhảy Bungee từ một vị trí khác đến khi chạm mặt nước là 7 giây. Hãy tìm độ cao của người nhảy Bungee so với mặt nước? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

1) Thực hiện phép tính

$$\begin{aligned} a) \sqrt{36} - \sqrt[3]{8} + \sqrt{49} \\ = 6 - 2 + 7 \\ = 11 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \sqrt{4+2\sqrt{3}} + \sqrt{4-2\sqrt{3}} \\ = \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} + \sqrt{3-2\sqrt{3}+1} \\ = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} \\ = |\sqrt{3}+1| + |\sqrt{3}-1| \\ = \sqrt{3}+1 + \sqrt{3}-1 = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

2) a) Thay $d = 108$ vào công thức $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$, ta được:

$$t = \sqrt{\frac{3 \cdot 108}{9,8}} \approx 5,75 \text{ (giây)}$$

Vậy thời gian một người nhảy Bungee khoảng 5,75 giây.

b) Thay $t = 7$ vào công thức $t = \sqrt{\frac{3d}{9,8}}$, ta được: $\sqrt{\frac{3d}{9,8}} = 7$ suy ra $\frac{3d}{9,8} = 49$ hay $d = \frac{49 \cdot 9,8}{3} \approx 160 \text{ m}$

Vậy độ cao của người nhảy Bungee so với mặt nước khoảng 160 mét.

Bài 2 (2 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{-6}{\sqrt{x}+1}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{4}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-\sqrt{x}}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 4$.

b) Rút gọn biểu thức B và tìm giá trị lớn nhất của biểu thức B .

c) Đặt $P = A : B$. So sánh P với $|P|$.

Lời giải

a) Thay $x = 4$ (thoả mãn điều kiện xác định) vào biểu thức A ta được $A = \frac{-6}{\sqrt{4}+1} = -2$

Vậy với $x = 4$ thì $A = -2$

b) Với $x \geq 0; x \neq 9$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{\sqrt{x}-3} + \frac{4}{\sqrt{x}+3} - \frac{9-\sqrt{x}}{x-9} = \frac{\sqrt{x}+3+4(\sqrt{x}-3)-(9-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+3+4\sqrt{x}-12-9+\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{6\sqrt{x}-18}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{6(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{6}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

Ta có $\sqrt{x} \geq 0 \forall x \geq 0; x \neq 9$

$$\sqrt{x}+3 \geq 3$$

$$\frac{6}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{6}{3} = 2$$

Dấu "=" xảy ra khi $\sqrt{x} = 0$ suy ra $x = 0$ (thoả mãn)

Vậy khi $x = 0$ thì giá trị lớn nhất của B bằng 2.

c) Với $x \geq 0; x \neq 9$ ta có: $P = A : B = \frac{-6}{\sqrt{x}+1} : \frac{6}{\sqrt{x}+3} = \frac{-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$

Với $x \geq 0; x \neq 9$ ta có: $-\sqrt{x}-3 < 0$ và $\sqrt{x}+1 > 0$ nên $\frac{-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1} < 0$

Do đó $P < 0$.

Vậy với mọi $x \geq 0; x \neq 9$ thì $|P| > P$.

Bài 3 (2 điểm)

Trái bóng Telstar xuất hiện lần đầu tiên ở World Cup 1970 ở Mexico do Adidas sản xuất có diện tích bề mặt trái bóng khoảng 1562 cm^2 . Trái bóng được may từ 32 múi da đen và trắng. Các múi da màu đen hình ngũ giác đều, các múi da màu trắng hình lục giác đều. Trên bề mặt trái bóng, mỗi múi da màu đen có diện tích 37 cm^2 và mỗi múi da màu trắng có diện tích $55,9 \text{ cm}^2$. Hãy tính trên trái bóng có bao nhiêu múi da màu đen và màu trắng.

Lời giải

Gọi số múi da đen trên trái bóng Telstar là x (múi) ($x \in \mathbb{N}^*; x < 32$)

Số múi da trắng trên trái bóng Telstar là y (múi) ($y \in \mathbb{N}^*; y < 32$)

Tổng số múi da đen và trắng là 32 múi, nên ta có phương trình: $x + y = 32$ (1)

Tổng diện tích số múi da đen trên trái bóng là: $37x \text{ (cm}^2\text{)}$

Tổng diện tích số múi da trắng trên trái bóng là: $55,9y \text{ (cm}^2\text{)}$

Do số múi da đen và trắng phủ kín bề mặt của trái bóng và tổng diện tích bề mặt trái bóng là 1562 cm^2 , nên ta có phương trình: $37x + 55,9y = 1562$ (2)

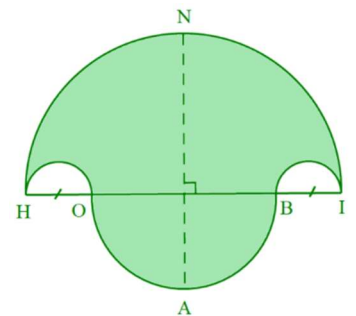
Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 32 & (1) \\ 37x + 55,9y = 1562 & (2) \end{cases}$$

Giải hệ phương trình được $\begin{cases} x = 12 \\ y = 20 \end{cases}$ (thỏa mãn điều kiện)

Vậy trên trái bóng có tất cả 12 múi da đen và 20 múi da trắng.

Bài 4 (3,5 điểm)

1) Cho hình vẽ là các cung tròn của các đường tròn có bán kính khác nhau được xếp nối tiếp nhau. Tính diện tích phần tô đậm trong hình vẽ biết $HI = 10 \text{ cm}$; $HO = BI = 2 \text{ cm}$



2) Cho đường tròn $(O; R)$. Lấy hai điểm A, B thuộc đường tròn (O) sao cho $AB < 2R$. Vẽ các đường thẳng đi qua A vuông góc với OA và đi qua B vuông góc với OB , hai đường thẳng đó cắt nhau tại M .

a) Chứng minh 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc một đường tròn và chỉ rõ tâm, bán kính của đường tròn này.

b) Qua M vẽ đường thẳng d nằm trong góc OMB cắt đường tròn tại hai điểm C và D ($MC < MD$). H là trung điểm của CD , đường thẳng OH cắt đường thẳng MA tại K . Chứng minh $KA \cdot KM = KO \cdot KH$ và $AH < OM$.

c) Đường thẳng qua O vuông góc với OM cắt hai đường thẳng MA, MB lần lượt tại E và F . Tìm vị trí điểm M để diện tích tam giác MEF là nhỏ nhất.

Lời giải

1) Diện tích hình quạt tròn đường kính HI là: $S_1 = \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot \left(\frac{HI}{2}\right)^2 = \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot 5^2 = \frac{25}{2} \pi (cm^2)$

Diện tích hình quạt tròn đường kính BO là:

$$S_2 = \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot \left(\frac{BO}{2}\right)^2 = \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot \left(\frac{10-2-2}{2}\right)^2 = \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot 3^2 = \frac{9}{2} \pi (cm^2)$$

Diện tích hai hình quạt tròn đường kính HO và BI là:

$$S_3 = 2 \cdot \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot \left(\frac{HO}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{180}{360} \cdot \pi \cdot 1^2 = \pi (cm^2)$$

Diện tích phần tô đậm trong hình vẽ là: $S = S_1 + S_2 - S_3 = \frac{25}{2} \pi + \frac{9}{2} \pi - \pi = 16\pi (cm^2)$

Vậy diện tích phần tô đậm là $16\pi \text{ cm}^2$

2)

a) Gọi I là trung điểm OM

Xét $\triangle OAM$ vuông tại A có AI là trung tuyến ứng với cạnh huyền OM

Nên $AI = IO = IM = \frac{OM}{2}$

Vậy O, M, A cùng thuộc đường tròn $\left(I; \frac{OM}{2}\right)$ (1)

Xét $\triangle OMB$ vuông tại B có BI là trung tuyến ứng với cạnh huyền OM

Nên $BI = IO = IM = \frac{OM}{2}$

Vậy O, M, B cùng thuộc đường tròn $\left(I; \frac{OM}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra 4 điểm A, B, M, O cùng thuộc đường tròn $\left(I; \frac{OM}{2}\right)$

b) Vì $OD = OC (= R)$ nên $\triangle OCD$ cân tại O .

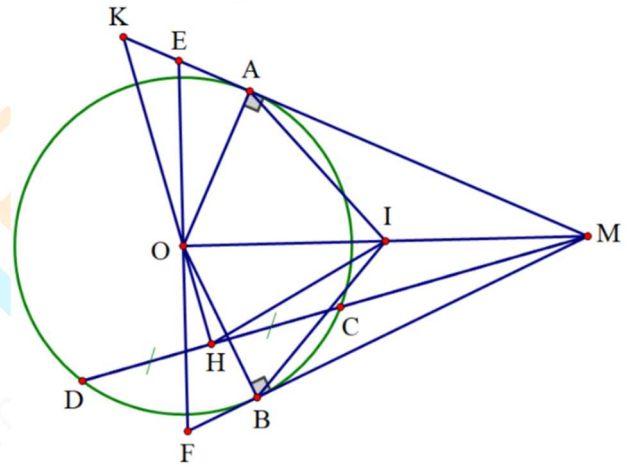
Suy ra OH vừa là trung tuyến, vừa là đường cao ứng với CD . Do đó $OH \perp CD$ hay $\widehat{KHM} = 90^\circ$.

Xét $\triangle KAO$ và $\triangle KHM$ có: $\widehat{HKM}$ chung; $\widehat{KAO} = \widehat{KHM} = 90^\circ$

Suy ra $\triangle KAO \sim \triangle KHM$ (g - g)

Do đó $\frac{KA}{KH} = \frac{KO}{KM}$ (cặp cạnh tỉ lệ) hay $KA \cdot KM = KO \cdot KH$.

Xét $\triangle OHM$ vuông tại H có HI là trung tuyến ứng với cạnh huyền OM



Nên $HI = IO = IM = \frac{OM}{2}$

Vậy H nằm trên đường tròn $\left(I; \frac{OM}{2}\right)$

Xét $\left(I; \frac{OM}{2}\right)$ có: AH là dây, OM là đường kính nên $AH < OM$

c)

Xét $\triangle OAM$ và $\triangle OBM$ có:

$$\widehat{OAM} = \widehat{OBM} = 90^\circ; OA = OB (= R); OM \text{ chung}$$

Suy ra $\triangle OAM = \triangle OBM$ (ch - cvn)

Do đó MO là tia phân giác của $\widehat{EMF}$ mà $MO \perp EF$

Suy ra $\triangle MEF$ cân tại M

Xét $\triangle OAE$ và $\triangle MAO$ có:

$$\widehat{MAO} = \widehat{OAE} = 90^\circ$$

$$\widehat{AMO} = \widehat{AOE} \text{ (cùng phụ với } \widehat{AOM} \text{)}$$

Suy ra $\triangle OAE \sim \triangle MAO$ (g - g) nên $\frac{OA}{AM} = \frac{AE}{OA}$ (cặp cạnh tỉ lệ) hay $OA^2 = AE \cdot AM$.

$$\text{Vậy } S_{MEF} = 2S_{MOE} = OA \cdot ME = OA(AE + AM)$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: với hai số thực không âm a, b ta luôn có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

Thật vậy: Do $a, b \geq 0$, bình phương hai vế ta có: $(a + b)^2 \geq 4ab$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \text{ (Luôn đúng với mọi } a, b \geq 0 \text{)}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = b$.

Thay $a = AE, b = AM$ vào (1) ta có: $AE + AM \geq 2\sqrt{AE \cdot AM}$

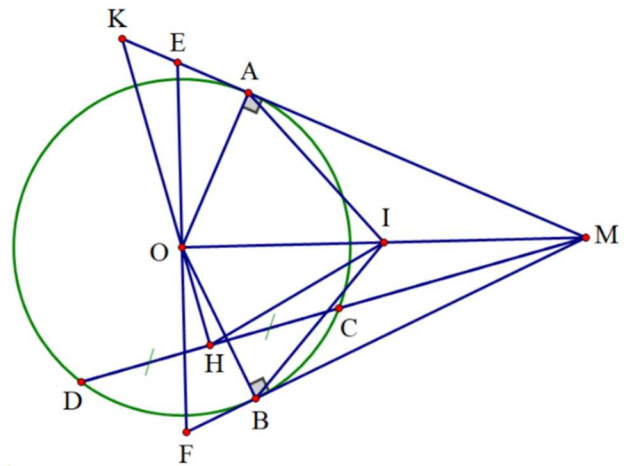
$$\text{Suy ra } S_{MEF} = OA(AE + AM) \geq OA \cdot 2\sqrt{AE \cdot AM} = 2OA^2 = 2R^2$$

Dấu "=" xảy ra khi $AE = AM$

Mà $OA \perp EM$ nên $\triangle OEM$ vuông cân tại O hay $\widehat{AMO} = 45^\circ$

Xét $\triangle OAM$ vuông tại A có: $\sin \widehat{AMO} = \frac{AO}{OM}$ suy ra $OM = AO : \sin \widehat{AMO} = R : \sin 45^\circ = R\sqrt{2}$

Vậy với $OM = R\sqrt{2}$ thì diện tích tam giác MEF là nhỏ nhất.



Bài 5 (0,5 điểm)

Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + y = 13$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3x + 3y - 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} + \frac{27}{\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt{y}}$$

Lời giải

$$P = 3x + 3y - 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} + \frac{27}{\sqrt{x}} + \frac{8}{\sqrt{y}}$$

$$P = (x - 6\sqrt{x} + 9) + (y - 4\sqrt{y} + 4) + \left(3\sqrt{x} + \frac{27}{\sqrt{x}}\right) + \left(2\sqrt{y} + \frac{8}{\sqrt{y}}\right) + (2x + 2y) - 13$$

$$P = (\sqrt{x} - 3)^2 + (\sqrt{y} - 2)^2 + \left(3\sqrt{x} + \frac{27}{\sqrt{x}}\right) + \left(2\sqrt{y} + \frac{8}{\sqrt{y}}\right) + (2x + 2y) - 13$$

Ta chứng minh bất đẳng thức sau: với hai số thực không âm a, b ta luôn có: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (1)

Thật vậy: Do $a, b \geq 0$, bình phương hai vế ta có: $(a + b)^2 \geq 4ab$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$(a - b)^2 \geq 0 \text{ (Luôn đúng với mọi } a, b \geq 0 \text{)}$$

Dấu “=” xảy ra khi $a = b$.

$$\text{Thay } a = 3\sqrt{x}, b = \frac{27}{\sqrt{x}} \text{ vào (1) ta có: } 3\sqrt{x} + \frac{27}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3\sqrt{x} \cdot \frac{27}{\sqrt{x}}} = 18$$

$$\text{Thay } a = 2\sqrt{y}, b = \frac{8}{\sqrt{y}} \text{ vào (1) ta có: } 2\sqrt{y} + \frac{8}{\sqrt{y}} \geq 2\sqrt{2\sqrt{y} \cdot \frac{8}{\sqrt{y}}} = 8$$

$$\text{Lại có: } (\sqrt{x} - 3)^2 \geq 0 \text{ với mọi } x > 0$$

$$(\sqrt{y} - 2)^2 \geq 0 \text{ với mọi } y > 0$$

$$\text{Suy ra: } P \geq 0 + 0 + 18 + 8 + 2 \cdot 13 - 13 = 39$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = 9; y = 4$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P bằng 39 khi $(x, y) = (9; 4)$.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 7

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (2 điểm) Thực hiện phép tính

a) $4\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{45} + \sqrt{27} - \frac{2}{3}\sqrt{5}$ b) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - (2+\sqrt{3})$ c) $\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2}$

Lời giải

$\begin{aligned} \text{a) } & 4\sqrt{3} - \frac{1}{9}\sqrt{45} + \sqrt{27} - \frac{2}{3}\sqrt{5} \\ &= 4\sqrt{3} - \frac{1}{9} \cdot 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{5} \\ &= 7\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\sqrt{5} \\ &= 7\sqrt{3} - \sqrt{5} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - (2+\sqrt{3}) \\ &= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{2}} - 2 - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{3} + 2 + \sqrt{2} - 2 - \sqrt{3} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$
$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} - \sqrt{8-2\sqrt{7}} + \sqrt{2} \\ &= \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{(\sqrt{7}+\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})} - \sqrt{7-2\sqrt{7}+1} + \sqrt{2} \\ &= \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2} - \sqrt{(\sqrt{7}-1)^2} + \sqrt{2} \\ &= \frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5} - \sqrt{7}-1 + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{7} - \sqrt{2} - \sqrt{7} + 1 + \sqrt{2} \\ &= 1 \end{aligned}$	

Bài 2: (2 điểm)

Cho $M = \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left[\frac{25-x}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right]$ với $x \geq 0; x \neq 9; x \neq 25$

- Rút gọn biểu thức M ;
- Tính giá trị của M khi $x = 16$;
- Tìm x nguyên để M nhận giá trị là số nguyên.

Lời giải

a) Với $x \geq 0$; $x \neq 9$ và $x \neq 25$ ta có:

$$\begin{aligned}
 M &= \left(\frac{x-5\sqrt{x}}{x-25} - 1 \right) : \left[\frac{25-x}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+5} + \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-3} \right] \\
 &= \left[\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} - 1 \right] : \left[\frac{25-x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)} - \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)} + \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)} \right] \\
 &= \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+5} - 1 \right) : \left[\frac{25-x}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)} - \frac{x-9}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)} + \frac{x-25}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+5)} \right] \\
 &= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+5} : \left[\frac{25-x-x+9+x-25}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)} \right] \\
 &= \frac{-5}{\sqrt{x}+5} : \frac{9-x}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)} \\
 &= \frac{-5}{\sqrt{x}+5} \cdot \frac{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-3)}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})} \\
 &= \frac{5}{\sqrt{x}+3}
 \end{aligned}$$

Vậy với $x \geq 0$; $x \neq 9$; $x \neq 25$ thì $M = \frac{5}{\sqrt{x}+3}$

b) Thay $x = 16$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào biểu thức M ta có: $M = \frac{5}{\sqrt{16}+3} = \frac{5}{7}$

Vậy $M = \frac{5}{7}$ khi $x = 16$

c) Vì $x \geq 0$ nên suy ra $\sqrt{x} + 3 \geq 3$

Khi đó:

$$\sqrt{x} + 3 \geq 3 > 0$$

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{1}{3}$$

$$0 < \frac{5}{\sqrt{x}+3} \leq \frac{5}{3}$$

Vì $M \in \mathbb{Z}$ suy ra $\frac{5}{\sqrt{x}+3} = 1$

Do đó: $\sqrt{x} + 3 = 5$, suy ra $\sqrt{x} = 2$, hay $x = 4$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 4$ thì biểu thức M nhận giá trị là số nguyên.

Bài 3: (2 điểm)

Ngày chủ nhật hai bạn Tâm và Hiếu được bố mẹ chở đi siêu thị để mua sắm. Khi đến quầy thức ăn Tâm mua 6 chiếc bánh và 3 ly nước, Hiếu mua 5 chiếc bánh và 3 ly nước. Tổng số tiền ăn uống của cả hai bạn là 252 nghìn đồng. Biết giá tiền của một ly nước cao hơn giá tiền của một chiếc bánh là 8 nghìn đồng. Hỏi giá tiền của một cái bánh và một ly nước là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi giá tiền một chiếc bánh và một ly nước lần lượt là x, y nghìn đồng ($x > 0; y > 8; x, y < 252$)

Vì Tâm mua 6 chiếc bánh và 3 ly nước, Hiếu mua 5 chiếc bánh và 3 ly nước nên tổng số bánh và nước hai bạn mua là 11 chiếc bánh và 6 ly nước. Tổng số tiền ăn uống của hai bạn là 252 nghìn đồng nên ta có phương trình: $11x + 6y = 252$ (1)

Vì giá tiền của một ly nước cao hơn giá tiền của một chiếc bánh là 8 nghìn đồng nên $y - x = 8$ hay $-x + y = 8$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} -x + y = 8 \\ 11x + 6y = 252 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 8 + x \\ 11x + 6(8 + x) = 252 \end{cases}$$

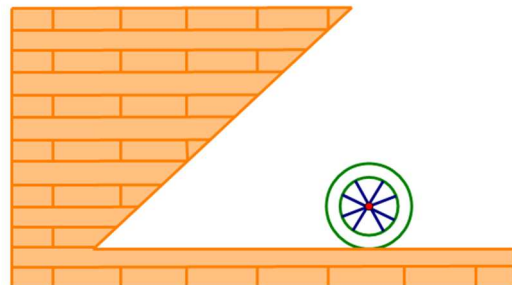
$$\begin{cases} y = 8 + x \\ 17x = 204 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 20 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Vậy giá một chiếc bánh là 12 nghìn đồng, giá một ly nước là 20 nghìn đồng.

Bài 4: (3,5 điểm)

1) Một bánh xe có dạng hình tròn bán kính 20cm lăn đến bức tường hợp với mặt đất một góc 60° . Hãy tính khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường.



2) Cho đường tròn $(O; R)$ và điểm M cố định ngoài (O) , kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là tiếp điểm).

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, A, O, B thuộc một đường tròn.

b) Kẻ đường kính BD của (O) . Chứng minh OM vuông góc AB và MO song song với AD .

c) Trên cung nhỏ AB lấy điểm E (E khác A và B), từ E kẻ tiếp tuyến với (O) cắt MA, MB lần lượt tại I và K . Chứng minh chu vi tam giác MIK không phụ thuộc vào vị trí điểm E .

Lời giải

1)

Khi bánh xe chạm tới bức tường thì không thể di chuyển vào thêm được nữa. Suy ra, khoảng cách từ tâm bánh xe đến góc tường ngắn nhất là khi bánh xe tiếp xúc với bức tường và mặt đất (như hình vẽ).

Gọi AB và AC là hai đoạn biểu diễn mặt tường và mặt đất tiếp xúc với đường tròn (O) .

Khi đó AB và AC là hai tiếp tuyến cắt nhau tại A của đường tròn (O) .

Suy ra AO là tia phân giác của $\widehat{BAC}$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau).

$$\text{Suy ra } \widehat{BAO} = \widehat{CAO} = \frac{1}{2} \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 60^\circ = 30^\circ$$

Vì AB là tiếp tuyến của (O) nên $AB \perp OB$

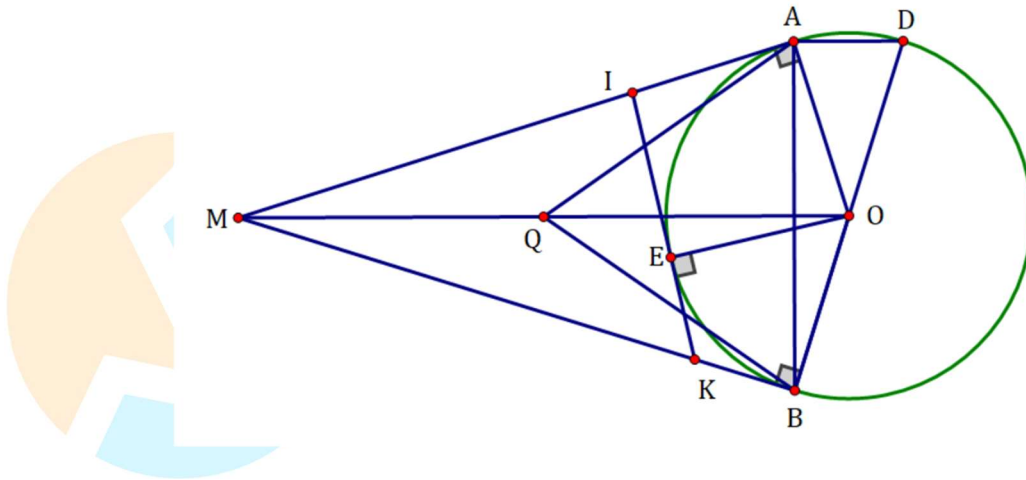
Xét $\triangle ABO$ vuông tại B có:

$$\sin \widehat{BAO} = \frac{OB}{AO} \text{ (tỉ số lượng giác của góc nhọn)}$$

$$\text{Suy ra } AO = \frac{OB}{\sin \widehat{BAO}} = \frac{20}{\sin 30^\circ} = 40 \text{ (cm)}$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ tâm bánh xe đến góc tường là 40cm .

2)



a) Vì MA, MB là các tiếp tuyến của (O) . Suy ra: $MA \perp OA$; $MB \perp OB$ (tính chất tiếp tuyến) hay

$$\widehat{MAO} = \widehat{MBO} = 90^\circ$$

Gọi Q là trung điểm của OM

Xét $\triangle OAM$ vuông tại A có: AQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền OM

Suy ra: $QA = \frac{1}{2}OM$

Do đó: $QA = QO = QM = \frac{1}{2}OM$

Suy ra: $A; O; M$ cùng thuộc đường tròn $\left(Q; \frac{OM}{2}\right)$ (1)

Tương tự, xét $\triangle OBM$ vuông tại B có: BQ là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền OM

Suy ra: $QB = \frac{1}{2}OM$

Do đó: $QB = QO = QM = \frac{1}{2}OM$

Suy ra: $B; O; M$ cùng thuộc đường tròn $\left(Q; \frac{OM}{2}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: 4 điểm $A; B; O; M$ cùng thuộc một đường tròn tâm Q

b) Ta có $OA = OB (= R)$ Suy ra: $\triangle AOB$ cân tại O

Mà OM là tia phân giác của $\widehat{BOA}$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

Suy ra: OM đồng thời là đường cao của $\triangle AOB$ hay $AB \perp OM$ (điều phải chứng minh)

Ta có: $\widehat{DAB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường (O)) hay $DA \perp AB$

Suy ra $DA \parallel OM$ (điều phải chứng minh)

c) Xét (O) ta có MA, MB, IK là các tiếp tuyến của (O)

Suy ra: $IA = IE; KE = KB$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau)

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P_{\triangle MIK} &= MI + MK + IK = MI + MK + (IE + KE) = MI + MK + (IA + KB) \\ &= (MI + IA) + (MK + KB) = MA + MB \end{aligned}$$

Mà $MA = MB$ (tính chất hai tiếp tuyến $MA; MB$ cắt nhau)

Suy ra: $P_{\triangle MIK} = 2MA$

Vì M là điểm cố định, (O) cố định; MA là tiếp tuyến nên A là điểm cố định

Suy ra: MA không đổi hay $2MA$ cũng không đổi

Vậy chu vi tam giác MIK không đổi hay chu vi tam giác MIK không phụ thuộc vào vị trí điểm E

Bài 5: (0,5 điểm)

Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn: $a + b + c = 1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất: $M = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1}$

Lời giải

Ta có $a, b, c \geq 0$ và $a + b + c = 1$ nên $0 \leq a, b, c \leq 1$.

Do đó $a(a-1) \leq 0$ nên $a^2 \leq a$

Vậy $\sqrt{3a+1} = \sqrt{a+2a+1} \geq \sqrt{a^2+2a+1} = \sqrt{(a+1)^2} = a+1$

Tương tự $\sqrt{3b+1} \geq b+1$; $\sqrt{3c+1} \geq c+1$

$M = \sqrt{3a+1} + \sqrt{3b+1} + \sqrt{3c+1} \geq (a+b+c) + 3 = 4$

Dấu "=" xảy ra khi: $a(a-1) = 0$; $b(b-1) = 0$ và $c(c-1) = 0$

Suy ra $(a; b; c) \in \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là 4 khi $(a; b; c) \in \{(1; 0; 0); (0; 1; 0); (0; 0; 1)\}$.

----- HẾT -----

ĐỀ ÔN TẬP KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I

ĐỀ SỐ 8

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1: (2 điểm) Thực hiện phép tính

a) $\left(\sqrt{75} - \frac{3}{2} : \sqrt{3} - \sqrt{48}\right) \cdot \sqrt{\frac{16}{3}}$ b) $\frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{11+4\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } & \left(\sqrt{75} - \frac{3}{2} : \sqrt{3} - \sqrt{48}\right) \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \\ &= \left(5\sqrt{3} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - 4\sqrt{3}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \\ &= \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{3} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{3}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}} \\ &= 4 - 2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{1}{2-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} - \sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} - \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1} - |\sqrt{2}-\sqrt{3}| \\ &= \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} - \sqrt{2} - (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ &= 2 + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \sqrt{11+4\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}} \\ &= \sqrt{11+4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} - \sqrt{5-2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{(\sqrt{3}+2\sqrt{2})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2} \\ &= |\sqrt{3}+2\sqrt{2}| - |\sqrt{3}-\sqrt{2}| \\ &= \sqrt{3}+2\sqrt{2} - (\sqrt{3}-\sqrt{2}) \\ &= \sqrt{3}+2\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2} \\ &= 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

Bài 2: (2 điểm) Cho hai biểu thức $A = \frac{x-4}{x-2\sqrt{x}}$ và $B = \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2}$ với $x > 0; x \neq 4$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức B .

c) Đặt $P = A \cdot B$. Tìm giá trị nguyên lớn nhất của x để $P < 1$.

Lời giải

a) Thay $x = 9$ (thỏa mãn điều kiện xác định) vào A ta có:

$$A = \frac{9-4}{9-2\sqrt{9}} = \frac{5}{9-2.3} = \frac{5}{3}$$

Vậy với $x = 9$ thì $A = \frac{5}{3}$.

b) Với $x > 0; x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{x}{x-4} - \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} \\ &= \frac{x}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} + \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+\sqrt{x}+2+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0; x \neq 4$ thì $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}$.

$$\text{c) Với } x > 0; x \neq 4 \text{ ta có: } P = A.B = \frac{x-4}{x-2\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{Ta có: } P-1 = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - 1 = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}+2-\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-2} = \frac{4}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{Mà } P < 1 \text{ nên } P-1 < 0 \text{ hay } \frac{4}{\sqrt{x}-2} < 0$$

Suy ra $\sqrt{x}-2 < 0$ nên $\sqrt{x} < 2$ hay $x < 4$

Kết hợp điều kiện xác định, ta có: $0 < x < 4$.

Mà x là số nguyên lớn nhất nên $x = 3$.

Vậy $x = 3$ là giá trị nguyên lớn nhất để $P < 1$.

Bài 3: (2 điểm)

Tại một cửa hàng điện máy, tủ lạnh được giảm giá 22% và tivi được giảm giá 25%. Tổng giá niêm yết của hai mặt hàng này là 52 triệu đồng, giá sau khi giảm của hai mặt hàng là 39,81 triệu đồng. Tìm giá niêm yết của tủ lạnh, tivi.

Lời giải

Gọi giá niêm yết của tủ lạnh và ti vi lần lượt là x, y (triệu đồng) ($0 < x, y < 52$)

Vì tổng giá niêm yết của hai mặt hàng này là 52 triệu đồng nên ta có phương trình: $x + y = 52$ (1)

Vì tủ lạnh được giảm giá 22% nên số tiền tủ lạnh được giảm là: $x \cdot 22\% = 0,22x$ (triệu đồng)

Vì ti vi được giảm giá 25% nên số tiền ti vi được giảm là: $y \cdot 25\% = 0,25y$ (triệu đồng)

Tổng số tiền hai mặt hàng được giảm là: $52 - 39,81 = 12,19$ (triệu đồng)

Nên ta có phương trình: $0,22x + 0,25y = 12,19$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ 0,22x + 0,25y = 12,19 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ 0,88x + y = 48,76 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 52 \\ 0,12x = 3,24 \end{cases}$$

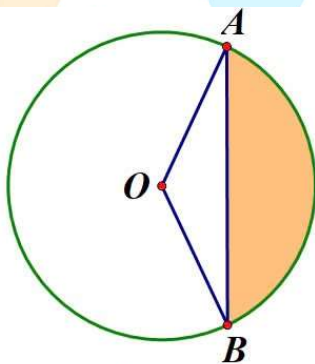
$$\begin{cases} x + y = 52 \\ x = 27 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 27 \\ y = 25 \end{cases} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

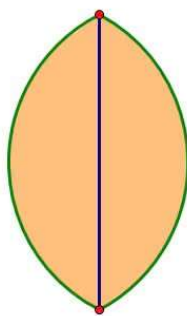
Vậy giá niêm yết của tủ lạnh là 27 triệu đồng, giá niêm yết của ti vi là 25 triệu đồng.

Bài 4: (3,5 điểm)

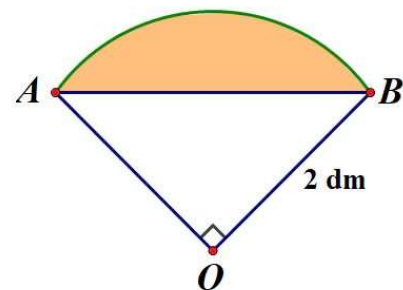
1) Hình viên phân là hình giới hạn bởi một cung tròn và dây cung (tương ứng) của đường tròn (minh họa bởi phần tô đậm ở hình a). Người ta làm một họa tiết trang trí bằng cách ghép hai hình viên phân bằng nhau (hình b), mỗi hình viên phân đó có góc ở tâm tương ứng là 90° và bán kính đường tròn tương ứng là 2 dm (hình c). Tính diện tích của họa tiết trang trí đó (lấy $\pi \approx 3,14$).



Hình a



Hình b



Hình c

2) Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH , M là trung điểm của AC . Lấy E là hình chiếu của A trên BM .

a) Chứng minh A, E, H, B cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $BE \cdot BM = BH \cdot BC$.

c) Đường thẳng đi qua M và vuông góc với BC , cắt tia AE tại K .

Chứng minh $HM^2 = ME \cdot MB$ và tính số đo góc MHK .

Lời giải

1) Vì góc ở tâm $\widehat{AOB} = 90^\circ$ nên $\triangle OAB$ vuông tại O .

Suy ra diện tích tam giác OAB là:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2 \text{ (dm}^2\text{)}$$

Do số $\widehat{AB} = \widehat{AOB} = 90^\circ$ nên diện tích hình quạt tròn OAB tương ứng là:

$$S_2 = \frac{\pi \cdot 2^2 \cdot 90}{360} = \pi \text{ (dm}^2\text{)}$$

Suy ra diện tích hình viên phân là:

$$S_3 = S_2 - S_1 = \pi - 2 \text{ (dm}^2\text{)}$$

Do đó, diện tích của họa tiết trang trí đó là:

$$S = 2S_3 = 2(\pi - 2) \approx 2(3,14 - 2) = 2,28 \text{ (dm}^2\text{)}$$

Vậy diện tích của họa tiết trang trí đó khoảng $2,28 \text{ dm}^2$.

2)

a) Gọi O là trung điểm của AB

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H ($AH \perp BC$), có HO là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền AB

Suy ra $HO = \frac{AB}{2}$ (tính chất đường trung tuyến ứng

với cạnh huyền trong tam giác vuông)

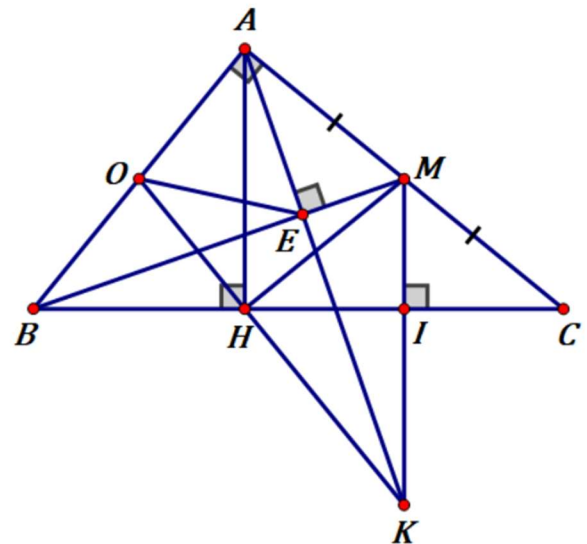
$$\text{Do đó: } OA = OB = HO = \frac{AB}{2}$$

Suy ra: A, B, H cùng thuộc đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$

Chứng minh tương tự, suy ra A, E, B cùng thuộc

đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$

Suy ra 4 điểm A, E, H, B cùng thuộc đường tròn $\left(O; \frac{AB}{2}\right)$



b) Xét $\triangle BAE$ và $\triangle BMA$ có: $\widehat{BEA} = \widehat{BAM} = 90^\circ$ và $\widehat{ABE}$ chung

Suy ra $\triangle BAE \sim \triangle BMA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{BA}{BM} = \frac{BE}{BA} \text{ hay } AB^2 = BE \cdot BM \quad (1)$$

Chứng minh tương tự, ta có: $\triangle BAH \sim \triangle BCA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{BA}{BC} = \frac{BH}{BA} \text{ hay } AB^2 = BH \cdot BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BE \cdot BM = BH \cdot BC$ (điều phải chứng minh).

c) Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , HM là trung tuyến ứng với cạnh huyền AC

$$\text{nên } HM = MA = MC = \frac{1}{2} AC$$

Xét $\triangle MAE$ và $\triangle MBA$ có: $\widehat{MEA} = \widehat{MAB} = 90^\circ$ và $\widehat{AMB}$ chung

Suy ra $\triangle MAE \sim \triangle MBA$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{MA}{MB} = \frac{ME}{MA} \text{ hay } MA^2 = ME \cdot MB$$

Do đó $HM^2 = ME \cdot MB$ (3) (điều phải chứng minh)

Gọi I là giao điểm của MK và HC

Xét $\triangle MIB$ và $\triangle MEK$ có $\widehat{MIB} = \widehat{MEK} = 90^\circ$ và $\widehat{BMK}$ chung

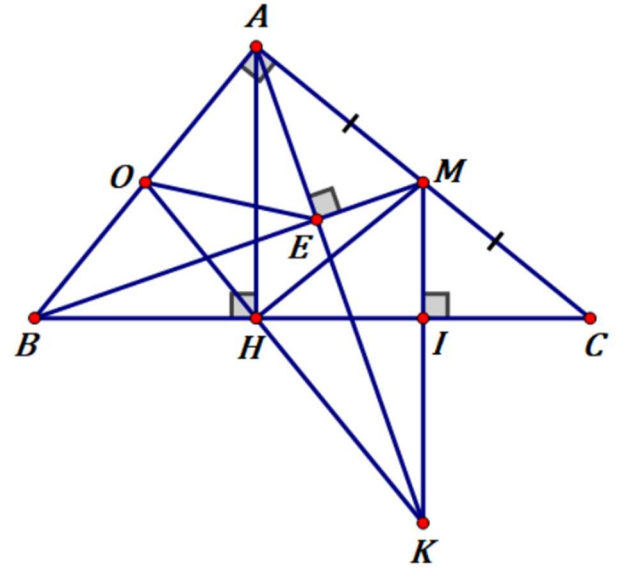
Suy ra $\triangle MIB \sim \triangle MEK$ (g.g)

$$\text{Suy ra } \frac{MI}{ME} = \frac{MB}{MK} \text{ hay } MI \cdot MK = ME \cdot MB \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4) suy ra } MI \cdot MK = HM^2 \text{ hay } \frac{HM}{MI} = \frac{MK}{HM}$$

Xét $\triangle MIH$ và $\triangle MHK$ có $\frac{HM}{MI} = \frac{MK}{HM}$ và $\widehat{HMK}$ chung

Suy ra $\triangle MIH \sim \triangle MHK$ (c.g.c) do đó $\widehat{MIH} = \widehat{MHK} = 90^\circ$



Bài 5: (0,5 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$M = \frac{2x}{2x+y} + \frac{2y}{2y+z} + \frac{2z}{2z+x}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \frac{2x}{2x+y} + \frac{2y}{2y+z} + \frac{2z}{2z+x} \\ &= 1 - \frac{y}{2x+y} + 1 - \frac{z}{2y+z} + 1 - \frac{x}{2z+x} \\ &= 3 - \left(\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \right) \\ &= 3 - \left(\frac{y^2}{2xy+y^2} + \frac{z^2}{2yz+z^2} + \frac{x^2}{2zx+x^2} \right) \end{aligned}$$

+) Với các số a, b bất kỳ và các số $x, y > 0$ ta cần chứng minh $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$.

$$\begin{aligned} \text{Thật vậy, xét } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} - \frac{(a+b)^2}{x+y} &= \frac{(a^2y + b^2x)(x+y) - (a+b)^2xy}{xy(x+y)} \\ &= \frac{a^2xy + b^2xy + (bx)^2 + (ay)^2 - a^2xy - b^2xy - 2bx \cdot ay}{xy(x+y)} = \frac{(bx)^2 - 2bx \cdot ay + (ay)^2}{xy(x+y)} = \frac{(bx - ay)^2}{xy(x+y)} \geq 0 \end{aligned}$$

(vì $x, y > 0$ nên $x+y > 0$, suy ra $xy(x+y) > 0$ và $(bx - ay)^2 \geq 0$ với mọi a, b, x, y).

Dấu bằng khi $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

+) Khi đó với các số a, b, c bất kỳ và các số $x, y, z > 0$ ta có

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}.$$

Áp dụng bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{y^2}{2xy+y^2} + \frac{z^2}{2yz+z^2} + \frac{x^2}{2zx+x^2} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx} = \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2} = 1$$

Do đó $M \leq 3 - 1 = 2$

Dấu "=" xảy ra khi $x = y = z$

Vậy GTLN của M là 2 khi $x = y = z$.

----- HẾT -----