

CHUYÊN ĐỀ: TỈ LỆ THỨC – TÍNH CHẤT DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

I. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Tỉ lệ thức

a) Định nghĩa

Tỉ lệ thức là đẳng thức giữa hai tỉ số: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ với a, b, c, d là các số hữu tỉ

Cách viết khác: $a : b = c : d$

Ví dụ: $\frac{1,2}{2,4} = \frac{1}{2}$; $10 : 15 = \frac{2}{7} : \frac{3}{7}$;

b) Tính chất của tỉ lệ thức

Tính chất 1:

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ thì } ad = bc$$

Tính chất 2:

Nếu $ad = bc$ và $a, b, c, d \neq 0$ thì:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

c) Tính chất của dãy tỉ số bằng nhau

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}$$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

Mở rộng:

- Từ dãy tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta suy ra:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e}{b+d+f} = \frac{a-c+e}{b-d+f}$$

(Giả thiết các tỉ số đều có nghĩa)

- Khi có dãy tỉ số $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ ta nói các số a, c, e tỉ lệ với b, d, f

Ta cũng viết: $a : c : e = b : d : f$

Chú ý: Trong trình bày lời giải, học sinh thường nhầm lẫn giữa dấu “=” với dấu “ \Rightarrow ”.

Ví dụ:

ĐÚNG	SAI
$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$	$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} = \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$
$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} \Rightarrow \frac{x}{5.3} = \frac{y}{7.3}$	$\frac{x}{5} = \frac{y}{7} = \frac{x}{5.3} = \frac{y}{7.3}$

II. CÁC DẠNG BÀI TẬP

A. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC

Bài 1. Chứng minh rằng : Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \neq 1$ thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ với $a, b, c, d \neq 0$

Giải

Cách 1:

$$\text{Với } a, b, c, d \neq 0 \text{ ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{b}{d} \quad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1 \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{c-d} = \frac{b}{d} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{a+b}{c+d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Cách 2: Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; c = dk$

Ta có:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{b(k+1)}{b(k-1)} = \frac{k+1}{k-1} \quad (1)$$

$$\frac{c+d}{c-d} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{d(k+1)}{d(k-1)} = \frac{k+1}{k-1} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$$

Bài 2: Nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì:

a) $\frac{2a+3b}{2a-3b} = \frac{2c+3d}{2c-3d}$

b) $\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2} = \frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2}$

Giải

a) - Nhận xét điều phải chứng minh?

- Làm như thế nào để xuất hiện 2a, 2c, 3b, 3d?

Cách 1: Từ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{2a}{2c} = \frac{3b}{3d} = \frac{2a+3b}{2c+3d} = \frac{2a-3b}{2c-3d} \Rightarrow \frac{2a+3b}{2c+3d} = \frac{2a-3b}{2c-3d} \Rightarrow \frac{2a+3b}{2a-3b} = \frac{2c+3d}{2c-3d} \quad (\text{đpcm})$$

Cách 2: Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; c = dk$

Ta có:

$$\frac{2a+3b}{2a-3b} = \frac{2.bk+3b}{2.bk-3b} = \frac{b.(2k+3)}{b.(2k-3)} = \frac{2k+3}{2k-3} \quad (1)$$

$$\frac{2c+3d}{2c-3d} = \frac{2.dk+3d}{2.dk-3d} = \frac{d.(2k+3)}{d.(2k-3)} = \frac{2k+3}{2k-3} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{2a+3b}{2a-3b} = \frac{2c+3d}{2c-3d}$

b)

Cách 1:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{c^2} = \frac{b^2}{d^2} = \frac{ab}{cd} \Rightarrow \frac{7a^2}{7c^2} = \frac{8b^2}{8d^2} = \frac{3ab}{3cd} = \frac{11a^2}{11c^2}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{7a^2}{7c^2} = \frac{8b^2}{8d^2} = \frac{3ab}{3cd} = \frac{11a^2}{11c^2} = \frac{7a^2+3ab}{7c^2+3cd} = \frac{11a^2-8b^2}{11c^2-8d^2} \Rightarrow \frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2} = \frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2} \quad (\text{đpcm})$$

Cách 2: Đặt $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \Rightarrow a = bk; c = dk$

Ta có:

$$\frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2} = \frac{7.(bk)^2+3.(bk).b}{11.(bk)^2-8b^2} = \frac{7.b^2.k^2+3.b^2.k}{11.b^2.k^2-8b^2} = \frac{b^2.(7k^2+3k)}{b^2.(11k^2-8)} = \frac{7k^2+3k}{11k^2-8} \quad (1)$$

$$\frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2} = \frac{7.(dk)^2+3.(dk).d}{11.(dk)^2-8d^2} = \frac{7.d^2.k^2+3.d^2.k}{11.d^2.k^2-8d^2} = \frac{d^2.(7k^2+3k)}{d^2.(11k^2-8)} = \frac{7k^2+3k}{11k^2-8} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{7a^2+3ab}{11a^2-8b^2} = \frac{7c^2+3cd}{11c^2-8d^2} \quad (\text{đpcm})$

Bài 3: Chứng minh rằng: Nếu $a^2 = bc$ thì $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$. Điều ngược lại có đúng hay không?

Giải

+ Từ $a^2 = bc \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{a}$. Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{a+b}{c+a} = \frac{a-b}{c-a} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a}$$

+ Điều ngược lại cũng đúng, thật vậy:

$$\text{Từ } \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+a}{c-a} \Rightarrow (a+b)(c-a) = (a-b)(c+a) \Rightarrow ac - a^2 - bc - ab = ac + a^2 - bc - ab \Rightarrow 2bc = a^2 \Rightarrow a^2 = bc$$

Bài 4: Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$

Giải:

$$\text{Từ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} \text{ (đpcm)}$$

Bài 5: Chứng minh rằng nếu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ thì $\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4}$

Giải:

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a-b}{c-d} \Rightarrow \frac{a^4}{c^4} = \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 \quad (1)$$

$$\text{Từ } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \Rightarrow \frac{a^4}{c^4} = \frac{b^4}{d^4} = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \left(\frac{a-b}{c-d}\right)^4 = \frac{a^4 + b^4}{c^4 + d^4} \text{ (đpcm)}$$

Bài 6: Chứng minh rằng nếu $a + c = 2b$ và $2bd = c(b + d)$ (với $b, d \neq 0$) thì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Giải:

$$\text{Từ } a + c = 2b \Rightarrow (a + c)d = 2bd; \quad 2bd = c(b + d)$$

Vì $(a + c)d = 2bd$ mà $2bd = c(b + d)$ (theo đề bài)

$$\Rightarrow c(b + d) = (a + c)d \Rightarrow cb + cd = ad + cd \Rightarrow cb = ad \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ (đpcm)}$$

Bài 7: Cho a, b, c, d là 4 số khác nhau, khác không thỏa mãn điều kiện:

$$b^2 = ac; c^2 = bd \text{ và } b^3 + c^3 + d^3 \neq 0. \text{ Chứng minh rằng } \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$$

Giải:

$$* \text{ Ta có } b^2 = ac \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \quad (1)$$

$$c^2 = bd \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{b^3}{c^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} \quad (3)$$

$$* \text{ Mặt khác: } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^3}{b^3} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{d} \quad (4)$$

$$\text{Từ (3) và (4)} \Rightarrow \frac{a^3 + b^3 + c^3}{b^3 + c^3 + d^3} = \frac{a}{d}$$

Bài 8: Chứng minh rằng nếu $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ trong đó $a; b; c$ là các số khác nhau

$$\text{và khác 0 thì: } \frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)} \quad (*)$$

Giải:

Vì $a; b; c \neq 0$ nên từ $a(y+z) = b(z+x) = c(x+y)$ cùng chia các số cho abc ta có:

$$\frac{a(y+z)}{abc} = \frac{b(z+x)}{abc} = \frac{c(x+y)}{abc} \Rightarrow \frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab}$$

Nhìn vào (*) ta thấy mẫu thức cần có $ab - ac$. Ta sẽ biến đổi như thế nào?

$$\text{Từ } \frac{y+z}{bc} = \frac{z+x}{ac} = \frac{x+y}{ab} \Rightarrow \frac{y+z}{bc} = \frac{(x+y)-(z+x)}{ab-ac} = \frac{(y+z)-(x+y)}{bc-ab} = \frac{(z+x)-(y+z)}{ac-bc}$$

$$\Rightarrow \frac{y-z}{a(b-c)} = \frac{z-x}{b(c-a)} = \frac{x-y}{c(a-b)} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 9: Cho $\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c}$ (1). Chứng minh rằng $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Giải:

Gợi ý: Nhân thêm cả tử và mẫu của (1) với a hoặc b ; c

Từ (1) ta có:

$$\frac{bz - cy}{a} = \frac{cx - az}{b} = \frac{ay - bx}{c} = \frac{abz - acy}{a^2} = \frac{bcx - baz}{b^2} = \frac{cay - cbx}{c^2} = \frac{abz - acy + bcx - baz + cay - cbx}{a^2 + b^2 + c^2} = 0$$

Do đó: $bz - cy = 0 \Rightarrow bz = cy \Rightarrow \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (2)

$$ay - bx = 0 \Rightarrow ay = bx \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$$
 (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ (đpcm)

Bài 10. Biết $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = 1$ và $\frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 1$. Chứng minh rằng $abc + a'b'c' = 0$

Giải:

* Từ $\frac{a}{a'} + \frac{b}{b'} = 1 \Rightarrow ab + a'b' = a'b$ (1)

Nhân cả hai vế của (1) với c ta được: $abc + a'b'c = a'bc$ (3)

* Từ $\frac{b}{b'} + \frac{c}{c'} = 1 \Rightarrow bc + b'c' = b'c$ (2)

Nhân cả hai vế của (2) với a' ta được: $a'bc + a'b'c' = a'b'c$ (4)

Từ (3) và (4) cộng vế với vế ta được:

$$abc + a'b'c + a'bc + a'b'c' = a'bc + a'b'c \Rightarrow abc + a'b'c' = 0 \text{ (đpcm)}$$

B. DẠNG TOÁN TÌM x, y, z

Bài 11. Tìm x, y, z biết: $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$ và $2x + 3y - z = 186$

Giải:

Ta thấy giả thiết cho $2x + 3y - z = 186$

Để sử dụng hiệu quả giả thiết trên, từ dãy tỉ số $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$ ta phải làm xuất hiện $2x; 3y$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28} = \frac{2x}{30} = \frac{3y}{60} = \frac{z}{28} = \frac{2x+3y-z}{30+60-28} = \frac{186}{62} = 3$

$x = 3.15 = 45; y = 3.20 = 60; z = 3.28 = 84$

Vậy $x = 45; y = 60; z = 84$

Bài 12. Tìm x, y, z cho: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $2x + 3y - z = 372$

Giải:

Nhận xét bài này và bài trên có gì giống nhau?

Ta có: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{20}$ (chia cả hai vế cho 5)

$\frac{y}{5} = \frac{z}{7} \Rightarrow \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$ (chia cả hai vế cho 4)

Do đó $\frac{x}{15} = \frac{y}{20} = \frac{z}{28}$

Tương tự học sinh tự giải tiếp, ta được: $x = 90; y = 120; z = 168$

Bài 13. Tìm x, y, z biết $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $\frac{y}{5} = \frac{z}{7}$ và $x + y + z = 98$

Giải:

Hãy nêu phương pháp giải (Tìm BCNN (3,5) = ?)

Học sinh nên tự giải (tương tự bài nào em gặp)

Đáp số: $x = 20; y = 30; z = 42$

Bài 14. Tìm x, y, z biết $2x = 3y = 5z$ và $x + y - z = 95$ (*)

Giải

Cách 1: Từ $2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$; từ $3y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{3}$

Sau đó đưa về cách giải giống các bài trên (Cách này dài dòng)

Cách 2:

+ Nếu có tỉ lệ của x, y, z tương ứng ta sẽ giải được (*)

+ Làm thế nào để từ $2x = 3y = 5z$ cho ta (*)

+ Từ $2x = 3y = 5z$ cùng chia cho BCNN $(2, 3, 5) = 30$

Ta có: $2x = 3y = 5z \Rightarrow \frac{2x}{30} = \frac{3y}{30} = \frac{5z}{30} \Rightarrow \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{6} = \frac{x+y-z}{15+10-6} = \frac{95}{19} = 5$

$\Rightarrow x = 75, y = 50, z = 30$

Bài 15. Tìm x, y, z biết: $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$ và $x - y = 15$

Giải:

Từ $\frac{1}{2}x = \frac{2}{3}y = \frac{3}{4}z$ cùng chia các vế cho BCNN $(1, 2, 3) = 6$ ta được: $\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{12} = \frac{y}{9} = \frac{z}{8} = \frac{x-y}{12-9} = \frac{15}{3} = 5$

$\Rightarrow x = 60; y = 45; z = 40$

Bài 16. Tìm x, y, z biết:

a) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ (1) và $2x + 3y - z = 50$ b) $\frac{2x}{3} = \frac{2y}{4} = \frac{4z}{5}$ (2) và $x + y + z = 49$

Giải:

a. Với giả thiết phần a ta có cách giải tương tự bài 11.

Từ (1) ta có:

$$\frac{2(x-1)}{4} = \frac{3(y-2)}{9} = \frac{z-3}{4} = \frac{2x-2+3y-6-z+3}{4+9-4} = \frac{(2x+3y-z)+-2-6+3}{9} = \frac{50-5}{9} = 5$$

Do đó $\frac{x-1}{2} = 5 \Rightarrow x = 11$; $\frac{y-2}{3} = 5 \Rightarrow y = 17$; $\frac{z-3}{4} = 5 \Rightarrow z = 23$

b. Nêu cách giải phần b? (Tương tự bài 15)

Từ (2) chia các vế cho BCNN $(2, 3, 4) = 12$ ta được: $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{4} = \frac{4z}{5} \Rightarrow \frac{2x}{3.12} = \frac{3y}{4.12} = \frac{4z}{5.12} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{18+16+15} = \frac{49}{49} = 1 \Rightarrow x = 18; y = 16; z = 15$

Bài 17. Tìm $x; y; z$ biết rằng:

a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ và $xy = 54$

b) $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$ và $x^2 + y^2 = 4$ ($x, y > 0$)

Giải:

a) Làm như thế nào để xuất hiện xy để tận dụng được giả thiết?

Từ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \cdot \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{xy}{6} = \frac{54}{6} = 9 \Rightarrow x^2 = 4 \cdot 9 = (2 \cdot 3)^2 = (6)^2 = (-6)^2 \Rightarrow x = \pm 6$

Với $x = 6 \Rightarrow y = \frac{54}{6} = 9$

Với $x = -6 \Rightarrow y = \frac{54}{-6} = -9$

b) $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} \Rightarrow \left(\frac{x}{5}\right)^2 = \left(\frac{y}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{9} = \frac{x^2 - y^2}{25 - 9} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{9} = \frac{x^2 - y^2}{25 - 9} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$

Từ $\frac{x^2}{25} = \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{5}{2}$; $\frac{y^2}{9} = \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}$

Bài 18. Tìm các số a_1, a_2, \dots, a_9 biết: $\frac{a_1 - 1}{9} = \frac{a_2 - 2}{8} = \dots = \frac{a_9 - 9}{1}$ và $a_1 + a_2 + \dots + a_9 = 90$

Giải :

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{a_1 - 1}{9} = \frac{a_2 - 2}{8} = \dots = \frac{a_9 - 9}{1} = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_9) - (1 + 2 + \dots + 9)}{9 + 8 + \dots + 1} = \frac{90 - 45}{45} = 1$$

Từ đó dễ dàng suy ra $a_1; a_2; \dots$

Bài 19. Tìm $x; y; z$ biết

$$a) \frac{x+y+2}{z} = \frac{y+z-3}{x} = \frac{z+x+1}{y} = x+y+z$$

$$b) \frac{x}{y+z-5} = \frac{y}{x+z+3} = \frac{z}{x+y+2} = \frac{1}{2}(x+y+z)$$

Giải :

$$a) \text{Ta có: } \frac{x+y+2}{z} = \frac{y+z-3}{x} = \frac{z+x+1}{y} = x+y+z$$

Xét hai trường hợp:

$$TH1: x+y+z=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y+2}{z} = 0 \\ \frac{y+z-3}{x} = 0 \\ \frac{z+x+1}{y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=0 \\ y+z-3=0 \\ z+x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ y+z=3 \\ x+z=-1 \end{cases}$$

$$\text{Vì } x+y+z=0 \Rightarrow z=-(x+y)=-(-2)=2$$

$$\text{Do đó } y=3-z=3-2=1$$

$$x=-1-z=-1-2=-3$$

$$\text{Vậy } x=-3; y=1; z=2$$

$$TH2: x+y+z \neq 0$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$x+y+z = \frac{x+y+2}{z} = \frac{y+z-3}{x} = \frac{z+x+1}{y} = \frac{x+y+2+y+z-3+z+x+1}{z+x+y} = \frac{2x+2y+2z}{x+y+z} = 2$$

$$\Rightarrow x+y+z=2 \quad (1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y+2}{z} = 2 \\ \frac{y+z-3}{x} = 2 \\ \frac{z+x+1}{y} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+2=2z \\ y+z-3=2x \\ z+x+1=2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=2z-2 & (2) \\ y+z=2x+3 & (3) \\ z+x=2y-1 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow x+y=2-z \Rightarrow 2z-2=2-z \Rightarrow 3z=4 \Rightarrow z=\frac{4}{3}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow y+z=2-x \Rightarrow 2-x=2x+3 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$$

$$\text{Do đó } y=2-(x+z)=2-\left(\frac{4}{3}+\frac{-1}{3}\right)=1$$

$$\text{Vậy } x=-\frac{1}{3}; y=1; z=\frac{4}{3} \text{ hoặc } x=-1; y=1; z=2$$

b) Học sinh làm tương tự câu a

$$\text{Đáp số: } x=0; y=0; z=0 \text{ hoặc } x=-\frac{4}{3}; y=\frac{4}{3}; z=1$$

Bài 20. Tìm x biết rằng: $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$

Giải

Từ $\frac{1+2y}{18} = \frac{1+4y}{24} = \frac{1+6y}{6x}$ áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{1+4y}{24} = \frac{1+2y+1+6y}{18+6x} = \frac{2+8y}{18+6x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4y}{24} = \frac{2+8y}{18+6x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4y}{2+8y} = \frac{24}{18+6x}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4y}{2(1+4y)} = \frac{24}{18+6x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{24}{18+6x}$$

$$\Rightarrow 18+6x = 24 \cdot 2$$

$$\Rightarrow x = 5$$

Bài 21. Tìm x, y, z biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$ và $xyz = 810$

Giải

Cách 1:

$$\text{Từ } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \cdot \frac{y}{3} \cdot \frac{z}{5} = \frac{xyz}{30} \Rightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{810}{10} \Rightarrow \frac{x^3}{8} = 27$$

$$\Rightarrow x^3 = 8 \cdot 27 = 2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$$

$$\Rightarrow x = 6$$

$$\text{Từ } x = 6 \Rightarrow y = 9; z = 15$$

Cách 2:

$$\text{Đặt } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 2k; y = 3k; z = 5k$$

$$\text{Ta có: } xyz = 810 \Rightarrow 2k \cdot 3k \cdot 5k = 810 \Rightarrow 30k^3 = 810 \Rightarrow k^3 = 27 \Rightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow x = 2k = 2 \cdot 3 = 6; y = 3k = 3 \cdot 3 = 9; z = 5k = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\text{Vậy } x = 6; y = 9; z = 15$$

Bài 22. Tìm x, y, z biết rằng: $\frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5}$ và $xy + yz + zx = 944$

Giải

$$\text{Đặt } \frac{x}{2} = \frac{y}{7} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 2k; y = 7k; z = 5k$$

Thay $x = 2k; y = 7k; z = 5k$ vào $xy + yz + zx = 944$ ta có:

$$2k \cdot 7k + 7k \cdot 5k + 5k \cdot 2k = 944$$

$$14k^2 + 35k^2 + 10k^2 = 944$$

$$59k^2 = 944$$

$$\Rightarrow k^2 = 944 : 59 = 16$$

$$\Rightarrow k = 4 \text{ hoặc } k = -4$$

$$\text{Với } k = 4 \text{ ta có: } x = 2 \cdot 4 = 8; y = 7 \cdot 4 = 28; z = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\text{Với } k = -4 \text{ ta có: } x = 2 \cdot (-4) = -8; y = 7 \cdot (-4) = -28; z = 5 \cdot (-4) = -20$$

$$\text{Vậy } x = 8; y = 28; z = 20 \text{ hoặc } x = -8; y = -28; z = -20$$

Chú ý: Nếu đề bài cho các điều kiện về $xy; xz; yz; x^2, x^3, xyz, \dots$ (như bài 21, 22) thì có thể sử dụng cách đặt $k \rightarrow$ tìm $x; y; z$.

Bài 23. Tìm các số $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ biết rằng: $\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n}{a_n}$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = c$

$$(a_1 \neq 0, \dots, a_n \neq 0; a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0)$$

Giải:

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \dots = \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{c}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$\text{Do đó } x_1 = \frac{c \cdot a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}; x_2 = \frac{c \cdot a_2}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}; \dots; x_n = \frac{c \cdot a_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n}$$

$$\text{Tổng quát, ta có: } x_i = \frac{c \cdot a_i}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \text{ trong đó: } i = 1, 2, \dots, n$$

Bài 24. Tìm các số $x; y; z \in \mathbb{Q}$ biết rằng: $(x+y):(5-z):(y+z):(9+y) = 3:1:2:5$

Giải:

$$\text{Từ } (x+y):(5-z):(y+z):(9+y) = 3:1:2:5 \Rightarrow \frac{x+y}{3} = \frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x+y}{3} = \frac{5-z}{1} = \frac{y+z}{2} = \frac{9+y}{5} = \frac{(5-z)+(y+z)-(9+y)}{1+2-5} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=2.3 \\ 5-z=2.1 \\ 9+y=2.5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6-y \\ y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$$

Vậy: $x=5; y=1; z=3$.

Bài 25. Tổng các lũy thừa bậc ba của 3 số là -1009. Biết tỷ số giữa số thứ 1 và số thứ 2 là $\frac{2}{3}$; giữa số thứ 1 và số thứ 3 là $\frac{4}{9}$. Tìm 3 số đó?

Giải:

Gọi các số cần tìm là x, y, z . Theo bài ra ta có:

$$x^3 + y^3 + z^3 = -1009$$

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{6}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{z}{9}$$

Do đó $\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9}$

Đặt $\frac{x}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z}{9} = k \Rightarrow x = 4k, y = 6k, z = 9k$

$$\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 = (4k)^3 + (6k)^3 + (9k)^3 = 64k^3 + 216k^3 + 729k^3 = 1009k^3 = -1009$$

$$\Rightarrow k^3 = -1 \Rightarrow k = -1$$

$$\Rightarrow x = -4 = -4$$

$$\Rightarrow y = -6 = -6$$

$$\Rightarrow z = -9 = -9$$

Vậy $x = -4; y = -6; z = -9$

C. TOÁN ĐÓ

Bài 26. Có 3 đội A; B; C có tất cả 130 công nhân đi trồng cây. Biết rằng số cây mỗi công nhân đội A; B; C trồng được theo thứ tự là 2; 3; 4 cây và số cây mỗi đội trồng được như nhau.

Hỏi mỗi đội có bao nhiêu công nhân?

Giải:

Gọi số công nhân đội A; B; C lần lượt là: $x; y; z$ (Đơn vị: công nhân. Điều kiện: $x; y; z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $2x = 3y = 4z$ và $x + y + z = 130$

$$\text{Từ } 2x = 3y = 4z \Rightarrow \frac{2x}{12} = \frac{3y}{12} = \frac{4z}{12} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{6+4+3} = \frac{130}{13} = 10$

$$\Rightarrow x = 60; y = 10; z = 30$$

Vậy số công nhân đội A; B; C lần lượt là 60; 40; 30 công nhân.

Bài 27. Trường có 3 lớp 7, biết $\frac{2}{3}$ có số học sinh lớp 7A bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh 7B và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh 7C. Lớp 7C có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của 2 lớp kia là 57 bạn. Tính số học sinh mỗi lớp?

Giải:

Gọi số học sinh 7A; 7B; 7C lần lượt là $x; y; z$ (Đơn vị: học sinh. Điều kiện: $x; y; z \in \mathbb{N}^*$)

Theo bài ra ta có: $\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z$ (1) và $x + y + z = 57$

Từ (1) cùng chia các vế cho BCNN (3, 4, 5) = 12 ta được: $\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15}$

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau: $\frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{x+y+z}{18+16+15} = \frac{57}{49} = 3$

$$\Rightarrow x = 54; y = 18; z = 45$$

Vậy số học sinh các lớp 7A; 7B; 7C lần lượt là: 54; 18; 45 học sinh

Bài 28. Tìm ba số nguyên dương biết BCNN của chúng là 3150 và tỉ số số thứ nhất với số thứ 2 là $\frac{5}{9}$, tỉ số của số thứ nhất với số thứ ba là $\frac{10}{7}$.

Giải

Gọi ba số nguyên dương cần tìm lần lượt là $x; y; z$

Theo bài ra ta có: BCNN (x, y, z) = 3150 ; $\frac{x}{y} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ (1) ; $\frac{x}{z} = \frac{10}{7} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{z}{7}$ (2)

$$\text{Từ (1) (2)} \Rightarrow \frac{x}{10} = \frac{y}{18} = \frac{z}{7}$$

Đặt $\frac{x}{10} = \frac{y}{18} = \frac{z}{7} = k$ ta có: $x = 10k = 2.5.k$; $y = 18.k = 3^2.2.k$; $z = 7.k$

BCNN $(x; y; z) = 3150 = 2.3^2.5.7 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow x = 50; y = 90; z = 35$

Vậy 3 số nguyên dương lần lượt là $x = 50; y = 90; z = 35$.

D. TÍNH CHẤT CỦA TỈ LỆ THỨC ÁP DỤNG TRONG BẤT ĐẲNG THỨC

TÍNH CHẤT 1: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$ ($\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là các số hữu tỉ; $b > 0; d > 0$)

Chứng minh:

Với $b > 0; d > 0$ ta có:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \Rightarrow ad < bc$$

$$ad < bc \Rightarrow \frac{ad}{bd} < \frac{bc}{bd} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

Vậy $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$

TÍNH CHẤT 2: Nếu $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ ($\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$ là các số hữu tỉ; $b > 0; d > 0$)

Chứng minh:

Với $b > 0; d > 0$ ta có: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow ad < bc$ (tính chất 1) (1)

Từ (1) cùng cộng cả 2 vế với ab ta được:

$$ad + ab < bc + ab \Rightarrow a(b+d) < b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} \quad (2)$$

Từ (1) cùng cộng cả 2 vế với dc ta được:

$$ad + dc < bc + dc \Rightarrow d(a+c) < c(b+d) \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d} \quad (3)$$

+ Từ (2) và (3) $\Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ (đpcm)

TÍNH CHẤT 3: Với $a; b; c$ là các số dương ta có:

Nếu $\frac{a}{b} < 1$ thì $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c}$

Nếu $\frac{a}{b} > 1$ thì $\frac{a}{b} > \frac{a+c}{b+c}$

Bài 29. Cho $a; b; c; d > 0$. Chứng minh rằng $1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$

Giải:

Vì $a; b; c; d > 0$ nên theo tính chất 3 ta có:

$$\frac{a}{a+b+c} < 1 \Rightarrow \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (1)$$

Mặt khác: $\frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} \quad (2)$

Nên từ (1) và (2) $\Rightarrow \frac{a}{a+b+c+d} < \frac{a}{a+b+c} < \frac{a+d}{a+b+c+d} \quad (3)$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{b}{a+b+c+d} < \frac{b}{b+c+d} < \frac{b+a}{a+b+c+d} \quad (4)$

$$\frac{c}{a+b+c+d} < \frac{c}{c+d+a} < \frac{c+b}{c+d+a+b} \quad (5)$$

$$\frac{d}{a+b+c+d} < \frac{d}{d+a+b} < \frac{d+c}{a+b+c+d} \quad (6)$$

Cộng bất đẳng thức kép (3); (4); (5); (6) theo từng vế ta được:

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2 \quad (\text{đpcm})$$

Bài 30. Cho $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ và $b; d > 0$. Chứng minh rằng $\frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d}$

Giải:

Vì $b; d > 0$ nên từ $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a.b}{b.b} < \frac{c.d}{d.d} \Rightarrow \frac{ab}{b^2} < \frac{cd}{d^2}$

Theo tính chất 2 ta có: $\frac{ab}{b^2} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{cd}{d^2} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{ab+cd}{b^2+d^2} < \frac{c}{d} \quad (\text{đpcm})$