

DÃY CÁC PHÂN SỐ VIẾT THEO QUY LUẬT

Ta thường gặp một số bài toán trong đó các phân số có tử và mẫu được viết theo quy luật.

Việc phát hiện ra quy luật viết của các phân số giúp ta tìm được cách giải nhanh chóng và thuận tiện.

1. Ví dụ minh họa

Ví dụ 1: Hãy tính tổng các phân số sau đây theo cách nhanh nhất:

$$a) A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023}$$

$$b) B = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{97.99}$$

$$c) C = \frac{3}{28} + \frac{3}{70} + \frac{3}{130} + \dots + \frac{3}{550}$$

$$d) D = \frac{4}{1.10} + \frac{4}{10.19} + \frac{4}{19.28} + \dots + \frac{4}{82.91}$$

Phân tích: Các phân số trong các bài tập này có thể đưa về dạng $\frac{a}{n(n+a)}$

Đó là các phân số có tử không đổi và đúng bằng hiệu hai thừa số dưới mẫu.

Và trong một tổng thì thừa số cuối ở mẫu của phân số trước bằng thừa số đầu ở mẫu của phân số sau.

Nếu ta viết mỗi phân số dạng trên thành hiệu của hai phân số sao cho số trừ ở nhóm trước bằng số bị trừ ở nhóm sau thì ta có thể khử liên tiếp để thực hiện tính tổng một cách dễ dàng.

Công thức: $\frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$

Chứng minh:

$$\frac{a}{n(n+a)} = \frac{n+a-n}{n(n+a)} = \frac{n+a}{n(n+a)} - \frac{n}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$$

Ví dụ:

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \quad \frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}; \quad \frac{4}{5.9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9}$$

Lưu ý:

ĐÚNG	SAI
$\frac{2}{3.5} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5}$	$\frac{2}{3.5} = \frac{2}{3} - \frac{2}{5}$
$\frac{4}{5.9} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9}$	$\frac{4}{5.9} = \frac{4}{5} - \frac{4}{9}$

Áp dụng công thức $\frac{a}{n(n+a)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+a}$ ta có thể tính các tổng đã cho như sau:

$$a) A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{2022.2023} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} = 1 - \frac{1}{2023} = \frac{2022}{2023}$$

$$b) B = \frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{97.99} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{99} = 1 - \frac{1}{99} = \frac{98}{99}$$

$$c) C = \frac{3}{28} + \frac{3}{70} + \frac{3}{130} + \dots + \frac{3}{550}$$

Nhận xét:

Ta thấy tử của các phân số bằng 3, trong khi phần mẫu chưa được phân tích về dạng tích. Do đó ta sẽ biến đổi để các mẫu số về dạng tích của hai thừa số có hiệu bằng 3.

Nhận thấy:

$$28 = 4 \cdot 7; \quad 70 = 7 \cdot 10; \quad 130 = 10 \cdot 13; \quad \dots; \quad 550 = 22 \cdot 25$$

Do vậy:

$$\begin{aligned} C &= \frac{3}{28} + \frac{3}{70} + \frac{3}{130} + \dots + \frac{3}{550} \\ &= \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{3}{7 \cdot 10} + \frac{3}{10 \cdot 13} + \dots + \frac{3}{22 \cdot 25} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{22} - \frac{1}{25} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{25} = \frac{21}{100} \end{aligned}$$

$$d) D = \frac{4}{1.10} + \frac{4}{10.19} + \frac{4}{19.28} + \dots + \frac{4}{82.91}$$

Nhận xét: Ta thấy ở mỗi phân số, hiệu của hai thừa số dưới mẫu bằng 9. Trong khi đó các tử lại có giá trị bằng 4.

Do đó ta sẽ biến đổi để cho tử số bằng 9 (đúng bằng hiệu hai thừa số dưới mẫu) như sau:

$$\begin{aligned} C &= \frac{4}{1.10} + \frac{4}{10.19} + \frac{4}{19.28} + \dots + \frac{4}{82.91} \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left[9 \cdot \left(\frac{1}{1.10} + \frac{1}{10.19} + \frac{1}{19.28} + \dots + \frac{1}{82.91} \right) \right] \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{9}{1.10} + \frac{9}{10.19} + \frac{9}{19.28} + \dots + \frac{9}{82.91} \right) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{19} + \frac{1}{19} - \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{82} - \frac{1}{91} \right) \\ &= \frac{4}{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{91} \right) = \frac{4}{9} \cdot \frac{90}{91} = \frac{40}{91} \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Tính nhanh: $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}}$

Phân tích:

Ta nhận thấy kể từ số hạng thứ hai, mỗi phân số bằng phân số đứng ngay trước nó nhân với $\frac{1}{2}$

Do đó nếu nhân 2 vào biểu thức A, ta sẽ tạo ra được một tổng mới có nhiều số hạng giống biểu thức ban đầu

Lời giải:

Ta có:

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \quad (1)$$

$$2.A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$2.A - A = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{10}} \right)$$

$$\Rightarrow A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^9} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{10}}$$

$$\Rightarrow A = 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$$

Ví dụ 3: Tìm tích của 98 số đầu tiên trong dãy

$$1\frac{1}{3}; 1\frac{1}{8}; 1\frac{1}{15}; 1\frac{1}{24}; 1\frac{1}{35}; \dots$$

Lời giải:

Các số hạng trong dãy được viết dưới dạng:

$$\frac{4}{3}; \frac{9}{8}; \frac{16}{15}; \frac{25}{24}; \frac{36}{35}; \dots$$

$$\frac{2^2}{1.3}; \frac{3^2}{2.4}; \frac{4^2}{3.5}; \frac{5^2}{4.6}; \frac{6^2}{5.7}; \dots$$

Theo quy luật trên, số thứ 98 có dạng $\frac{99^2}{98.100}$

Như vậy ta cần tính: $A = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{98^2}{97.99} \cdot \frac{99^2}{98.100}$

Để dễ rút gọn ta viết tử thành $(2.3.4 \dots 98.99) \cdot (2.3.4 \dots 98.99)$

Viết tích các mẫu thành: $(1.2.3 \dots 97.98) \cdot (3.4.5 \dots 99.100)$

Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{98^2}{97.99} \cdot \frac{99^2}{98.100} \\ &= \frac{(2.3.4 \dots 98.99) \cdot (2.3.4 \dots 98.99)}{(1.2.3 \dots 97.98) \cdot (3.4.5 \dots 99.100)} \\ &= \frac{99}{1} \cdot \frac{2}{100} = \frac{99}{50} \end{aligned}$$

Ví dụ 4:

Tính giá trị biểu thức $M = \frac{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}}{\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{95.5} + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}}$

Lời giải:

Đặt $A = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{99}$

$$B = \frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{95.5} + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1}$$

Ghép các phân số ở biểu thức A thành từng cặp để mẫu chung giống mẫu của các phân số tương ứng trong biểu thức B

Sau đó biến đổi biểu thức A bằng cách cộng từng cặp các phân số cách đều hai đầu ta được:

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{95} + \frac{1}{97} + \frac{1}{99} \\ &= \left(1 + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{97}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} + \frac{1}{51}\right) \\ &= \frac{100}{1.99} + \frac{100}{3.97} + \dots + \frac{100}{49.51} \\ &= 100 \cdot \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \dots + \frac{1}{49.51}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \frac{1}{5.95} + \dots + \frac{1}{95.5} + \frac{1}{97.3} + \frac{1}{99.1} \\
 &= \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{99.1} \right) + \left(\frac{1}{3.97} + \frac{1}{97.3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{49.51} + \frac{1}{51.49} \right) \\
 &= \frac{2}{1.99} + \frac{2}{3.97} + \dots + \frac{2}{49.51} \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \dots + \frac{1}{49.51} \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{Do đó: } M = \frac{A}{B} = \frac{100 \cdot \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \dots + \frac{1}{49.51} \right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{1.99} + \frac{1}{3.97} + \dots + \frac{1}{49.51} \right)} = \frac{100}{2} = 50$$

2. Bài tập tự luyện

Bài 1. Tính các tổng sau:

$$a) A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$b) B = \frac{4}{3.7} + \frac{4}{7.11} + \frac{4}{11.15} + \dots + \frac{4}{107.111}$$

$$c) C = \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17} + \dots + \frac{3^2}{197.200}$$

$$d) D = \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \dots + \frac{2}{399}$$

Bài 2. Tính các tổng sau:

$$a) E = \frac{5}{25.27} + \frac{5}{27.29} + \frac{5}{29.31} + \dots + \frac{5}{73.75}$$

$$b) F = \frac{6}{2.9} + \frac{6}{9.16} + \frac{6}{16.23} + \dots + \frac{6}{107.114}$$

$$c) G = \frac{15}{90.93} + \frac{15}{93.96} + \frac{15}{96.99} + \dots + \frac{15}{141.144}$$

$$d) H = \frac{11}{5} + \frac{11}{45} + \frac{11}{117} + \dots + \frac{11}{9797}$$

$$e) M = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{190}$$

Bài 3. Tìm x biết:

$$a) x : \left(\frac{2}{4.5} + \frac{2}{5.6} + \frac{2}{6.7} + \dots + \frac{2}{15.16} \right) = 4$$

$$b) \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \frac{1}{11.16} + \dots + \frac{1}{x.(x+5)} = \frac{26}{131}$$

Bài 4. a) Tính nhanh: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8}$

b) Cho $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$. So sánh B với 1

Bài 5. Tính nhanh:

$$\text{a) } A = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{99}{100}$$

$$\text{b) } B = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$$

$$\text{c) } C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99.101}\right)$$

Bài 6. Tính giá trị biểu thức

$$\text{a) } H = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}}{\frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \cdots + \frac{1}{99}}$$

$$\text{b) } K = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{96} + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{2.100} + \frac{1}{4.98} + \frac{1}{6.96} + \cdots + \frac{1}{96.6} + \frac{1}{98.4} + \frac{1}{100.2}}$$

**** HƯỚNG DẪN ****

Bài 1. Tính các tổng sau:

$$a) A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$b) B = \frac{4}{3.7} + \frac{4}{7.11} + \frac{4}{11.15} + \dots + \frac{4}{107.111}$$

$$c) C = \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17} + \dots + \frac{3^2}{197.200}$$

$$d) D = \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \dots + \frac{2}{399}$$

Giải

$$a) A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{100.101} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{100} - \frac{1}{101} = 1 - \frac{1}{101} = \frac{101}{101} - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$$

$$b) B = \frac{4}{3.7} + \frac{4}{7.11} + \frac{4}{11.15} + \dots + \frac{4}{107.111} = \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{15} + \dots + \frac{1}{107} - \frac{1}{111} = \frac{1}{3} - \frac{1}{111} = \frac{37}{111} - \frac{1}{111} = \frac{36}{111} = \frac{12}{37}$$

$$\begin{aligned} c) C &= \frac{3^2}{8.11} + \frac{3^2}{11.14} + \frac{3^2}{14.17} + \dots + \frac{3^2}{197.200} \\ &= 3 \cdot \left(\frac{3}{8.11} + \frac{3}{11.14} + \frac{3}{14.17} + \dots + \frac{3}{197.200} \right) \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \frac{1}{14} - \frac{1}{17} + \dots + \frac{1}{197} - \frac{1}{200} \right) \\ &= 3 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{200} \right) = 3 \cdot \left(\frac{25}{200} - \frac{1}{200} \right) = 3 \cdot \frac{24}{200} = 3 \cdot \frac{3}{25} = \frac{9}{25} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) D &= \frac{2}{15} + \frac{2}{35} + \frac{2}{63} + \dots + \frac{2}{399} \\ &= \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \frac{2}{7.9} + \dots + \frac{2}{19.21} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{21} = \frac{7}{21} - \frac{1}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

Bài 2. Tính các tổng sau:

$$a) E = \frac{5}{25.27} + \frac{5}{27.29} + \frac{5}{29.31} + \dots + \frac{5}{73.75}$$

$$b) F = \frac{6}{2.9} + \frac{6}{9.16} + \frac{6}{16.23} + \dots + \frac{6}{107.114}$$

$$c) G = \frac{15}{90.93} + \frac{15}{93.96} + \frac{15}{96.99} + \dots + \frac{15}{141.144}$$

$$d) H = \frac{11}{5} + \frac{11}{45} + \frac{11}{117} + \dots + \frac{11}{9797}$$

$$e) M = \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{190}$$

Giải

$a) E = \frac{5}{25.27} + \frac{5}{27.29} + \frac{5}{29.31} + \dots + \frac{5}{73.75}$ $= 5 \cdot \left(\frac{1}{25.27} + \frac{1}{27.29} + \frac{1}{29.31} + \dots + \frac{1}{73.75} \right)$ $= \frac{5}{2} \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{1}{25.27} + \frac{1}{27.29} + \frac{1}{29.31} + \dots + \frac{1}{73.75} \right) \right]$ $= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{2}{25.27} + \frac{2}{27.29} + \frac{2}{29.31} + \dots + \frac{2}{73.75} \right)$ $= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{27} + \frac{1}{27} - \frac{1}{29} + \frac{1}{29} - \frac{1}{31} + \dots + \frac{1}{73} - \frac{1}{75} \right)$ $= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{25} - \frac{1}{75} \right)$ $= \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{75} - \frac{1}{75} \right)$ $= \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{75} = \frac{5}{75} = \frac{1}{15}$ <p>Vậy $E = \frac{1}{15}$</p>	$b) F = \frac{6}{2.9} + \frac{6}{9.16} + \frac{6}{16.23} + \dots + \frac{6}{107.114}$ $= 6 \cdot \left(\frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.16} + \frac{1}{16.23} + \dots + \frac{1}{107.114} \right)$ $= \frac{6}{7} \cdot \left[7 \cdot \left(\frac{1}{2.9} + \frac{1}{9.16} + \frac{1}{16.23} + \dots + \frac{1}{107.114} \right) \right]$ $= \frac{6}{7} \cdot \left(\frac{7}{2.9} + \frac{7}{9.16} + \frac{7}{16.23} + \dots + \frac{7}{107.114} \right)$ $= \frac{6}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} - \frac{1}{23} + \dots + \frac{1}{107} - \frac{1}{114} \right)$ $= \frac{6}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{114} \right)$ $= \frac{6}{7} \cdot \left(\frac{57}{114} - \frac{1}{114} \right)$ $= \frac{6}{7} \cdot \frac{56}{114} = \frac{1.8}{1.19} = \frac{8}{19}$ <p>Vậy $F = \frac{8}{19}$</p>
---	---

$$\begin{aligned}
 \text{c) } G &= \frac{15}{90.93} + \frac{15}{93.96} + \frac{15}{96.99} + \dots + \frac{15}{141.144} \\
 &= 5 \cdot \left(\frac{3}{90.93} + \frac{3}{93.96} + \frac{3}{96.99} + \dots + \frac{3}{141.144} \right) \\
 &= 5 \cdot \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{93} + \frac{1}{93} - \frac{1}{96} + \frac{1}{96} - \frac{1}{99} + \dots + \frac{1}{141} - \frac{1}{144} \right) \\
 &= 5 \cdot \left(\frac{1}{90} - \frac{1}{144} \right) \\
 &= 5 \cdot \left(\frac{8}{720} - \frac{5}{720} \right) \\
 &= 5 \cdot \frac{3}{720} = \frac{15}{720} = \frac{1}{48}
 \end{aligned}$$

Vậy $G = \frac{1}{48}$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } H &= \frac{11}{5} + \frac{11}{45} + \frac{11}{117} + \dots + \frac{11}{9797} \\
 &= 11 \cdot \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \dots + \frac{1}{97.101} \right) \\
 &= \frac{11}{4} \cdot \left[4 \cdot \left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{5.9} + \frac{1}{9.13} + \dots + \frac{1}{97.101} \right) \right] \\
 &= \frac{11}{4} \cdot \left(\frac{4}{1.5} + \frac{4}{5.9} + \frac{4}{9.13} + \dots + \frac{4}{97.101} \right) \\
 &= \frac{11}{4} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{97} - \frac{1}{101} \right) \\
 &= \frac{11}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{11}{4} \cdot \left(\frac{101}{101} - \frac{1}{101} \right) \\
 &= \frac{11}{4} \cdot \frac{100}{101} = \frac{11.25}{1.101} = \frac{275}{101}
 \end{aligned}$$

Vậy $H = \frac{275}{101}$

$$\begin{aligned}
 \text{e) } M &= \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{28} + \dots + \frac{1}{190} \\
 &= \frac{2}{30} + \frac{2}{42} + \frac{2}{56} + \dots + \frac{2}{380} \quad (\text{Nhân cả tử và mẫu của mỗi ps với 2}) \\
 &= \frac{2}{5.6} + \frac{2}{6.7} + \frac{2}{7.8} + \dots + \frac{2}{19.20} \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{7.8} + \dots + \frac{1}{19.20} \right) \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{19} - \frac{1}{20} \right) \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{20} \right) = 2 \cdot \left(\frac{4}{20} - \frac{1}{20} \right) = 2 \cdot \frac{3}{20} = \frac{3}{10}
 \end{aligned}$$

Vậy $M = \frac{3}{10}$

Bài 3. Tìm x biết:

$$a) x : \left(\frac{2}{4.5} + \frac{2}{5.6} + \frac{2}{6.7} + \dots + \frac{2}{15.16} \right) = 4$$

$$b) \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \frac{1}{11.16} + \dots + \frac{1}{x.(x+5)} = \frac{26}{131}$$

Giải

$a) x : \left(\frac{2}{4.5} + \frac{2}{5.6} + \frac{2}{6.7} + \dots + \frac{2}{15.16} \right) = 4$ $x : \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4.5} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{15.16} \right) \right] = 4$ $x : \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{15} - \frac{1}{16} \right) \right] = 4$ $x : \left[2 \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{16} \right) \right] = 4$ $x : \left[2 \cdot \left(\frac{4}{16} - \frac{1}{16} \right) \right] = 4$ $x : \left(2 \cdot \frac{3}{16} \right) = 4$ $x : \frac{3}{8} = 4$ $x = 4 \cdot \frac{3}{8}$ $x = \frac{3}{2}$ <p>Vậy $x = \frac{3}{2}$</p>	$b) \frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \frac{1}{11.16} + \dots + \frac{1}{x.(x+5)} = \frac{26}{131}$ $\frac{1}{5} \cdot \left[5 \cdot \left(\frac{1}{1.6} + \frac{1}{6.11} + \frac{1}{11.16} + \dots + \frac{1}{x.(x+5)} \right) \right] = \frac{26}{131}$ $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{1.6} + \frac{5}{6.11} + \frac{5}{11.16} + \dots + \frac{5}{x.(x+5)} \right) = \frac{26}{131}$ $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} \right) = \frac{26}{131}$ $\frac{1 - \frac{1}{x+5}}{5} = \frac{26}{131} : \frac{1}{5}$ $\frac{1 - \frac{1}{x+5}}{5} = \frac{130}{131}$ $\frac{1}{x+5} = 1 - \frac{130}{131}$ $\frac{1}{x+5} = \frac{131 - 130}{131}$ $\frac{1}{x+5} = \frac{1}{131}$ $x+5 = 131$ $x = 126$ <p>Vậy $x = 126$</p>
--	---

Bài 4. a) Tính nhanh: $A = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8}$

b) Cho $B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}}$. So sánh B với 1

Giải

$$\begin{aligned} a) \quad A &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8} \\ \Rightarrow 3A &= 3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8} \right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} \\ \Rightarrow 3A - A &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^8} \right) \\ \Rightarrow 2A &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^7} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} - \dots - \frac{1}{3^8} \\ \Rightarrow 2A &= 1 - \frac{1}{3^8} = 1 - \frac{1}{6561} = \frac{6560}{6561} \\ \Rightarrow A &= \frac{6560}{6561} : 2 = \frac{3280}{6561} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \\ \Rightarrow 2B &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} \\ \Rightarrow 2B - B &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2019}} \right) \\ \Rightarrow B &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2018}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^{2019}} \\ \Rightarrow B &= 1 - \frac{1}{2^{2019}} < 1 \end{aligned}$$

Bài 5. Tính nhanh:

a) $A = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{99}{100}$

b) $B = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{20}\right)$

c) $C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99.101}\right)$

Giải

a) $A = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} \cdots \frac{99}{100} = \frac{1.3}{2.2} \cdot \frac{2.4}{3.3} \cdot \frac{3.5}{4.4} \cdots \frac{9.11}{10.10} = \frac{(1.2.3.4 \cdots 9) \cdot (3.4.5 \cdots 11)}{(2.3.4 \cdots 10) \cdot (2.3.4 \cdots 10)} = \frac{1.11}{10.2} = \frac{11}{20}$

b) $B = \left(1 - \frac{1}{5}\right) \left(1 - \frac{1}{6}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{20}\right) = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdots \frac{19}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

c) $C = \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{99.101}\right) = \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \cdots \frac{100.100}{99.101}$
 $= \frac{(2.3.4 \cdots 100) \cdot (2.3.4 \cdots 100)}{(1.2.3.4 \cdots 99) \cdot (3.4.5 \cdots 101)} = \frac{100.2}{101} = \frac{200}{101}$

Bài 6. Tính giá trị biểu thức

a) $H = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}}{\frac{99}{1} + \frac{98}{2} + \frac{97}{3} + \cdots + \frac{1}{99}}$

b) $K = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{96} + \frac{1}{98} + \frac{1}{100}}{\frac{1}{2.100} + \frac{1}{4.98} + \frac{1}{6.96} + \cdots + \frac{1}{96.6} + \frac{1}{98.4} + \frac{1}{100.2}}$

Giải

a) Ta có:

Mẫu số $= \left(\frac{98}{2} + 1\right) + \left(\frac{97}{3} + 1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{99} + 1\right) + 1 = \frac{100}{2} + \frac{100}{3} + \cdots + \frac{100}{99} + \frac{100}{100} = 100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}\right)$

$\Rightarrow H = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}}{100 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{100}\right)} = \frac{1}{100}$

b) Ta có:

$$Tứ\ số = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{98}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{96}\right) + \dots + \left(\frac{1}{50} + \frac{1}{52}\right)$$

$$= \frac{102}{2.100} + \frac{102}{4.98} + \frac{102}{6.96} + \dots + \frac{102}{50.52}$$

$$= 102 \cdot \left(\frac{1}{2.100} + \frac{1}{4.98} + \frac{1}{6.96} + \dots + \frac{1}{50.52} \right)$$

$$Mẫu\ số = \frac{1}{2.100} + \frac{1}{4.98} + \frac{1}{6.96} + \dots + \frac{1}{96.6} + \frac{1}{98.4} + \frac{1}{100.2}$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{1}{2.100} + \frac{1}{4.98} + \frac{1}{6.96} + \dots + \frac{1}{50.52} \right)$$

$$Do\ đó: K = \frac{102 \cdot \left(\frac{1}{2.100} + \frac{1}{4.98} + \frac{1}{6.96} + \dots + \frac{1}{50.52} \right)}{2 \cdot \left(\frac{1}{2.100} + \frac{1}{4.98} + \frac{1}{6.96} + \dots + \frac{1}{50.52} \right)} = \frac{102}{2} = 51$$