TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} -3x+y=-9 \\ 2x+7y=52 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x+3}}-2\left(x+2y\right)=-\dfrac{17}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}+4x+8y=21 \end{cases}$.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:***

Để chuẩn bị cho buổi ôn tập giải toán bằng cách lập phương trình của lớp 9A, tổ 1 và tổ 2 được giao chuẩn bị bài tập về dạng toán chuyển động. Biết rằng nếu cả hai tổ cùng làm thì sau 3 giờ 36 phút sẽ xong, còn nếu tổ 1 làm trong 2 giờ, tổ 2 làm trong 3 giờ thì được $\frac{2}{3}$ công việc. Hỏi nếu mỗi tổ làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Bài 3 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2-2\left(m-3\right)x+4m-16=0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=3$. Giải phương trình với giá trị m vừa tìm được.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

c) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm âm.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn $\left(O;R\right)$ đường kính AB và điểm I cố định nằm giữa A và O. Dây CD vuông góc với AB tại I. Gọi E là điểm tuỳ ý thuộc dây CD (E không trùng với C, D). Tia AE cắt $\left(O\right)$ tại F.

a) Chứng minh tứ giác $BIEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AC^2=AI.AB=AE.AF$.

c) Kẻ đường kính CM của $\left(O\right)$; kẻ dây DN vuông góc với FM. Chứng minh $CN=DF$.

d) Gọi giao điểm của CN và DF là K. Chứng minh rằng giao điểm của OK với BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

Bài 5 (0,5 điểm). Biết rằng m, n là các số thực dương để phương trình ẩn x sau có nghiệm:

$$x^2-4x+n\left(m-1\right)+5=0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{\left(m+n\right)^2}{mn}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho các biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+2}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm x để biểu thức $P=A.B\le \dfrac{1}{x+3}$.

Bài 2 (1,5 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:***

Quãng đường AB dài 400km, một ô tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A, ô tô tăng vận tốc thêm 10km/h. Biết thời gian ô tô đi từ B về A ít hơn thời gian đi từ A đến B là 2 giờ. Tính vận tốc ô tô lúc đi từ A đến B.

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\dfrac{3}{2x-7}+\dfrac{4}{y+6}=7\\ \dfrac{2}{2x-7}-\dfrac{3}{y+6}=-1\end{cases}$.

2. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m+4)x-4m$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=-2$.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ và dây AB cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C (C khác A). Từ C kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm; tia CO nằm giữa hai tia CM và CA). Gọi D là trung điểm của AB.

a) Chứng minh tứ giác $CMOD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CN^2=CA.CB$.

c) ND cắt (O) tại I. Chứng minh $MI // AB$.

d) Gọi E là giao điểm của MN và AB. Chứng minh $\dfrac{2}{CE}=\dfrac{1}{CA}+\dfrac{1}{CB}$.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện: $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{3+a}{3-a}+\dfrac{3+b}{3-b}+\dfrac{3+c}{3-c}\le 2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRI PHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho các biểu thức: $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{6-\sqrt{x}}{4-x}\right):\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Cho $P=A.B$. Tìm giá trị của x để $P\le 0$.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu để vòi một chảy một mình trong 20 phút, khoá lại rồi mở tiếp vòi hai chảy trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\dfrac{1}{8}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Bài 3 (2,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}14\sqrt{x+2}-\dfrac{10}{3-y}=9\\ 3\sqrt{x+2}+\dfrac{2}{3-y}=4\end{cases}$.

2. Cho đường thẳng $(d): mx+y=1$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;5)$.

b) Cho đường thẳng $(d_1): 4x+my=-2$. Tìm m để đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm nằm phía dưới trục hoành.

Bài 4 (3,5 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn sao cho tia MD nằm giữa hai tia MA và MO (A, B là các tiếp điểm, $MC<MD$). Gọi I là trung điểm của CD.

a) Chứng minh tứ giác $MIOB$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $MC.MD=MA^2$.

c) Chứng minh IM là tia phân giác của $\widehat{AIB}$.

d) Gọi K là giao điểm của AB và CD. Chứng minh $\dfrac{1}{MC}+\dfrac{1}{MD}=\dfrac{2}{MK}$.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho 3 số thực dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A=\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS CHU VĂN AN

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=5 \\ 2x-y=2 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình với $m=5$.

b) Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất và thoả mãn $x+y=12$.

Bài 2 (2,0 điểm). Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y=ax+b$ có đồ thị (d).

a) Xác định a và b biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;2)$ và $B(1;3)$.

b) Với a, b vừa tìm được, hãy tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d).

Bài 3 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:***

Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá sách thứ nhất sang giá sách thứ hai thì số sách ở giá thứ hai sẽ bằng $\frac{4}{5}$ số sách còn lại ở giá sách thứ nhất. Tính số sách trong mỗi giá lúc ban đầu.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D.

a) Chứng minh các điểm A, C, M, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $CK.CD = CA.CB$.

c) Gọi N là giao điểm của AD và đường tròn (O). Chứng minh B, K, N thẳng hàng.

Bài 5 (0,5 điểm). Biết $4x^2+2y^2+2z^2-4xy-4xz+2yz-6y-10z=-34$.

Tính giá trị biểu thức: $M=(x-4)^{2020}-(y-4)^{2021}+(z-4)^{2022}$.

--------------------------- HẾT ---------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT LÔMÔNÔXỐP

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{3x}{x-2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0,\ x\neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=0,09$.

b) Rút gọn biểu thức B và $M=B:A$.

c) Tìm giá trị của x để $M<1$.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Trong kì thi vào 10, hai trường A và B có tất cả 750 học sinh tham gia dự thi. Kết quả hai trường có 614 học sinh trúng tuyển. Biết rằng trường A có 80% học sinh trúng tuyển, trường B có 84% học sinh trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh tham gia dự thi vào lớp 10?

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2-x-7=0$.

b) $\begin{cases}\sqrt{x-3}+\dfrac{5}{2y+1}=-3\\ 3\sqrt{x-3}-\dfrac{1}{2y+1}=7\end{cases}$.

2. Cho hai đường thẳng $(d_1): y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$; $(d_2): y=-mx+2m^2$ (m là tham số).

a) Tìm m để hai đường thẳng trên cùng đi qua điểm A có hoành độ là 0.

b) Tìm m để hai đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm nằm bên phải trục tung.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn (O) và một dây cung AB (AB không đi qua tâm), trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Kẻ đường kính PQ vuông góc với AB tại D (P thuộc cung AB lớn). Tia CP cắt đường tròn (O) tại I $(I\neq P)$. Dây AB và dây QI cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác $PIKD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh IQ là tia phân giác của $\widehat{AIB}$ và $AQ^2=QK.QI$.

c) Giả sử cho đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm cố định A và B, điểm C cố định trên tia đối của tia AB. Chứng minh đường thẳng IQ luôn đi qua một điểm cố định.

--------------------------- HẾT ---------------------------

TRƯỜNG THCS TRƯNG VƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4}$ và $B=\dfrac{18-\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{4}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0, x\ne 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Đặt $P=A.B$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Bài 2 (2,5 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Trong tháng đầu, hai tổ làm được 600 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, tổ I vượt mức 10% và tổ II vượt mức 20% so với tháng đầu, do đó tháng thứ hai cả hai tổ làm được 685 sản phẩm. Hỏi tháng đầu, mỗi tổ làm được bao nhiêu sản phẩm?

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+2$. Tìm toạ độ các giao điểm của (P) và (d). Vẽ (P) và (d).

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=2m \\ x+my=m+1 \end{cases}$. Tìm m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà cả x và y đều nhận giá trị nguyên.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB<AC$. Các đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BECF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $OA\perp EF$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, S là giao điểm của đường thẳng EF và BC. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh H, K, M thẳng hàng và chứng minh $SH\perp AM$.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho $1\le x, y, z\le 2$ và $x^2+y^2+z^2=6$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{4-y^2}+\sqrt{4-z^2}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS HOÀNG HOA THÁM

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B=\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0, x\ne 1.$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=25.$

b) Rút gọn biểu thức $A.$

c) Tìm x để biểu thức $S=A.B$ có giá trị lớn nhất.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Hai vòi cùng chảy vào một bể không chứa nước thì sau 6 giờ 40 phút sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy riêng trong 3 giờ, vòi thứ hai chảy riêng trong 5 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{7}{12}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì phải bao lâu mới đầy bể?

Bài 3 (2,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{3x-1}-\sqrt{2y+1}=1\\ 2\sqrt{3x-1}+3\sqrt{2y+1}=12\end{cases}.$

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+4y=10-m\\ x+my=4\end{cases}.$

a) Giải hệ phương trình với $m=1.$

b) Xác định giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $x>0, y>0.$

Bài 4 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính $BC.$ Trên nửa đường tròn lấy điểm A (khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên cung AC lấy điểm D bất kì (khác A và C), đường thẳng BD cắt AH tại $I.$

a) Chứng minh $IHCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AB^2=BI.BD.$

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung $AC.$

Bài 5 (0,5 điểm). Cho các số nguyên x, y thoả mãn $3x+2y=1.$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=x^2-y^2+|xy|+|x+y|-2.$

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{7\sqrt{x}-6}{x-4}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16$.

b) Cho biểu thức $P=\dfrac{B}{A}$. Chứng minh $P=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$.

c) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 240m. Người ta dự định mở rộng khu vườn bằng cách tăng chiều dài thêm 9m, tăng chiều rộng thêm 7m sao cho khu vườn vẫn là hình chữ nhật, do vậy diện tích khu vườn sẽ tăng thêm 963m^2. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn ban đầu.

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{2}{y-2}=6\\ \dfrac{5}{x+1}-\dfrac{1}{y-2}=3\end{cases}$.

2. Cho phương trình $x^2-2(m-1)x+m^2-3m=0\ (1)$ (x là ẩn số).

a) Giải phương trình (1) khi $m=5$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) và điểm K nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (O), A và B là các tiếp điểm. Từ điểm K vẽ đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D ($KC<KD$, d không đi qua tâm O).

a) Chứng minh tứ giác $KAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi giao điểm của đoạn thẳng AB với đoạn thẳng OK là M.

Chứng minh $KA^2=KC.KD=KM.KO$.

c) Chứng minh đường thẳng AB chứa tia phân giác của $\widehat{CMD}$.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho a, b là các số dương thoả mãn $a+b=3$. Chứng minh rằng:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{a}\right)^2\ge\frac{169}{18}.$$

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT NGUYỄN TẤT THÀNH

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (3,0 ĐIỂM)

Câu 1. Xác định số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+7y=-\sqrt{5} \\ 3x+21y=-3\sqrt{5} \end{cases}$.

A. Vô số nghiệm. **B.** 2 nghiệm. **C.** 1 nghiệm. **D.** Vô nghiệm.

Câu 2. Nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2x+2y=9 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$ là

A. $\left(\dfrac{7}{2};1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{7}{2};-1\right)$. **C.** $(4;1)$. **D.** $\left(-1;\dfrac{7}{2}\right)$.

Câu 3. Tìm m và n để hệ phương trình $\begin{cases} mx+5y=6n-11 \\ 4x+ny=7-5m \end{cases}$ có nghiệm $(x;y)=(-3;2)$.

A. $m=2; n=3$. **B.** $m=3; n=2$. **C.** $m=4; n=-1$. **D.** $m=-1; n=4$.

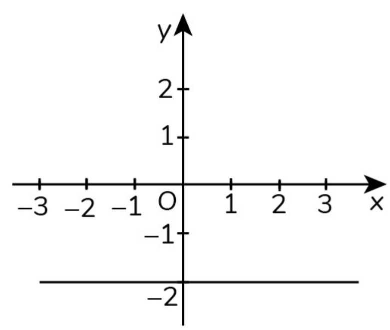
Câu 4. Nghiệm tổng quát của phương trình $x-2y=0$ là

A. $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=2x \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x=2 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x=0 \\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ y=\dfrac{x}{2} \end{cases}$.

Câu 5. Hình vẽ bên minh họa hình học tập nghiệm của phương trình nào?

A. $0x-y=-2$. **B.** $2x-0y=-4$.

C. $0x+3y=-6$. **D.** $-3x+0y=-6$.



Câu 6. "Tìm một số có 2 chữ số biết rằng chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 6 đơn vị. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được số mới và tổng của số mới và số cũ là 132". Số cần tìm là

A. 60. **B.** 71. **C.** 82. **D.** 93.

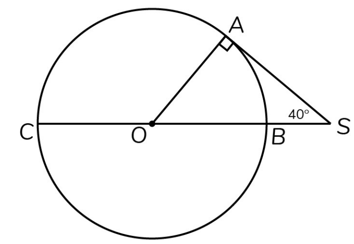
Câu 7. Các giao điểm của đường thẳng $y=x$ và parabol $y=x^2$ có toạ độ là

A. $(0;0)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(1;1)$. **D.** $(0;0)$; $(1;1)$.

Câu 8. Điểm nào sau đây thuộc đồ thị của hàm số $y=-\dfrac{x^2}{3}$?

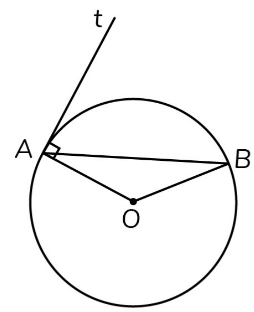
A. $\left(-2;\dfrac{4}{3}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{1}{3};-3\right)$. **C.** $\left(-1;-\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $(-3;3)$.

Câu 9. Cho hình vẽ, biết $\widehat{ASO}=40^\circ$. Số đo $\overset\frown{AC}$ nhỏ là



A. 80°. **B.** 110°.
C. 120°. **D.** 130°.

Câu 10. Cho hình vẽ, nếu $\widehat{AOB}=130^\circ$ thì $\widehat{BAt}$ bằng bao nhiêu độ?



A. 55°. **B.** 65°.
C. 70°. **D.** 130°.

Câu 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có $\hat{A}=70^\circ, \hat{C}=50^\circ$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. sđ$\overset\frown{AC}=120^\circ$. **B.** $\widehat{AOB}=100^\circ$.
C. $\overset\frown{AC}$ nhỏ $<\overset\frown{AB}$ nhỏ $<\overset\frown{BC}$ nhỏ. **D.** $AB<AC<BC$.

Câu 12. Cho đường tròn (O) và một cung AB có sđ$\overset\frown{AB}=110^\circ$. M là một điểm trên cung AB nhỏ. Số đo của $\widehat{AMB}$ là

A. 55°. **B.** 110°. **C.** 125°. **D.** 250°.

PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 ĐIỂM)

Bài 1 (2,0 điểm). Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases}\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1\\ -5x+8y=-3\end{cases}$.
2. $\begin{cases}2\sqrt{x}+3\sqrt{y-3}=18\\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y-3}=5\end{cases}$.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình***

Một sân bóng đá mini hình chữ nhật với các kích thước đã định, có chu vi là $140m$. Biết rằng nếu giảm chiều rộng của sân đi $5m$ và tăng chiều dài thêm $8m$ thì diện tích của sân bóng không thay đổi. Hãy tính các kích thước của sân bóng đó.

Bài 3 (2,5 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn kẻ hai cát tuyến MAB, MCD với đường tròn đó (A nằm giữa M và B, C nằm giữa M và D).

1. Chứng minh $\Delta MAD \backsim \Delta MCB$.
2. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại K. Biết $\hat{M}=60^\circ, \widehat{AKC}=80^\circ$. Tính $\widehat{BCD}$.
3. AC và BD cắt nhau tại N. Hai phân giác của $\hat{M}$ và $\hat{N}$ cắt nhau tại I. Chứng minh $IM\perp IN$.

Bài 4 (0,5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2\\ 2y^3=(y+x)(2-xy)\end{cases}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT TẠ QUANG BỬU

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (1,5 ĐIỂM)

Câu 1. Phương trình nào sau đây có hai nghiệm phân biệt

A. $x^2-6x+9=0$. **B.** $x^3+1=0$. **C.** $2x^2-x-1=0$. **D.** $x^2+x+1=0$.

Câu 2. Đồ thị của hàm số $y=ax^2$ đi qua điểm $(2;-1)$, khi đó hệ số a bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{4}$. **D.** $-\frac{1}{4}$.

Câu 3. Phương trình $x^2-x-2=0$ có nghiệm là

A. $x_1=1;\ x_2=2$. **B.** $x_1=-1;\ x_2=2$. **C.** $x_1=1;\ x_2=-2$. **D.** Vô nghiệm.

Câu 4. Hình quạt tròn bán kính R và cung $75°$ có diện tích bằng

A. $\frac{5\pi R^2}{12}$. **B.** $\frac{5\pi R}{24}$. **C.** $\frac{5\pi R^2}{24}$. **D.** $\frac{5\pi R}{12}$.

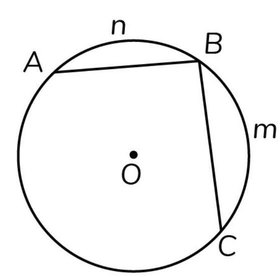
Câu 5. Bán kính hình tròn là bao nhiêu nếu diện tích của hình tròn đó là $36\pi\left(cm^2\right)$?

A. 6cm. **B.** 4cm. **C.** 3cm. **D.** 5cm.

Câu 6. Hình bên có số đo cung AnB bé hơn số đo cung BmC. Suy ra

A. $BC>AB$. **B.** $AB=BC$.

C. $BC<AB$. **D.** Đáp án A, B, C đều sai.



PHẦN II. TỰ LUẬN (8,5 ĐIỂM)

Bài 1 (2,0 điểm). ***Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình***

Một cửa hàng có tổng cộng 28 chiếc ti vi và tủ lạnh. Giá mỗi cái tủ lạnh là 15 triệu đồng, mỗi cái ti vi là 30 triệu đồng. Nếu bán hết 28 cái ti vi và tủ lạnh này chủ cửa hàng sẽ thu được 720 triệu đồng. Hỏi cửa hàng có bao nhiêu cái ti vi và tủ lạnh?

Bài 2 (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=4\end{cases}$.

b) $\begin{cases}\dfrac{5}{\sqrt{x-2}}+|y-1|=6\\\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}-3|y-1|=-2\end{cases}$.

2. Cho Parabol $(P): y=\frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y=-x$.

a) Vẽ Parabol (P).

b) Xác định toạ độ các giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d).

Bài 3 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Lấy hai điểm C, M bất kỳ thuộc nửa đường tròn sao cho $AC = CM$ (AC và CM khác MB). Gọi D là giao điểm của AC và BM, H là giao điểm của AM và BC.

1. Chứng minh tứ giác $CHMD$ nội tiếp.
2. Chứng minh $DA.DC = DB.DM$.
3. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC tại K. Chứng minh rằng $KD = \dfrac{AK + HD}{2}$.
4. Gọi Q là giao điểm của DH và AB. Chứng minh rằng khi điểm C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho $AC = CM$ thì đường tròn ngại tiếp tam giác MCQ luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4 (0,5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

TRƯỜNG THCS & THPT LƯƠNG THẾ VINH

Bài 1 (2,0 điểm). Giải các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} -3x+y=-9 \\ 2x+7y=52 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x+3}}-2(x+2y)=-\dfrac{17}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}+4x+8y=21 \end{cases}$.

Lời giải

a) $\begin{cases} -3x+y=-9 \\ 2x+7y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -21x+7y=-63 \\ 2x+7y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 23x=115 \\ 2x+7y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 10+7y=52 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=6 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(5;6)$.

b) Điều kiện xác định: $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x+3}}-2(x+2y)=-\dfrac{17}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}+4x+8y=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{\sqrt{x+3}}-2(x+2y)=-\dfrac{17}{2} \\ \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}+4(x+2y)=21 \end{cases}$. $\quad (1)$

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}=a\ (a>0) \\ x+2y=b \end{cases}$, hệ phương trình (1) trở thành: $\begin{cases} 3a-2b=-\dfrac{17}{2} \\ 2a+4b=21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-2b=-\dfrac{17}{2} \\ a+2b=\dfrac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a=2 \\ a+2b=\dfrac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}+2b=\dfrac{21}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ 2b=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=5 \end{cases}$ (thoả mãn $a>0$).

Khi đó: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}}=\dfrac{1}{2} \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3}=2 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$ (thoả mãn $x>-3$).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;2)$.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:***

Để chuẩn bị cho buổi ôn tập giải toán bằng cách lập phương trình của lớp 9A, tổ 1 và tổ 2 được giao chuẩn bị bài tập về dạng toán chuyển động. Biết rằng nếu cả hai tổ cùng làm thì sau 3 giờ 36 phút sẽ xong, còn nếu tổ 1 làm trong 2 giờ, tổ 2 làm trong 3 giờ thì được $\dfrac{2}{3}$ công việc. Hỏi nếu mỗi tổ làm một mình thì bao lâu xong công việc?

Lời giải

Đổi 3 giờ 36 phút $=\frac{18}{5}$ giờ.

Gọi thời gian tổ 1, tổ 2 làm một mình xong công việc lần lượt là x, y (giờ).

Điều kiện: $x; y > \frac{18}{5}$.

Trong 1 giờ, tổ 1 làm được: $\frac{1}{x}$ (công việc).

Trong 1 giờ, tổ 2 làm được: $\frac{1}{y}$ (công việc).

Trong 1 giờ, cả hai tổ làm được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ (công việc).

Vì cả hai tổ cùng làm thì sau $\frac{18}{5}$ giờ thì xong nên $\frac{18}{5}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1.$ (1)

Vì tổ 1 làm trong 2 giờ, tổ 2 làm trong 3 giờ thì được $\frac{2}{3}$ công việc nên $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{3}.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases}\frac{18}{5}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=\frac{5}{9}\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{3}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{y}=\frac{1}{9}\\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=9\\ \frac{2}{x}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=9\\ \frac{2}{x}=\frac{1}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=9\\ \frac{1}{x}=\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=9\\ x=6\end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy nếu làm một mình thì tổ 1 sau 6 giờ hoàn thành công việc, tổ 2 sau 9 giờ hoàn thành công việc.

Bài 3 (2,0 điểm). Cho phương trình $x^2-2(m-3)x+4m-16=0$ (m là tham số).

a) Tìm m để phương trình có nghiệm $x=3$. Giải phương trình với giá trị m vừa tìm được.

b) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m.

c) Tìm m để phương trình có ít nhất một nghiệm âm.

Lời giải

a) Thay $x=3$ vào phương trình, ta được: $3^2-2(m-3).3+4m-16=0$

$$\Leftrightarrow 9-6(m-3)+4m-16=0 \Leftrightarrow 9-6m+18+4m-16=0 \Leftrightarrow 11-2m=0 \Leftrightarrow 2m=11 \Leftrightarrow m=\frac{11}{2}.$$

Vậy với $m=\frac{11}{2}$ thì phương trình đã cho có nghiệm $x=3$.

Với $m=\frac{11}{2}$, phương trình đã cho trở thành: $x^2-2.\left(\frac{11}{2}-3\right)x+4.\frac{11}{2}-16=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0$

$\Leftrightarrow x^2-3x-2x+6=0 \Leftrightarrow x(x-3)-2(x-3)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-3=0 \\ x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy với $m=\dfrac{11}{2}$, phương trình có hai nghiệm là $x=2;\ x=3$.

b) Xét phương trình: $x^2-2(m-3)x+4m-16=0$.

Ta có: $\Delta'=\left[-(m-3)\right]^2-1.(4m-16)=m^2-6m+9-4m+16=m^2-10m+25=(m-5)^2\geq 0,\ \forall m$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho luôn có nghiệm với mọi m.

c) Theo hệ thức Vi-ét, ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=2(m-3) \\ x_1x_2=4m-16 \end{cases}$.

Trường hợp 1: Phương trình có 1 nghiệm âm.

Khi đó: $x_1x_2<0 \Leftrightarrow 4m-16<0 \Leftrightarrow 4m<16 \Leftrightarrow m<4$.

Trường hợp 2: Phương trình có 2 nghiệm âm.

Khi đó: $\begin{cases} x_1+x_2<0 \\ x_1x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-3)<0 \\ 4m-16>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ 4m>16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ m>4 \end{cases}$ (vô lí).

Vậy với $m<4$ thì phương trình có ít nhất một nghiệm âm.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính AB và điểm I cố định nằm giữa A và O. Dây CD vuông góc với AB tại I. Gọi E là điểm tuỳ ý thuộc dây CD (E không trùng với C, D). Tia AE cắt (O) tại F.

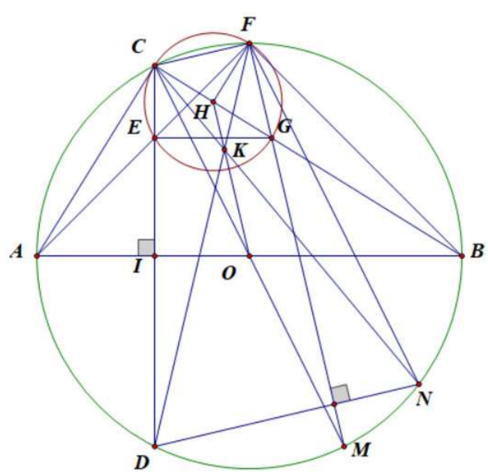
a) Chứng minh tứ giác $BIEF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $AC^2=AI.AB=AE.AF$.

c) Kẻ đường kính CM của (O); kẻ dây DN vuông góc với FM. Chứng minh $CN=DF$.

d) Gọi giao điểm của CN và DF là K. Chứng minh rằng giao điểm của OK với BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF.

Lời giải



a) Vì F thuộc đường tròn tâm O đường kính AB nên $\widehat{BFA}=90^\circ$ hay $\widehat{BFE}=90^\circ$.

Xét tứ giác $BIEF$ có: $\widehat{BFE}=90^\circ$; $\widehat{BIE}=90^\circ$ (do $CD\perp AB$)

$\Rightarrow \widehat{BFE}+\widehat{BIE}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow BIEF$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì C thuộc đường tròn tâm O đường kính AB nên $\widehat{ACB}=90^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C.

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông vào tam giác ABC vuông tại C, đường cao CI, ta có:

$AC^2=AI.AB.$ (1)

Xét tam giác AIE và tam giác AFB có: $\widehat{BAF}$ chung; $\widehat{AIE}=\widehat{AFB}=90^\circ$

$\Rightarrow \Delta AIE \backsim \Delta AFB\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AI}{AF} \Rightarrow AE.AF = AI.AB.$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra $AC^2 = AI.AB = AE.AF.$

c) Vì Vì F thuộc đường tròn tâm O đường kính CM nên $\widehat{CFM} = 90° \Rightarrow CF \perp FM.$

Lại có: $DN \perp FM \Rightarrow CF // DN \Rightarrow \widehat{CFD} = \widehat{NDF}$ (hai góc so le trong).

Mà $\widehat{CFD} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CD}$ và $\widehat{CDF} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{FN}$ nên sđ$\overset{\frown}{CD} =$ sđ$\overset{\frown}{FN} \Rightarrow \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{FN}$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{FN} + \overset{\frown}{CF} \Rightarrow \overset{\frown}{DF} = \overset{\frown}{CN} \Rightarrow DF = CN$ (hai dây chắn hai cung bằng nhau).

d) Gọi H là giao điểm của OK và BC; G là giao điểm của BC và MF.

Xét tam giác OBC có $OB = OC \Rightarrow \Delta OBC$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OBC} = \widehat{OCB} \Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{ABC}.$

Mà $\widehat{ABC} = \widehat{ACD}$ (cùng phụ với $\widehat{BCD}$) nên $\widehat{BCM} = \widehat{ACD}.$

Lại có: $\widehat{ACD} = \widehat{AFD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AD)

$\Rightarrow \widehat{BCM} = \widehat{AFD} \Rightarrow$ sđ$\overset{\frown}{MB} =$ sđ$\overset{\frown}{AD} \Rightarrow \widehat{CGF} = \widehat{CEF} \Rightarrow CEGF$ là tứ giác nội tiếp.

Suy ra đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF đi qua điểm G.

Lại có: $\widehat{CFG} = 90° \Rightarrow \widehat{CEG} = 180° - \widehat{CFG} = 180° - 90° = 90°$

$\Rightarrow$ Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $CEGF$ là trung điểm của CG. $\quad(3)$

Theo chứng minh câu c, ta có: $CF // DN, CN = DF$ nên tứ giác $CFND$ là hình thang cân.

Suy ra $KC = KF$.

Lại có $OC = OF \Rightarrow OK$ là đường trung trực của đoạn thẳng CF.

Mà H thuộc đường thẳng OK nên $HC = HF \Rightarrow \Delta HCF$ cân tại $H \Rightarrow \widehat{HCF} = \widehat{HFC}.$

Mặt khác: $\widehat{HFC} + \widehat{HFG} = 90°; \widehat{HCF} + \widehat{HGF} = 90°$

$\Rightarrow \widehat{HFG} = \widehat{HGF} \Rightarrow \Delta HFG$ cân tại $H \Rightarrow HF = HG$

$\Rightarrow HF = HG = HC \Rightarrow H$ là trung điểm của CG. $\quad(4)$

Từ (3) và (4), suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CEF (điều phải chứng minh).

Bài 5 (0,5 điểm). Biết rằng m, n là các số thực dương để phương trình ẩn x sau có nghiệm:

$$x^2 - 4x + n(m-1) + 5 = 0.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{(m+n)^2}{mn}$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2 - 4x + n(m-1) + 5 = 0$ có $\Delta' = 4 - [n(m-1)+5] = -1 - n(m-1).$

Vì phương trình đã cho có nghiệm nên $\Delta' \geq 0 \geq 0 \Leftrightarrow n(m-1) \leq -1 \Leftrightarrow mn \leq n-1 \Leftrightarrow m \leq \dfrac{n-1}{n}.$

Vì m, n dương nên $n > 1$.

Ta có: $P=\dfrac{(m+n)^2}{mn}=\dfrac{m^2+2mn+n^2}{mn}=\dfrac{m}{n}+2+\dfrac{n}{m}=\left(\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{16m}\right)+\dfrac{15n}{16m}+2.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\dfrac{m}{n}+\dfrac{n}{16m}\geq 2\sqrt{\dfrac{m}{n}.\dfrac{n}{16m}}=\dfrac{1}{2}.$

Suy ra $P\geq\dfrac{1}{2}+\dfrac{15n}{16m}+2=\dfrac{15n}{16m}+\dfrac{5}{2}\geq\dfrac{15n}{16.\dfrac{n-1}{n}}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{15n^2}{16(n-1)}+\dfrac{5}{2}.$

Xét $\dfrac{n^2}{n-1}=\dfrac{(n-1)(n+1)+1}{n-1}=n+1+\dfrac{1}{n-1}=(n-1)+\dfrac{1}{n-1}+2\geq 2\sqrt{(n-1).\dfrac{1}{n-1}}+2=4.$

Suy ra $P\geq\dfrac{15}{16}.4+\dfrac{5}{2}=\dfrac{25}{4}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{m}{n}=\dfrac{n}{16m}\\ m=\dfrac{n-1}{n}\\ n-1=\dfrac{1}{n-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{2}\\ n=2\end{cases}.$

Vậy GTNN của P bằng $\dfrac{25}{4}$ khi $m=\dfrac{1}{2}, n=2.$

THCS CẦU GIẤY

TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho các biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\dfrac{x+2}{x-\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=49$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm x để biểu thức $P=A.B\le\dfrac{1}{x+3}$.

Lời giải

a) Với $x=49$ thoả mãn điều kiện xác định $x\ge 0,\ x\ne 4$.

Thay $x=49$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}$, ta có: $A=\dfrac{\sqrt{49}+1}{\sqrt{49}+3}=\dfrac{7+1}{7+3}=\dfrac{4}{5}$.

Vậy với $x=49$ thì $A=\dfrac{4}{5}$.

b) Với $x\ge 0,\ x\ne 4,$ ta có:

$$B=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}-\frac{x+2}{x-\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}-\frac{x+2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}$$

$$=\frac{x+\sqrt{x}-x-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

Vậy $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

c) Với $x\ge 0,\ x\ne 4,$ ta có: $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}$.

Theo bài ra $P=A.B\le\dfrac{1}{x+3}\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}\le\dfrac{1}{x+3}$.

Vì $x+3>0,\ \sqrt{x}+3>0$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$ nên $x+3\le\sqrt{x}+3\Leftrightarrow x-\sqrt{x}\le 0\Leftrightarrow\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\le 0$

$$\Leftrightarrow 0\le\sqrt{x}\le 1\Leftrightarrow 0\le x\le 1.$$

Kết hợp với điều kiện $x\ge 0,\ x\ne 4,$ ta được: $0\le x\le 1$.

Vậy với $0\le x\le 1$ thì $P=A.B\le\dfrac{1}{x+3}$.

Bài 2 (1,5 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:***

Quãng đường AB dài 400km, một ô tô đi từ A đến B với vận tốc không đổi. Khi từ B trở về A, ô tô tăng vận tốc thêm 10km/h. Biết thời gian ô tô đi từ B về A ít hơn thời gian đi từ A đến B là 2 giờ. Tính vận tốc ô tô lúc đi từ A đến B.

Lời giải

Gọi vận tốc của ô tô lúc đi từ A đến B là $x\ (\text{km/h})$.

Điều kiện: $x > 0$.

Vận tốc của ô tô khi đi từ B về A là $x+10\ (\text{km/h})$.

Thời gian ô tô đi từ A đến B là $\dfrac{400}{x}$ (giờ).

Thời gian ô tô đi từ B đến A là $\dfrac{400}{x+10}$ (giờ).

Vì thời gian ô tô đi từ B về A ít hơn thời gian đi từ A đến B là 2 giờ nên ta có phương trình:

$$\frac{400}{x}-\frac{400}{x+10}=2 \Rightarrow 400(x+10)-400x=2x(x+10) \Leftrightarrow 400x+4000-400x=2x^2+20x$$

$$\Leftrightarrow 2x^2+20x=4000 \Leftrightarrow x^2+10x-2000=0 \Leftrightarrow (x-40)(x+50)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40 \\ x=-50 \end{array}\right..$$

Kết hợp điều kiện, ta được $x=40$.

Vậy vận tốc của ô tô lúc đi từ A đến B là 40km/h.

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} \dfrac{3}{2x-7}+\dfrac{4}{y+6}=7 \\ \dfrac{2}{2x-7}-\dfrac{3}{y+6}=-1 \end{cases}$.

2. Cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=(m+4)x-4m$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

b) Tìm toạ độ giao điểm của (d) và (P) khi $m=-2$.

Lời giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} 2x-7\neq 0 \\ y+6\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq \dfrac{7}{2} \\ y\neq -6 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-7}=a \\ \dfrac{1}{y+6}=b \end{cases}$ $(a;\, b\neq 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 3a+4b=7 \\ 2a-3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9a+12b=21 \\ 8a-12b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17a=17 \\ 3a+4b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 3+4b=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$ (thoả mãn $a;\, b\neq 0$).

Khi đó: $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-7}=1 \\ \dfrac{1}{y+6}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-7=1 \\ y+6=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=8 \\ y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(4;-5)$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là:

$$x^2=(m+4)x-4m \Leftrightarrow x^2-(m+4)x+4m=0. \quad (1)$$

a) Để đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=\left[-(m+4)\right]^2-4.1.4m>0$

$$\Leftrightarrow m^2+8m+16-16m>0 \Leftrightarrow m^2-8m+16>0 \Leftrightarrow (m-4)^2>0 \Leftrightarrow m-4\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 4.$$

Vậy với $m\neq 4$ thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Với $m=-2,$ phương trình (1) trở thành: $x^2-(-2+4)x+4.(-2)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-8=0$

$\Leftrightarrow x^2-4x+2x-8=0 \Leftrightarrow x(x-4)+2(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \Rightarrow y=16 \\ x=-2 \Rightarrow y=4 \end{array}\right.$.

Vậy với $m=-2,$ đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm có toạ độ là $(4;16)$; $(2;4)$.

Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn $(O;R)$ và dây AB cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia AB lấy điểm C (C khác A). Từ C kẻ hai tiếp tuyến CM và CN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm; tia CO nằm giữa hai tia CM và CA). Gọi D là trung điểm của AB.

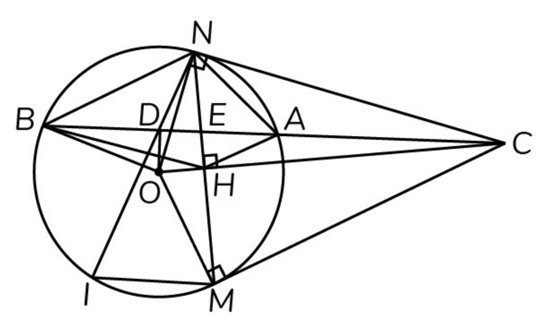
a) Chứng minh tứ giác $CMOD$ nội tiếp.

b) Chứng minh $CN^2=CA.CB$.

c) ND cắt (O) tại I. Chứng minh $MI // AB$.

d) Gọi E là giao điểm của MN và AB. Chứng minh $\dfrac{2}{CE}=\dfrac{1}{CA}+\dfrac{1}{CB}$.

Lời giải



a) Vì D là trung điểm của dây AB nên $OD\perp AB$

$\Rightarrow \widehat{ODC}=90^\circ$.

Vì CM là tiếp tuyến của (O) nên $OM\perp CM$

$\Rightarrow \widehat{OMC}=90^\circ$.

Xét tứ giác $CDOM$ có: $\widehat{ODC}+\widehat{OMC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow CMOD$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết).

b) Xét tam giác CNA và tam giác CBN có: $\widehat{BCN}$ chung; $\widehat{CNA}=\widehat{NBC}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AN).

Suy ra $\Delta CNA \backsim \Delta CBN$ (g.g) $\Rightarrow \dfrac{CN}{CB}=\dfrac{CA}{CN} \Rightarrow CN^2=CA.CB$.

c) Vì CN là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $ON \perp CN \Rightarrow \widehat{CNO} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $CMON$ có $\widehat{CNO} + \widehat{CMO} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow CMON$ là tứ giác nội tiếp.

Mà $CMOD$ là tứ giác nội tiếp (chứng minh câu a) nên 5 điểm C, M, O, D, N cùng thuộc một đường tròn $\Rightarrow CNDM$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDN} = \widehat{CMN}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN).

Mặt khác: $\widehat{MIN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MN).

Suy ra $\widehat{CDN} = \widehat{MIN}$.

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MI // AB$.

d) Ta có $\dfrac{2}{CE} = \dfrac{1}{CA} + \dfrac{1}{CB} \Leftrightarrow \dfrac{CE}{CA} + \dfrac{CE}{CB} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{CA+AE}{CA} + \dfrac{CB-BE}{CB} = 2 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{AE}{CA} + 1 - \dfrac{BE}{CB} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{AE}{CA} - \frac{BE}{CB} = 0 \Leftrightarrow \frac{AE}{CA} = \frac{BE}{CB} \Leftrightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{CA}{CB}.$$

Do đó, ta đi chứng minh $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{CA}{CB}$.

Gọi H là giao điểm của MN và OC.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $\begin{cases} OM = ON \\ CM = CN \end{cases} \Rightarrow OC$ là trung trực của MN

$\Rightarrow OC \perp MN$ tại H.

Xét tam giác ONC vuông tại N, đường cao NH có: $CN^2 = CH.CO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Mà theo chứng minh câu b, ta có $CN^2 = CA.CB$ nên $CH.CO = CA.CB \Rightarrow \dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CA}{CO}$.

Xét tam giác CAH và tam giác COB có: $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CA}{CO}$ (chứng minh trên); $\widehat{OCB}$ chung.

Suy ra $\Delta CAH \backsim \Delta COB\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{AHC} = \widehat{OBC}$ (hai góc tương ứng) $\quad (1)$

$\Rightarrow ABOH$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{OAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OB).

Mặt khác $OA = OB \Rightarrow \Delta OAB$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \widehat{OBC}$.

Do đó $\widehat{OHB} = \widehat{OBC}$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra: $\widehat{OHB} = \widehat{AHC}$.

Lại có: $\widehat{OHB} + \widehat{BHE} = 90^\circ$; $\widehat{AHC} + \widehat{EHA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BHE} = \widehat{EHA}$

$\Rightarrow HE$ là tia phân giác của $\widehat{AHB} \Rightarrow \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AH}{BH}$. $\quad (3)$

Vì $HE \perp HC$ và HE là tia phân giác của $\widehat{AHB}$

$\Rightarrow HC$ là tia phân giác ngoài của $\widehat{AHB} \Rightarrow \dfrac{AH}{BH} = \dfrac{CA}{CB}$. $\quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra $\dfrac{AE}{BE}=\dfrac{CA}{CB}\Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho a, b, c là các số dương thoả mãn điều kiện: $a+b+c=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{3+a}{3-a}+\dfrac{3+b}{3-b}+\dfrac{3+c}{3-c}\le 2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)$.

Lời giải

Ta có: $\dfrac{3+a}{3-a}+\dfrac{3+b}{3-b}+\dfrac{3+c}{3-c}\le 2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\Leftrightarrow \dfrac{a+b+c+a}{a+b+c-a}+\dfrac{a+b+c+b}{a+b+c-b}+\dfrac{a+b+c+c}{a+b+c-c}\le 2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)$

$\Leftrightarrow \dfrac{2a}{b+c}+1+\dfrac{2b}{c+a}+1+\dfrac{2c}{c+a}+1\le 2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}\right)-2\left(\dfrac{2a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{c+a}\right)\ge 3$

$\Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{a}{b+c}\right)+\left(\dfrac{b}{c}-\dfrac{b}{c+a}\right)+\left(\dfrac{c}{a}-\dfrac{c}{a+b}\right)\ge \dfrac{3}{2}\Leftrightarrow \dfrac{bc}{a(b+c)}+\dfrac{ca}{b(c+a)}+\dfrac{ab}{c(a+b)}\ge \dfrac{3}{2}.$

Đặt $bc=x$, $ca=y$, $ab=z$, ta được: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\ge \dfrac{3}{2}$.

Ta có: $\dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}=\dfrac{x^2}{xy+xz}+\dfrac{y^2}{yz+xy}+\dfrac{z^2}{xz+yz}\ge \dfrac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)}$.

Lại có: $xy+yz+zx\le \dfrac{(x+y+z)^2}{3}\Rightarrow \dfrac{x}{y+z}+\dfrac{y}{z+x}+\dfrac{z}{x+y}\ge \dfrac{3}{2}$.

Suy ra điều phải chứng minh.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c=1$.

TRƯỜNG THCS NGUYỄN TRI PHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho các biểu thức: $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$ và $B=\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{6-\sqrt{x}}{4-x}\right):\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4.$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=9.$

b) Rút gọn biểu thức $B.$

c) Cho $P=A.B.$ Tìm giá trị của x để $P\le 0.$

Lời giải

a) Với $x=9$ thoả mãn điều kiện xác định $x\ge 0,\ x\ne 4.$

Thay $x=9$ vào biểu thức $A=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}$, ta được: $A=\dfrac{2\sqrt{9}}{\sqrt{9}+3}=\dfrac{2.3}{3+3}=1.$

Vậy với $x=9$ thì $A=1.$

b) Với $x\ge 0,\ x\ne 4,$ ta có

$$B=\left(\frac{2}{\sqrt{x}+2}-\frac{6-\sqrt{x}}{4-x}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{2}{\sqrt{x}+2}-\frac{\sqrt{x}-6}{x-4}\right):\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\left[\frac{2\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}$$

$$=\frac{2\sqrt{x}-4-\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}+2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}.\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{\sqrt{x}+3}.$$

Vậy với $x\ge 0,\ x\ne 4$ thì $B=\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}.$

c) Với $x\ge 0,\ x\ne 4,$ ta có: $P=A.B=\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+3}.\dfrac{1}{\sqrt{x}+3}=\dfrac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}.$

Để $P\le 0$ thì $\dfrac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}\le 0.$

Nhận thấy $\sqrt{x}\ge 0$ và $\left(\sqrt{x}+3\right)^2>0$ với mọi $x\ge 0,\ x\ne 4$ nên $\dfrac{2\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}\le 0\Leftrightarrow \sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0.$

Vậy $x=0$ là giá trị cần tìm.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không có nước thì sau 3 giờ đầy bể. Nếu để vòi một chảy một mình trong 20 phút, khoá lại rồi mở tiếp vòi hai chảy trong 30 phút thì cả hai vòi chảy được $\frac{1}{8}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể.

Lời giải

Đổi $20\text{ phút} = \frac{1}{3}$ giờ; $30\text{ phút} = \frac{1}{2}$ giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất, vòi thứ hai chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ).

Điều kiện: $x; y > 3$.

Trong 1 giờ, vòi thứ nhất chảy được: $\frac{1}{x}$ (bể).

Trong 1 giờ, vòi thứ hai chảy được: $\frac{1}{y}$ (bể).

Vì hai vòi cùng chảy thì sau 3 giờ đầy bể nên ta có phương trình: $\frac{3}{x}+\frac{3}{y}=1.$ (1)

Vì vòi một chảy một mình trong 20 phút và vòi hai chảy một mình trong 30 phút thì được $\frac{1}{8}$ bể nên ta có phương trình: $\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{4}.$ (2)

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{3}{y}=1 \\ \frac{2}{x}+\frac{3}{y}=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=\frac{1}{4} \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=12 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy nếu chảy một mình, vòi một chảy đầy bể trong 4 giờ, vòi hai chảy đầy bể trong 12 giờ.

Bài 3 (2,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 14\sqrt{x+2}-\dfrac{10}{3-y}=9 \\ 3\sqrt{x+2}+\dfrac{2}{3-y}=4 \end{cases}$.

2. Cho đường thẳng $(d): mx+y=1$.

a) Tìm m để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;5)$.

b) Cho đường thẳng $(d_1): 4x+my=-2$. Tìm m để đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm nằm phía dưới trục hoành.

Lời giải

1. Điều kiện: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ 3-y\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ y\ne 3 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}\sqrt{x+2}=a\\ \dfrac{1}{3-y}=b\end{cases}$ $(a\ge 0,\, b\ne 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases}14a-10b=9\\ 3a+2b=4\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}14a-10b=9\\ 15a+10b=20\end{cases} \Leftrightarrow\Leftrightarrow \begin{cases}14a-10b=9\\ 29a=29\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}14-10b=9\\ a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}10b=5\\ a=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ (thoả mãn).

Khi đó: $\begin{cases}\sqrt{x+2}=1\\ \dfrac{1}{3-y}=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=1\\ 3-y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1\\ y=1\end{cases}$ (thoả mãn $x\ge -2;\, y\ne 3$).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất nhất là $(x;y)=(-1;1)$.

2a) Để đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;5)$ thì $m.(-2)+5=1 \Leftrightarrow -2m+5=1 \Leftrightarrow m=2$.

Vậy với $m=2$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(-2;5)$.

b) Toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và (d_1) là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=1\\ 4x+my=-2\end{cases}$.

Ta có: $\begin{cases}mx+y=1\\ 4x+my=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-mx\\ 4x+m(1-mx)=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-mx\\ 4x+m-m^2x=-2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-mx\\ (m^2-4)x=m+2\end{cases}$. (1)

Để đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm nằm phía dưới trục hoành thì hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất thoả mãn $y<0$.

Hệ phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m^2-4\ne 0 \Leftrightarrow m\ne \pm 2$.

Với $m\ne \pm 2$, ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-mx\\ x=\dfrac{m+2}{m^2-4}=\dfrac{1}{m-2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-\dfrac{m}{m-2}=\dfrac{-2}{m-2}\\ x=\dfrac{1}{m-2}\end{cases}$.

Do đó hệ phương trình (1) có nghiệm thoả mãn $y<0$ khi $\dfrac{-2}{m-2}<0 \Leftrightarrow m-2>0 \Leftrightarrow m>2$.

Vậy với $m>2$ thì đường thẳng (d) và (d_1) cắt nhau tại một điểm nằm phía dưới trục hoành.

Bài 4 (3,5 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) dựng các tiếp tuyến MA, MB và cát tuyến MCD với đường tròn sao cho tia MD nằm giữa hai tia MA và MO (A, B là các tiếp điểm, $MC<MD$). Gọi I là trung điểm của CD.

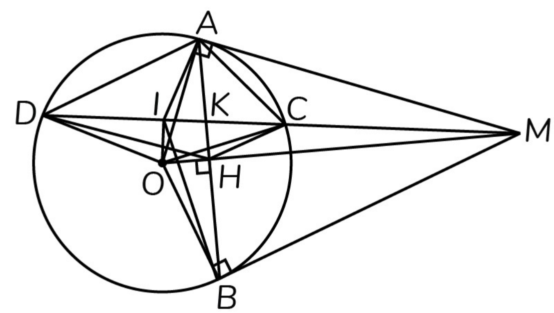
a) Chứng minh tứ giác $MIOB$ nội tiếp đường tròn.

b) Chứng minh $MC.MD=MA^2$.

c) Chứng minh IM là tia phân giác của $\widehat{AIB}$.

d) Gọi K là giao điểm của AB và CD. Chứng minh $\dfrac{1}{MC}+\dfrac{1}{MD}=\dfrac{2}{MK}$.

Lời giải



a) Vì I là trung điểm của dây CD nên $OI \perp CD$

$\Rightarrow \widehat{OIM} = 90°$.

Vì MB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên

$\widehat{MBO} = 90°$.

Xét tứ giác $MIOB$ có: $\widehat{OIM} + \widehat{MBO} = 90° + 90° = 180°$

$\Rightarrow$Tứ giác $MIOB$ nội tiếp đường tròn (dấu hiệu nhận biết).

b) Xét tam giác MAC và tam giác MDA có: $\widehat{AMD}$ chung; $\widehat{MAC} = \widehat{ADM}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AC).

Suy ra $\Delta MAC \backsim \Delta MDA\ (\text{g.g}) \Rightarrow \dfrac{MA}{MD} = \dfrac{MC}{MA} \Rightarrow MA^2 = MC.MD.$

c) Vì MA là tiếp tuyến của (O) nên $OA \perp MA \Rightarrow \widehat{OAM} = 90°$.

Xét tứ giác $OIAM$ có $\widehat{OIM} = \widehat{OAM} = 90° \Rightarrow OIAM$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AIM} = \widehat{AOM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AM). (1)

Theo chứng minh câu a, ta có tứ giác $MIOB$ nội tiếp đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BIM} = \widehat{BOM}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM). (2)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $\begin{cases} OA = OB \\ MA = MB \end{cases}$

$\Rightarrow \Delta OAM = \Delta OBM\ (\text{c.c.c}) \Rightarrow \widehat{AOM} = \widehat{BOM}.$ (3)

Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra $\widehat{AIM} = \widehat{BIM} \Rightarrow IM$ là tia phân giác của $\widehat{AIB}$.

d) Ta có $\dfrac{1}{MC} + \dfrac{1}{MD} = \dfrac{2}{MK} \Leftrightarrow \dfrac{MK}{MC} + \dfrac{MK}{MD} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{MC - CK}{MC} + \dfrac{MD - DK}{MD} = 2 \Leftrightarrow 1 + \dfrac{CK}{MC} + 1 - \dfrac{DK}{MD} = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{CK}{MC} - \frac{DK}{MD} = 0 \Leftrightarrow \frac{CK}{MC} = \frac{DK}{MD} \Leftrightarrow \frac{CK}{DK} = \frac{MC}{MD}.$$

Do đó, ta đi chứng minh $\dfrac{CK}{DK} = \dfrac{MC}{MD}$.

Gọi H là giao điểm của AB và OM.

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có: $\begin{cases} OA = OB \\ MA = MB \end{cases} \Rightarrow OM$ là trung trực của AB

$\Rightarrow OM \perp AB$ tại H.

Xét tam giác OAM vuông tại A, đường cao AH có: $MA^2 = MH.MO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông).

Mà theo chứng minh câu b, ta có $MA^2 = MC.MD$ nên $MH.MO = MC.MD \Rightarrow \dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$.

Xét tam giác HCM và tam giác DOM có: $\dfrac{MH}{MC} = \dfrac{MD}{MO}$ (chứng minh trên); $\widehat{OMD}$ chung.

Suy ra $\Delta HCM \backsim \Delta DOM$ $(c.g.c) \Rightarrow \widehat{CHM} = \widehat{ODM}$ (hai góc tương ứng) (3)

$\Rightarrow OHCD$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow \widehat{OHD} = \widehat{OCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OD).

Mặt khác $OC = OD \Rightarrow \Delta OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC} = \widehat{ODM}$.

Do đó $\widehat{OHD} = \widehat{ODC}$. (4)

Từ (3) và (4), suy ra: $\widehat{OHD} = \widehat{CHM}$.

Lại có: $\widehat{OHD} + \widehat{DHK} = 90^\circ$; $\widehat{CHM} + \widehat{CHK} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DHK} = \widehat{CHK}$

$\Rightarrow HK$ là tia phân giác của $\widehat{CHD} \Rightarrow \dfrac{CK}{DK} = \dfrac{CH}{DH}$. (5)

Vì $HK \perp HM$ và HK là tia phân giác của $\widehat{CHD}$

$\Rightarrow HM$ là tia phân giác ngoài của $\widehat{CHD} \Rightarrow \dfrac{CH}{DH} = \dfrac{CM}{MD}$. (6)

Từ (3) và (4), suy ra $\dfrac{CK}{DK} = \dfrac{MC}{MD} \Rightarrow$ Điều phải chứng minh.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho 3 số thực dương a, b, c thoả mãn $a+b+c=1$.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $A = \sqrt{a+b} + \sqrt{b+c} + \sqrt{c+a}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có: $\sqrt{a+b} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\sqrt{\dfrac{2}{3}}.\sqrt{a+b} \le \sqrt{\dfrac{3}{2}}.\dfrac{\dfrac{2}{3}+a+b}{2} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}.\left(\dfrac{2}{3}+a+b\right)$.

Chứng minh tương tự ,ta có: $\sqrt{b+c} \le \dfrac{\sqrt{6}}{4}.\left(\dfrac{2}{3}+b+c\right)$; $\sqrt{c+a} \le \dfrac{\sqrt{6}}{4}.\left(\dfrac{2}{3}+c+a\right)$.

Suy ra $A \le \dfrac{\sqrt{6}}{4}.\left[2+2(a+b+c)\right] = \dfrac{\sqrt{6}}{4}.(2+2.1) = \sqrt{6}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} a+b=b+c=c+a=\dfrac{2}{3} \\ a+b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

Vậy GTLN của A bằng $\dfrac{1}{3}$ khi $a=b=c=\dfrac{1}{3}$.

TRƯỜNG THCS CHU VĂN AN

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} mx+y=5 \\ 2x-y=2 \end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình với $m=5$.

b) Xác định m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất và thoả mãn $x+y=12$.

Lời giải

a) Với $m=5$, hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} 5x+y=5 \\ 2x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x=7 \\ 2x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$.

Vậy với $m=5$, hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(1;0)$.

b) Ta có: $\begin{cases} mx+y=5 \\ 2x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+2x=7 \\ 2x-y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)x=7 \\ 2x-y=2 \end{cases}$.

Để hệ phương trình có nghiệm duy nhất thì phương trình $(m+2)x=7$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2\neq 0 \\ 7\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m\neq -2.$

Vì hệ phương trình có nghiệm thoả mãn $x+y=12$ nên

$$\begin{cases} 2x-y=2 \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=14 \\ x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ \dfrac{14}{3}+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{14}{3} \\ y=\dfrac{22}{3} \end{cases}.$$

Thay $x=\dfrac{14}{3}$; $y=\dfrac{22}{3}$ vào phương trình $mx+y=5$, ta được: $\dfrac{14}{3}m+\dfrac{22}{3}=5 \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$ (thoả mãn).

Vậy với $m=-\dfrac{1}{2}$ thì hệ phương trình có nghiệm duy nhất và thoả mãn $x+y=12$.

Bài 2 (2,0 điểm). Cho hàm số $y=x^2$ có đồ thị (P) và hàm số $y=ax+b$ có đồ thị (d).

a) Xác định a và b biết đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;2)$ và $B(1;3)$.

b) Với a, b vừa tìm được, hãy tìm toạ độ giao điểm của (P) và (d).

Lời giải

a) Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;2)$ nên $2=a.0+b \Leftrightarrow b=2$.

Vì đường thẳng (d) đi qua điểm $B(1;3)$. nên $3=a.1+b \Leftrightarrow a+b=3 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

Vậy với $a=1, b=2$ thì đường thẳng (d) đi qua điểm $A(0;2)$ và $B(1;3)$.

b) Với $a=1, b=2,$ ta có: $(d): y=x+2.$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là $x^2=x+2 \Leftrightarrow x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow x^2-2x+x-2=0 \Leftrightarrow x(x-2)+(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \Rightarrow y=4 \\ x=-1 \Rightarrow y=1 \end{array}\right.$.

Vậy toạ độ giao điểm của (P) và (d) là $(2;4); (-1;1).$

Bài 3 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:***

Hai giá sách có 450 cuốn. Nếu chuyển 50 cuốn từ giá sách thứ nhất sang giá sách thứ hai thì số sách ở giá thứ hai sẽ bằng $\frac{4}{5}$ số sách còn lại ở giá sách thứ nhất. Tính số sách trong mỗi giá lúc ban đầu.

Lời giải

Gọi số sách trong giá thứ nhất, giá thứ hai lúc đầu lần lượt là x, y (cuốn).

Điều kiện: $x; y \in \mathbb{N}^*; 50<x<450; y<450.$

Vì tổng số sách ở hai giá là 450 cuốn nên $x+y=450.$ (1)

Nếu chuyển 50 cuốn từ giá sách thứ nhất sang giá sách thứ hai thì số sách ở giá thứ hai sẽ bằng $\frac{4}{5}$ số sách còn lại ở giá sách thứ nhất nên ta $y+50=\frac{4}{5}(x-50) \Leftrightarrow 4x-5y=450.$ (2)

Từ (1) và $(2),$ ta có hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l} x+y=450 \\ 4x-5y=450 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=300 \\ y=150 \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy lúc đầu giá thứ nhất có 300 cuốn sách, giá thứ hai có 150 cuốn sách.

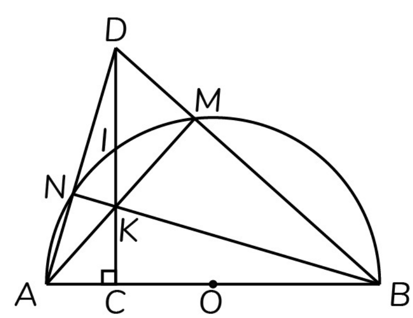
Bài 4 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. C là một điểm nằm giữa O và A. Đường thẳng vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn trên tại I. K là một điểm bất kỳ nằm trên đoạn thẳng CI (K khác C và I), tia AK cắt nửa đường tròn (O) tại M, tia BM cắt tia CI tại D.

a) Chứng minh các điểm A, C, M, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $CK.CD=CA.CB.$

c) Gọi N là giao điểm của AD và đường tròn (O). Chứng minh B, K, N thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì M thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $\widehat{AMB}=90°$

$\Rightarrow \widehat{AMD}=90°.$

Xét tứ giác $ACMD$ có $\widehat{ACD}=\widehat{AMD}=90°$

$\Rightarrow ACMD$ là tứ giác nội tiếp (dấu hiệu nhận biết)

$\Rightarrow$ Các điểm A, C, M, D cùng thuộc một đường tròn.

b) Xét tam giác DMK vuông tại M có $\widehat{DKM}+\widehat{KDM}=90°.$

Xét tam giác ACK vuông tại C có $\widehat{CKA}+\widehat{KAC}=90°.$

Mặt khác $\widehat{DKM}=\widehat{AKC}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{KDM}=\widehat{CKA}$ hay $\widehat{BDC}=\widehat{CKA}.$

Xét tam giác ACK và tam giác DCB có $\widehat{BDC} = \widehat{CKA}$ (chứng minh trên); $\widehat{ACK} = \widehat{DCB} = 90^\circ$

$\Rightarrow \Delta ACK \backsim \Delta DCB\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{CA}{CD} = \dfrac{CK}{CB} \Rightarrow CK.CD = CA.CB.$

c) Vì N thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $\widehat{ANB} = 90^\circ \Rightarrow BN \perp AD.$ (1)

Xét tam giác ABD có DC và AM là hai đường cao của tam giác, cắt nhau tại K

$\Rightarrow K$ là trực tâm tam giác $ABD \Rightarrow BK \perp AD.$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra ba điểm B, K, N thẳng hàng.

Bài 5 (0,5 điểm). Biết $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z = -34$.

Tính giá trị biểu thức: $M = (x-4)^{2020} - (y-4)^{2021} + (z-4)^{2022}$.

Lời giải

Ta có: $4x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 4xy - 4xz + 2yz - 6y - 10z = -34$

$\Leftrightarrow \left(4x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz + 2yz\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) + \left(z^2 - 10z + 25\right) = 0.$

$\Leftrightarrow (2x-y-z)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 0.$

Vì $\begin{cases}(2x-y-z)^2 \ge 0\\(y-3)^2 \ge 0\\(z-5)^2 \ge 0\end{cases}$ nên $(2x-y-z)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(2x-y-z)^2 = 0\\(y-3)^2 = 0\\(z-5)^2 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 4\\y = 3\\z = 5\end{cases}.$

Thay $x = 4,\ y = 3,\ z = 5$ vào M, ta được:

$$M = (4-4)^{2020} - (3-4)^{2021} + (5-4)^{2022} = 0^{2020} - (-1)^{2021} + 1^{2022} = 2.$$

Vậy $M = 2$.

TRƯỜNG THCS & THPT LÔMÔNÔXỐP

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,5 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ và $B=\dfrac{3x}{x-2\sqrt{x}+1}-\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$ với $x>0,\ x\neq 1$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=0,09$.

b) Rút gọn biểu thức B và $M=B:A$.

c) Tìm giá trị của x để $M<1$.

Lời giải

a) Với $x=0,09$ thoả mãn điều kiện $x>0,\ x\neq 1$.

Thay $x=0,09$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, ta được: $A=\dfrac{\sqrt{0,09}}{\sqrt{0,09}-1}=\dfrac{0,3}{0,3-1}=-\dfrac{3}{7}$.

Vậy $A=-\dfrac{3}{7}$ với $x=0,09$.

b) Với $x>0,\ x\neq 1$, ta có:

$$B=\frac{3x}{x-2\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{3x}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}-\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{3x-\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{3x-x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}=\frac{2x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.$$

$$M=\frac{2x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}:\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\frac{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}.\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}.$$

Vậy với $x>0,\ x\neq 1$ thì $B=\dfrac{2x+\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}$ và $M=\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$.

c) Để $M<1$ thì $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}<1\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}-1<0\Leftrightarrow \dfrac{2\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}<0\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}<0.$

Vì $\sqrt{x}+2>0$ với mọi $x>0,\ x\neq 1$ nên $\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1}<0\Leftrightarrow \sqrt{x}-1<0\Leftrightarrow \sqrt{x}<1\Leftrightarrow 0\le x<1$.

Kết hợp với điều kiện xác định, ta được $0<x<1$.

Vậy với $0<x<1$ thì $M<1$.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Trong kì thi vào 10, hai trường A và B có tất cả 750 học sinh tham gia dự thi. Kết quả hai trường có 614 học sinh trúng tuyển. Biết rằng trường A có 80% học sinh trúng tuyển, trường B có 84% học sinh trúng tuyển. Hỏi mỗi trường có bao nhiêu học sinh tham gia dự thi vào lớp 10?

Lời giải

Gọi số học sinh tham gia dự thi vào lớp 10 của trường A và trường B lần lượt là x, y (học sinh).

Điều kiện: $x; y \in \mathbb{N}^*; x, y < 750$.

Vì hai trường có tất cả 750 học sinh nên $x + y = 750$. $\quad (1)$

Vì trường A có 80% học sinh trúng tuyển, trường B có 84% học sinh trúng tuyển và cả hai trường có 614 học sinh tuyển tuyển nên $80\%x + 84\%y = 614 \Leftrightarrow 0,8x + 0,84y = 614$. $\quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 750 \\ 0,8x + 0,84y = 614 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,8x + 0,8y = 600 \\ 0,8x + 0,84y = 614 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 750 \\ 0,04y = 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 750 \\ y = 350 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 400 \\ y = 350 \end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy trường A có 400 học sinh tham gia dự thi, trường B có 350 học sinh tham gia dự thi.

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Giải phương trình và hệ phương trình sau:

a) $x^2 - x - 7 = 0$. $\qquad$ b) $\begin{cases} \sqrt{x-3} + \dfrac{5}{2y+1} = -3 \\ 3\sqrt{x-3} - \dfrac{1}{2y+1} = 7 \end{cases}$.

2. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$; $(d_2): y = -mx + 2m^2$ (m là tham số).

a) Tìm m để hai đường thẳng trên cùng đi qua điểm A có hoành độ là 0.

b) Tìm m để hai đường thẳng trên cắt nhau tại một điểm nằm bên phải trục tung.

Lời giải

1a) Xét phương trình: $x^2 - x - 7 = 0$.

Ta có: $\Delta = (-1)^2 - 4.1.(-7) = 29 > 0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt là: $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{29}}{2}$ và $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}$.

Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S = \left\{\dfrac{1-\sqrt{29}}{2}; \dfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right\}$.

b) Điều kiện xác định: $\begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ 2y + 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ y \ne -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-3} = a \\ \dfrac{1}{2y+1} = b \end{cases}$ $(a \ge 0; b \ne 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành

$\begin{cases} a + 5b = -3 \\ 3a - b = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 5b = -3 \\ 15a - 5b = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a = 32 \\ a + 5b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 2 + 5b = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 5b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \end{cases}$ (thoả mãn).

Khi đó: $\begin{cases}\sqrt{x-3}=2\\ \dfrac{1}{2y+1}=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-3=4\\ 2y+1=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=7\\ y=-1\end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(7;-1)$.

2a) Gọi $A(0;a)$.

Vì đường thẳng $(d_1): y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ đi qua điểm $A(0;a)$ nên $a=-\frac{1}{2}.0+\frac{1}{2} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$.

Suy ra đường thẳng (d_1) và (d_2) cùng đi qua điểm $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Vì đường thẳng $(d_2): y=-mx+2m^2$ đi qua điểm $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ nên

$\frac{1}{2}=-m.0+2m^2 \Leftrightarrow m^2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy $m=\pm\frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là:

$$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-mx+2m^2 \Leftrightarrow \left(m-\frac{1}{2}\right)x=2m^2-\frac{1}{2}. \qquad (1)$$

Để hai đường thẳng đã cho cắt nhau tại một điểm nằm bên phải trục tung thì phương trình (1) có nghiệm duy nhất thoả mãn $x>0$.

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m-\frac{1}{2}\neq 0 \Leftrightarrow m\neq\frac{1}{2}$.

Với $m\neq\frac{1}{2}$, ta có: $(1) \Leftrightarrow x=\dfrac{2m^2-\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}}=\dfrac{2\left(m-\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}{m-\frac{1}{2}}=2\left(m+\frac{1}{2}\right)$.

Do đó phương trình (1) có nghiệm $x>0$ khi $2\left(m+\frac{1}{2}\right)>0 \Leftrightarrow m>-\frac{1}{2}$.

Vậy với $m>-\frac{1}{2}$ và $m\neq\frac{1}{2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm nằm bên phải trục tung.

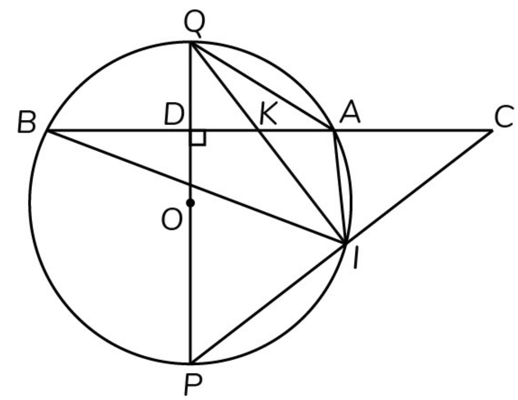
Bài 4 (3,5 điểm). Cho đường tròn (O) và một dây cung AB (AB không đi qua tâm), trên tia đối của tia AB lấy điểm C. Kẻ đường kính PQ vuông góc với AB tại D (P thuộc cung AB lớn). Tia CP cắt đường tròn (O) tại I $(I\neq P)$. Dây AB và dây QI cắt nhau tại K.

a) Chứng minh tứ giác $PIKD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh IQ là tia phân giác của $\widehat{AIB}$ và $AQ^2=QK.QI$.

c) Giả sử cho đường tròn (O) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm cố định A và B, điểm C cố định trên tia đối của tia AB. Chứng minh đường thẳng IQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



a) Vì I thuộc đường tròn (O) đường kính PQ nên $\widehat{PIQ}=90^\circ$ hay $\widehat{PIK}=90^\circ$.

Vì $PQ\perp AB$ tại K nên $\widehat{PDK}=90^\circ$.

Xét tứ giác $PIKD$ có $\widehat{PIK}+\widehat{PDK}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow PIKD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì PQ vuông góc với dây AB nên Q là điểm chính giữa cung AB.

Mặt khác: $\widehat{QIA}=\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AQ}$; $\widehat{QIB}=\frac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{BQ}$

$\Rightarrow \widehat{AIQ}=\widehat{BIQ}\Rightarrow IQ$ là tia phân giác $\widehat{AIB}$.

Ta có: $\widehat{QIB}=\widehat{QAB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BQ).

Mà $\widehat{AIQ}=\widehat{BIQ}$ nên $\widehat{AIQ}=\widehat{QAB}$.

Xét tam giác AIQ và tam giác KAQ có: $\widehat{AIQ}=\widehat{QAB}$ (chứng minh trên); $\widehat{AQI}$ chung.

Suy ra $\Delta AIQ\backsim\Delta KAQ\,(\text{g.g})\Rightarrow \dfrac{AQ}{QK}=\dfrac{QI}{AQ}\Rightarrow AQ^2=QK.QI.$

c) Vì IQ là tia phân giác $\widehat{AIB}$ nên $\dfrac{KA}{KB}=\dfrac{IA}{IB}.$ $\quad(1)$

Lại có $IK\perp IC\Rightarrow IC$ là tia phân giác ngoài của $\widehat{AIB}\Rightarrow \dfrac{IA}{IB}=\dfrac{CA}{CB}.$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2), suy ra $\dfrac{KA}{KB}=\dfrac{CA}{CB}.$

Mà A, B, C cố định nên K cố định

$\Rightarrow IQ$ luôn đi qua điểm K cố định khi đường tròn (O) thay đổi.

TRƯỜNG THCS TRƯNG VƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4}$ và $B=\dfrac{18-\sqrt{x}}{x-4}+\dfrac{4}{2-\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=25$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Đặt $P=A.B$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức P.

Lời giải

a) Với $x=25$ thoả mãn điều kiện $x\ge 0,\ x\ne 4$.

Thay $x=25$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4}$, ta được: $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4}=\dfrac{\sqrt{25}+1}{25-4}=\dfrac{5+1}{21}=\dfrac{2}{7}$.

Vậy với $x=25$ thì $A=\dfrac{2}{7}$.

b) Với $x\ge 0,\ x\ne 4$, ta có:

$$B=\frac{18-\sqrt{x}}{x-4}+\frac{4}{2-\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}=\frac{18-\sqrt{x}}{x-4}-\frac{4}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{18-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{4\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{18-\sqrt{x}-4\left(\sqrt{x}+2\right)+\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{18-\sqrt{x}-4\sqrt{x}-8+x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}.$$

Vậy với $x\ge 0,\ x\ne 4$ thì $P=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$.

c) Với $x\ge 0,\ x\ne 4$, ta có: $P=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x-4}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}.\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}$.

Vì $x\ge 0,\ x\ne 4$ nên $\sqrt{x}+1\ge 1$.

Xét $\dfrac{1}{P}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+2\right)^2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left[\left(\sqrt{x}+1\right)+1\right]^2}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\left(\sqrt{x}+1\right)^2+2\left(\sqrt{x}+1\right)+1}{\sqrt{x}+1}=\sqrt{x}+1+2+\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}.$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\sqrt{x}+1$ và $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, ta có:

$$\sqrt{x}+1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}\geq 2\sqrt{\left(\sqrt{x}+1\right).\frac{1}{\sqrt{x}+1}}=2.$$

Suy ra $\dfrac{1}{P}\geq 2+2=4\Rightarrow P\leq\dfrac{1}{4}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x}+1=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}+1\right)^2=1\Leftrightarrow\sqrt{x}+1=1\Leftrightarrow\sqrt{x}=0\Leftrightarrow x=0.$

Vậy GTLN của P bằng $\dfrac{1}{4}$ khi $x=0.$

Bài 2 (2,5 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Trong tháng đầu, hai tổ làm được 600 sản phẩm. Sang tháng thứ hai, tổ I vượt mức 10% và tổ II vượt mức 20% so với tháng đầu, do đó tháng thứ hai cả hai tổ làm được 685 sản phẩm. Hỏi tháng đầu, mỗi tổ làm được bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Gọi số sản phẩm tổ I và tổ II làm được trong tháng đầu lần lượt là x, y (sản phẩm).

Điều kiện: $x, y\in\mathbb{N}^*;\ x, y<600.$

Vì tháng đầu, cả hai tổ làm được 600 sản phẩm nên $x+y=600.$ $\quad(1)$

Tháng thứ hai, tổ I làm được số sản phẩm là: $x+10\%.x=1,1x$ (sản phẩm).

Tháng thứ hai, tổ II làm được số sản phẩm là: $y+20\%.y=1,2y$ (sản phẩm).

Tháng thứ hai, cả hai tổ làm được số sản phẩm là: $1,1x+1,2y$ (sản phẩm).

Vì trong tháng thứ hai, cả hai tổ làm được 685 sản phẩm nên $1,1x+1,2y=685.$ $\quad(2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình $\begin{cases}x+y=600\\1,1x+1,2y=685\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1,1x+1,1y=660\\1,1x+1,2y=685\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=600\\0,1y=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=600\\y=250\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+250=600\\y=250\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=350\\y=250\end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy tháng đầu tổ I làm được 350 sản phẩm, tổ II làm được 250 sản phẩm.

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Trong cùng mặt phẳng toạ độ Oxy, cho Parabol $(P): y=x^2$ và đường thẳng $(d): y=x+2$. Tìm toạ độ các giao điểm của (P) và (d). Vẽ (P) và (d).

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+y=2m\\x+my=m+1\end{cases}$. Tìm m để hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)$ mà cả x và y đều nhận giá trị nguyên.

Lời giải

1. Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là

$$x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \Rightarrow y = 4 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$$

Vậy toạ độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là $A(2;4)$; $B(-1;1)$.

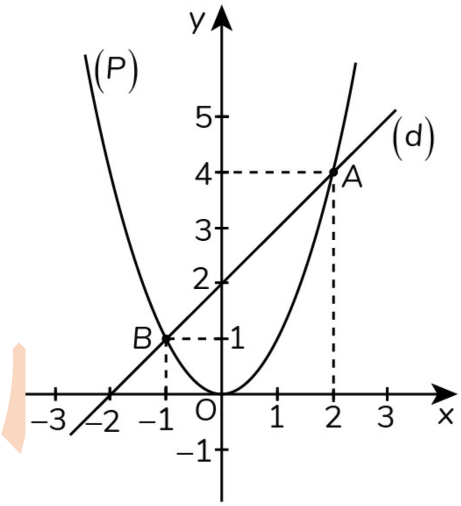
Ta có bảng:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x+2$	0	1	2	3	4
$y = x^2$	4	1	0	1	4

Đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(2;4)$; $B(-1;1)$.

Parabol (P) đi qua các điểm $A(2;4)$; $C(1;1)$; $O(0;0)$; $B(-1;1)$; $D(-2;4)$.

Đồ thị đường thẳng (d) và Parabol (P) như hình vẽ.



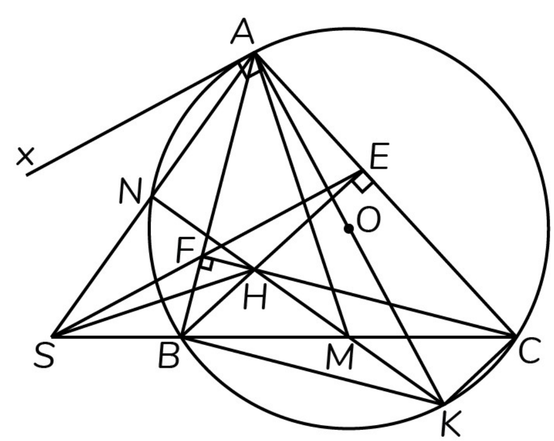
Bài 4 (3,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) với $AB < AC$. Các đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại H.

a) Chứng minh tứ giác $BECF$ nội tiếp.

b) Chứng minh $OA \perp EF$.

c) Gọi M là trung điểm của BC, S là giao điểm của đường thẳng EF và BC. Kẻ đường kính AK của đường tròn (O). Chứng minh H, K, M thẳng hàng và chứng minh $SH \perp AM$.

Lời giải



a) Vì BE và CF là hai đường cao của tam giác ABC nên $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$.

Xét tứ giác $BECF$ có $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90°$.

Mà E, F là hai đỉnh kề nhau nên tứ giác $BECF$ nội tiếp.

b) Kẻ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn như hình vẽ.

Ta có: $\widehat{BAx} = \widehat{ACB}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn cung AB).

Theo chứng minh câu a, tứ giác $BECF$ nội tiếp nên $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Suy ra $\widehat{BAx} = \widehat{AFE}$. Mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $Ax // EF \Rightarrow EF \perp OA$.

c) Vì C thuộc đường tròn đường kính AK nên $\widehat{ACK} = 90° \Rightarrow AC \perp KC$.

Lại có $BE \perp AC \Rightarrow BE // KC$ hay $BH // KC$.

Chứng minh tương tự, ta được: $CH // BK$.

Tứ giác $BHCK$ có hai cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành

$\Rightarrow BC$ và HK cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Mà M là trung điểm của BC nên HK đi qua M hay ba điểm H, K, M thẳng hàng.

Gọi N là giao điểm của SA và (O).

Vì $BECF$ là tứ giác nội tiếp (chứng minh câu a) nên $\widehat{SFB} = \widehat{SCE} \Rightarrow \Delta SBF \backsim \Delta SEC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{SB}{SE} = \dfrac{SF}{SC} \Rightarrow SB.SC = SE.SF.$ $\quad (1)$

Vì $ANBC$ là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên $\widehat{SNB} = \widehat{SCA} \Rightarrow \Delta SNB \backsim \Delta SCA$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{SN}{SC} = \dfrac{SB}{SA} \Rightarrow SB.SC = SN.SA.$ $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $SN.SA = SE.SF \Rightarrow \dfrac{SN}{SE} = \dfrac{SF}{SA}$

$\Rightarrow \Delta SNF \backsim \Delta SEA$ (c.g.c) $\Rightarrow \widehat{SNF} = \widehat{SEA} \Rightarrow ANFE$ là tứ giác nội tiếp. $\quad (3)$

Xét tứ giác $AEHF$ có $\widehat{AEH} + \widehat{AFH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow AEHF$ là tứ giác nội tiếp. $\quad (4)$

Từ (3) và (4), suy ra 5 điểm A, N, F, H, E cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow$ Tứ giác $ANHE$ nội tiếp $\Rightarrow ANH = 180^\circ - \widehat{AEH} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

Mặt khác N thuộc đường tròn (O), suy ra N, H, M, K thẳng hàng.

Xét tam giác SAM có AH vuông góc với SM (do H là trực tâm tam giác ABC nên $AH \perp BC$); MH vuông góc với SA (do $NH \perp SA$ và M, H, N thẳng hàng).

Suy ra H là trực tâm tam giác $SAM \Rightarrow SH \perp AM$ (điều phải chứng minh).

Bài 5 (0,5 điểm). Cho $1 \le x, y, z \le 2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{4 - y^2} + \sqrt{4 - z^2}$.

Lời giải

Đặt $\sqrt{4 - x^2} = a$; $\sqrt{4 - y^2} = b$; $\sqrt{4 - z^2} = c \Rightarrow S = a + b + c$.

Vì $1 \le x, y, z \le 2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ nên $0 \le a, b, c \le \sqrt{3}$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 6$.

Ta có: $S^2 = (a + b + c)^2 \le 3(a^2 + b^2 + c^2) = 18 \Rightarrow S \le 3\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \sqrt{2} \Leftrightarrow x = y = z = \sqrt{2}$.

Vì $0 \le a, b, c \le \sqrt{3}$ nên $a(a - \sqrt{3}) \le 0 \Leftrightarrow a^2 \le \sqrt{3}a$.

Tương tự, ta có: $b^2 \le \sqrt{3}b$; $c^2 \le \sqrt{3}c$.

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \le \sqrt{3}(a + b + c) \Leftrightarrow a + b + c \ge \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{\sqrt{3}} \Rightarrow S \ge 2\sqrt{3}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số a, b, c có một số bằng 0 và hai số bằng $\sqrt{3}$ hay trong 3 số x, y, z có một số bằng 2 và hai số bằng 1.

Vậy GTLN của S bằng $3\sqrt{2}$ khi $x = y = z = \sqrt{2}$; GTNN của S bằng $2\sqrt{3}$ khi trong 3 số x, y, z có một số bằng 2 và hai số bằng 1.

TRƯỜNG THCS HOÀNG HOA THÁM

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$ với $x\ge 0,\ x\ne 1.$

a) Tính giá trị của biểu thức B khi $x=25.$

b) Rút gọn biểu thức $A.$

c) Tìm x để biểu thức $S=A.B$ có giá trị lớn nhất.

Lời giải

a) Với $x=25$ thoả mãn điều kiện $x\ge 0,\ x\ne 1.$

Thay $x=25$ vào biểu thức $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}$, ta được: $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{25}+3}{\sqrt{25}+1}=\dfrac{5+3}{5+1}=\dfrac{4}{3}.$

Vậy với $x=25$ thì $B=\dfrac{4}{3}.$

b) Với $x\ge 0,\ x\ne 1,$ ta có:

$$A=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}+\frac{1}{\sqrt{x}+2}-\frac{3\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2}=\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}+\frac{\sqrt{x}-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}-\frac{3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$=\frac{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x}-1-3\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{x-1}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.$$

Vậy với $x\ge 0,\ x\ne 1$ thì $A=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.$

c) Với $x\ge 0,\ x\ne 1,$ ta có: $S=A.B=\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2}.\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}=1+\dfrac{1}{\sqrt{x}+2}.$

Vì $x\ge 0$ nên $\sqrt{x}\ge 0\Rightarrow \sqrt{x}+2\ge 2\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x}+2}\le \dfrac{1}{2}\Rightarrow S\le \dfrac{3}{2}.$

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x=0.$

Vậy GTLN của S bằng $\dfrac{3}{2}$ khi $x=0.$

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Hai vòi cùng chảy vào một bể không chứa nước thì sau 6 giờ 40 phút sẽ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy riêng trong 3 giờ, vòi thứ hai chảy riêng trong 5 giờ thì cả hai vòi chảy được $\dfrac{7}{12}$ bể. Hỏi nếu mỗi vòi chảy một mình thì phải bao lâu mới đầy bể?

Lời giải

Đổi 6 giờ 40 phút $=\dfrac{20}{3}$ giờ.

Gọi thời gian vòi thứ nhất và vòi thứ hai chảy một mình đầy bể lần lượt là x, y (giờ).

Điều kiện: $x, y > \dfrac{20}{3}$.

Trong 1 giờ, vòi thứ nhất chảy được $\dfrac{1}{x}$ (bể).

Trong 1 giờ, vòi thứ hai chảy được $\dfrac{1}{y}$ (bể).

Vì hai vòi cùng chảy thì sau 6 giờ 40 phút đầy bể nên $\dfrac{20}{3}.\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{20}$. $\quad(1)$

Vì vòi thứ nhất chảy riêng trong 3 giờ, vòi thứ hai chảy riêng trong 5 giờ thì cả hai vòi chảy được $\dfrac{7}{12}$ bể nên $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{7}{12}$. $\quad(2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{20}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{7}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{3}{x}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{9}{20}\\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{y}=\dfrac{7}{12}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{2}{y}=\dfrac{2}{15}\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{20}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=15\\ x=12\end{cases}$.

Vậy nếu chảy một mình, vòi thứ nhất chảy đầy bể sau 12 giờ, vòi thứ hai chảy đầy bể sau 15 giờ.

Bài 3 (2,0 điểm).

1. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}\sqrt{3x-1}-\sqrt{2y+1}=1\\ 2\sqrt{3x-1}+3\sqrt{2y+1}=12\end{cases}$.

2. Cho hệ phương trình $\begin{cases}mx+4y=10-m\\ x+my=4\end{cases}$.

a) Giải hệ phương trình với $m=1$.

b) Xác định giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)$ sao cho $x>0, y>0$.

Lời giải

1. Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x-1\ge 0\\ 2y+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge \dfrac{1}{3}\\ y\ge -\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}\sqrt{3x-1}=a\\ \sqrt{2y+1}=b\end{cases}$ $(a, b\ge 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành:

$\begin{cases}a-b=1\\ 2a+3b=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3a-3b=3\\ 2a+3b=12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5a=15\\ a-b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ 3-b=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$ (thoả mãn).

Khi đó, ta có: $\begin{cases} \sqrt{3x-1}=3 \\ \sqrt{2y+1}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1=9 \\ 2y+1=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=10 \\ 2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $\left(x;y\right)=\left(\dfrac{10}{3};\dfrac{3}{2}\right)$.

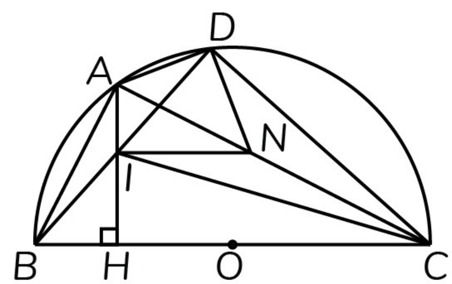
Bài 4 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn tâm O đường kính BC. Trên nửa đường tròn lấy điểm A (khác B và C). Kẻ AH vuông góc với BC (H thuộc BC). Trên cung AC lấy điểm D bất kì (khác A và C), đường thẳng BD cắt AH tại I.

a) Chứng minh $IHCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AB^2=BI.BD$.

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn nằm trên một đường thẳng cố định khi D thay đổi trên cung AC.

Lời giải



a) Vì D thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BDC}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{IDC}=90^\circ$.

Vì AH vuông góc với BC nên $\widehat{IHC}=90^\circ$.

Xét tứ giác $IHCD$ có: $\widehat{IDC}+\widehat{IHC}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow IHCD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Vì A thuộc đường tròn đường kính BC nên $\widehat{BAC}=90^\circ$

$\Rightarrow \widehat{ABC}+\widehat{ACB}=90^\circ$.

Mặt khác $\widehat{ABH}+\widehat{HAB}=90^\circ \Rightarrow \widehat{BAH}=\widehat{ACB}$.

Lại có: $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$\Rightarrow \widehat{ADB}=\widehat{BAH}=\widehat{BAI}$.

Xét tam giác ABI và tam giác DBA có: $\widehat{ABD}$ chung; $\widehat{ADB}=\widehat{BAI}$ (chứng minh trên).

Suy ra $\Delta ABI \backsim \Delta DBA\left(g.g\right) \Rightarrow \dfrac{AB}{BD}=\dfrac{BI}{AB} \Rightarrow AB^2=BI.BD$.

c) Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC tại N.

Vì $AH\perp BC$ nên $AI\perp IN$.

Lại có $\widehat{INA}=\widehat{BCA}$ (hai góc đồng vị); $\widehat{ACB}=\widehat{ADB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{INA}=\widehat{BDA}=\widehat{IDA} \Rightarrow AIND$ là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{AIN}=90^\circ$, suy ra tứ giác $AIND$ nội tiếp đường tròn đường kính AN

$\Rightarrow$Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AID là trung điểm AN

$\Rightarrow$Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AID luôn nằm trên đường thẳng AC cố định khi D thay đổi trên cung AC.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho các số nguyên x, y thoả mãn $3x+2y=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $H=x^2-y^2+\left|xy\right|+\left|x+y\right|-2$.

Lời giải

Vì x, y là các số nguyên thoả mãn $3x+2y=1$ nên x, y là hai số nguyên trái dấu $\Rightarrow |xy|=-xy$.

Từ $3x+2y=1 \Leftrightarrow y=-x+\dfrac{1-x}{2}$. Vì y nguyên nên đặt $\dfrac{1-x}{2}=t\ (t\in\mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x=1-2t \\ y=3t-1 \end{cases}$.

Ta có: $H=(1-2t)^2-(3t-1)^2-(1-2t)(3t-1)+|1-2t+3t-1|-2$

$=1-4t+4t^2-9t^2+6t-1-3t+1+6t^2-2t+|t|-2$

$=t^2-3t+|t|-1.$

Nếu $t\ge 0$ thì $H=t^2-2t-1=(t-1)^2-2\ge -2.$ Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $t=1$.

Nếu $t<0$ thì $H=t^2-4t-1>-1>-2.$

Vậy GTNN của H bằng -2 khi $x=-1; y=2.$

TRƯỜNG THCS GIẢNG VÕ

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

Bài 1 (2,0 điểm). Cho hai biểu thức: $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$ và $B=\dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}-\dfrac{2}{2-\sqrt{x}}-\dfrac{7\sqrt{x}-6}{x-4}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4.$

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x=16.$

b) Cho biểu thức $P=\dfrac{B}{A}$. Chứng minh $P=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}.$

c) Tìm tất cả giá trị của x để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Với $x=16$ thoả mãn điều kiện $x\ge 0,\ x\ne 4.$

Thay $x=16$ vào biểu thức $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$, ta được: $A=\dfrac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}=\dfrac{\sqrt{16}-2}{2\sqrt{16}+3}=\dfrac{4-2}{2.4+3}=\dfrac{2}{11}.$

Vậy với $x=16$ thì $A=\dfrac{2}{11}.$

b) Với $x\ge 0,\ x\ne 4,$ ta có:

$$P=\frac{B}{A}=B:A=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}-\frac{2}{2-\sqrt{x}}-\frac{7\sqrt{x}-6}{x-4}\right):\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}=\left(\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}+\frac{2}{\sqrt{x}-2}-\frac{7\sqrt{x}-6}{x-4}\right):\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$$

$$=\left[\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}+\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}-\frac{7\sqrt{x}-6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}\right]:\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)+2\left(\sqrt{x}+2\right)-\left(7\sqrt{x}-6\right)}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{x-2\sqrt{x}+3\sqrt{x}-6+2\sqrt{x}+4-7\sqrt{x}+6}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$$

$$=\frac{x-4\sqrt{x}+4}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}=\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\left(\sqrt{x}+2\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}:\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}=\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}.\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2}=\frac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}.$$

Vậy $P=\dfrac{2\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+2}$ với $x\ge 0,\ x\ne 4$ (điều phải chứng minh).

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán sau bằng cách lập hệ phương trình:***

Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi là 240m. Người ta dự định mở rộng khu vườn bằng cách tăng chiều dài thêm 9m, tăng chiều rộng thêm 7m sao cho khu vườn vẫn là hình chữ nhật, do vậy diện tích khu vườn sẽ tăng thêm 963m^2. Tính chiều dài và chiều rộng của khu vườn ban đầu.

Lời giải

Gọi chiều rộng và chiều dài của khu vườn lần lượt là $x, y\ (\text{m})$. Điều kiện: $0 < x < y < 120$.

Vì chu vi của khu vườn là 240m nên $2(x+y) = 240 \Leftrightarrow x + y = 120.\qquad (1)$

Diện tích khu vườn ban đầu là $xy\ (\text{m}^2)$.

Khi tăng chiều dài thêm 9m, tăng chiều rộng thêm 7m thì diện tích khu vườn là $(x+7)(y+9)\ (\text{m}^2)$.

Vì diện tích khu vườn tăng 963m^2 nên

$(x+7)(y+9) = xy + 963 \Leftrightarrow xy + 9x + 7y + 63 = xy + 963 \Leftrightarrow 9x + 7y = 900.\quad (2)$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=120 \\ 9x+7y=900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x+7y=840 \\ 9x+7y=900 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=60 \\ x+y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ 30+y=120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=30 \\ y=90 \end{cases} \text{(thoả mãn).}$$

Vậy khu vườn ban đầu có chiều rộng 30m, chiều dài 90m.

Bài 3 (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{2}{x+1} + \dfrac{2}{y-2} = 6 \\ \dfrac{5}{x+1} - \dfrac{1}{y-2} = 3 \end{cases}.$

2. Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 3m = 0\ (1)$ (x là ẩn số).

a) Giải phương trình (1) khi $m = 5$.

b) Tìm tất cả giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm.

Lời giải

1. Điều kiện: $x \neq -1;\ y \neq 2$.

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} = a \\ \dfrac{1}{y-2} = b \end{cases}$ $(a, b \neq 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} 2a+2b=6 \\ 5a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 5a-b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ 6a=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 1+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{(thoả mãn).}$$

Khi đó, ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{x+1} = 1 \\ \dfrac{1}{y-2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=1 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=4 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là $(x;y) = (0;4)$.

2a) Thay $m=5$ vào phương trình, ta được: $x^2-2(5-1)x+5^2-3.5=0 \Leftrightarrow x^2-8x+10=0.$

Ta có: $\Delta'=(-4)^2-1.10=16-10=6>0$

$\Rightarrow$ Phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x_1=4-\sqrt{6}$ và $x_2=4+\sqrt{6}$.

Vậy với $m=5$ thì phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{4-\sqrt{6};4+\sqrt{6}\right\}$.

Bài 4 (3,0 điểm). Cho đường tròn (O) và điểm K nằm bên ngoài đường tròn (O). Kẻ hai tiếp tuyến KA, KB với đường tròn (O), A và B là các tiếp điểm. Từ điểm K vẽ đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại hai điểm C, D ($KC<KD$, d không đi qua tâm O).

a) Chứng minh tứ giác $KAOB$ là tứ giác nội tiếp.

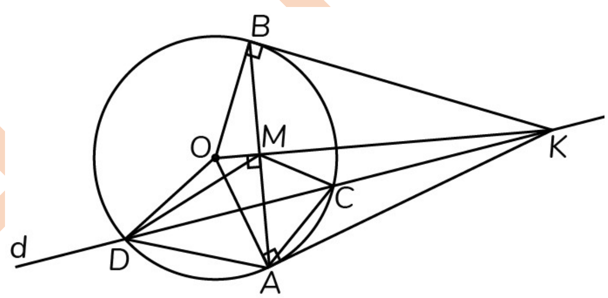
b) Gọi giao điểm của đoạn thẳng AB với đoạn thẳng OK là M.

Chứng minh $KA^2=KC.KD=KM.KO$.

c) Chứng minh đường thẳng AB chứa tia phân giác của $\widehat{CMD}$.

Lời giải

Không mất tính tổng quát, giả sử đường thẳng d như hình vẽ.



a) Vì KA, KB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\widehat{OAK}=\widehat{OBK}=90^\circ$.

Xét tứ giác $KAOB$ có

$\widehat{OAK}+\widehat{OBK}=90^\circ+90^\circ=180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $KAOB$ là tứ giác nội tiếp.

b) Xét tam giác KAD và tam giác KCA có: $\widehat{AKD}$ chung; $\widehat{KDA}=\widehat{KAC}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AC)

$\Rightarrow \Delta KAD \backsim \Delta KCA\ (g.g) \Rightarrow \dfrac{KA}{KC}=\dfrac{KD}{KA} \Rightarrow KA^2=KC.KD.$ $\quad (1)$

Vì KA, KB là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\begin{cases} KA=KB \\ OA=OB \end{cases}$

$\Rightarrow OK$ là trung trực của đoạn thẳng $AB \Rightarrow OK\perp AB$ tại M.

Xét tam giác AOK vuông tại A, đường cao AM, ta có: $KA^2=KM.KO$ (hệ thức lượng trong tam giác vuông). $\quad (2)$

Từ (1) và (2), suy ra $KA^2=KC.KD=KM.KO$ (điều phải chứng minh).

c) Vì $KC.KD=KM.KO$ (chứng minh câu b) nên $\dfrac{KC}{KO}=\dfrac{KM}{KD}$.

Xét tam giác KCM và tam giác KOD có: $\dfrac{KC}{KO}=\dfrac{KM}{KD}$ (chứng minh trên); $\widehat{DOK}$ chung).

Suy ra $\Delta KCM \backsim \Delta KOD\ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{KCM}=\widehat{KOD}$

$\Rightarrow OMCD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \widehat{OMD} = \widehat{OCD}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung OD).

Lại có: $OC = OD \Rightarrow \Delta OCD$ cân tại $O \Rightarrow \widehat{OCD} = \widehat{ODC} \Rightarrow \widehat{OMD} = \widehat{ODC}$.

Mà theo chứng minh trên $\Delta KCM \backsim \Delta KOD$ nên $\widehat{ODC} = \widehat{CMK}$.

Suy ra $\widehat{OMD} = \widehat{CMK}$.

Ta có: $\widehat{OMD} + \widehat{DMC} = 90^\circ$; $\widehat{CMK} + \widehat{CMA} = 90^\circ$.

Do đó: $\widehat{DMA} = \widehat{CMA} \Rightarrow MA$ là tia phân giác của $\widehat{CMD}$.

Hay đường thẳng AB chứa tia phân giác của $\widehat{CMD}$.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho a, b là các số dương thoả mãn $a + b = 3$. Chứng minh rằng:

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \ge \frac{169}{18}.$$

Lời giải

Đặt $A = \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2$.

Ta có: $A = \left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, ta có:

$$\frac{16}{81}a^2 + \frac{1}{a^2} \ge 2\sqrt{\frac{16}{81}a^2.\frac{1}{a^2}} = \frac{8}{9};\ \frac{16}{81}b^2 + \frac{1}{b^2} \ge 2\sqrt{\frac{16}{81}b^2.\frac{1}{b^2}} = \frac{8}{9};\ \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \ge 2.$$

Suy ra $A \ge \frac{65}{81}\left(a^2 + b^2\right) + 2.\frac{8}{9} + 2.2 \ge \frac{65}{81}.\frac{\left(a+b\right)^2}{2} + \frac{52}{9} = \frac{65}{81}.\frac{3^2}{2} + \frac{52}{9} = \frac{169}{18}$ (điều phải chứng minh).

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \frac{3}{2}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT NGUYỄN TẤT THÀNH

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (3,0 ĐIỂM)

1 – A	2 – A	3 – B	4 – D	5 – C	6 – D	7 – D	8 – C	9 – D	10 – B	11 – C	12 - C

PHẦN II. TỰ LUẬN (7,0 ĐIỂM)

Bài 1 (2,0 điểm). Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ -5x+8y=-3 \end{cases}$.

2. $\begin{cases} 2\sqrt{x}+3\sqrt{y-3}=18 \\ 3\sqrt{x}-\sqrt{y-3}=5 \end{cases}$.

Lời giải

1. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1 \\ -5x+8y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-\dfrac{10}{3}y=10 \\ -5x+8y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{14}{3}y=7 \\ -5x+8y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{2} \\ -5x+8.\dfrac{3}{2}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3}{2} \\ x=3 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=\left(\dfrac{3}{2};2\right)$.

2. Điều kiện: $x\ge 0$; $y\ge 3$.

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x}=a \\ \sqrt{y-3}=b \end{cases}$ $(a;\, b\ge 0)$, ta được hệ phương trình

$\begin{cases} 2a+3b=18 \\ 3a-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=18 \\ 9a-3b=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11a=33 \\ 3a-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ 9-b=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases}$ (thoả mãn $a;\, b\ge 0$).

Khi đó, ta có $\begin{cases} \sqrt{x}=3 \\ \sqrt{y-3}=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y-3=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9 \\ y=19 \end{cases}$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y)=(9;19)$.

Bài 2 (2,0 điểm). ***Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình***

Một sân bóng đá mini hình chữ nhật với các kích thước đã định, có chu vi là $140m$. Biết rằng nếu giảm chiều rộng của sân đi $5m$ và tăng chiều dài thêm $8m$ thì diện tích của sân bóng không thay đổi. Hãy tính các kích thước của sân bóng đó.

Lời giải

Gọi chiều rộng, chiều dài của sân bóng lần lượt là $x,\, y\ (m)$. Điều kiện: $5<x<y<70$.

Vì chu vi của sân bóng hình chữ nhật là $140m$ nên $2(x+y)=140 \Leftrightarrow x+y=70$. (1)

Diện tích ban đầu của sân bóng là $xy\ (m^2)$.

Diện tích của sân bóng khi giảm chiều rộng 5m và tăng chiều dài 8m là $(x-5)(y+8)\ (\text{m}^2)$.

Vì diện tích lúc sau của sân bóng không đổi nên

$$xy=(x-5)(y+8)\Leftrightarrow xy=xy+8x-5y-40\Leftrightarrow 8x-5y=40. \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có hệ phương trình

$\begin{cases}x+y=70\\8x-5y=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5x+5y=350\\8x-5y=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}13x=390\\x+y=70\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\30+y=70\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=30\\y=40\end{cases}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy sân bóng có chiều rộng là 30m, chiều dài là 40m.

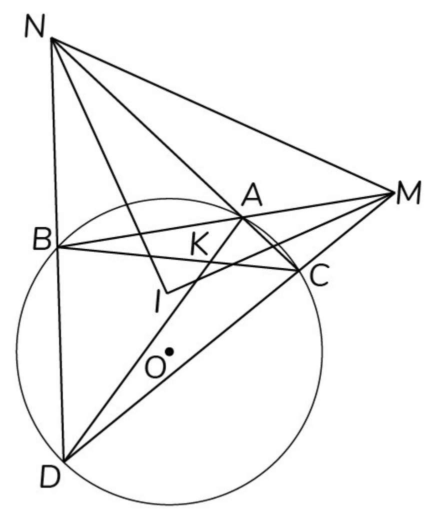
Bài 3 (2,5 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn kẻ hai cát tuyến MAB, MCD với đường tròn đó (A nằm giữa M và B, C nằm giữa M và D).

1. Chứng minh $\Delta MAD\backsim\Delta MCB$.

2. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại K. Biết $\widehat{M}=60^\circ$, $\widehat{AKC}=80^\circ$. Tính $\widehat{BCD}$.

3. AC và BD cắt nhau tại N. Hai phân giác của $\widehat{M}$ và $\widehat{N}$ cắt nhau tại I. Chứng minh $IM\perp IN$.

Lời giải



a) Vì bốn điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn nên

$ABDC$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow\widehat{MAC}=\widehat{MDB}$.

Xét tam giác MAC và tam giác MDB có

$\widehat{BMD}$ chung; $\widehat{MAC}=\widehat{MDB}$ (chứng minh trên).

Do đó $\Delta MAC\backsim\Delta MDB$ (g.g) (điều phải chứng minh).

b) Ta có $\widehat{M}=\dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BD}-\text{sđ}\overset{\frown}{AC})=60^\circ$

$\Rightarrow\text{sđ}\overset{\frown}{BD}-\text{sđ}\overset{\frown}{AC}=120^\circ$.

Mặt khác $\widehat{AKC}=\dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BD}+\text{sđ}\overset{\frown}{AC})=80^\circ$

$\Rightarrow\text{sđ}\overset{\frown}{BD}+\text{sđ}\overset{\frown}{AC}=160^\circ$.

Từ đó, ta tìm được $\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=140^\circ$.

Vậy $\widehat{BCD}=\dfrac{1}{2}\text{sđ}\overset{\frown}{BD}=\dfrac{1}{2}.140^\circ=70^\circ$ (số đo góc nội tiếp bằng nửa số đo cung bị chắn).

c) Ta có: $\widehat{N}=\dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{DC}-\text{sđ}\overset{\frown}{AB})$.

Suy ra $\widehat{M}+\widehat{N}=\dfrac{1}{2}(\text{sđ}\overset{\frown}{BD}-\text{sđ}\overset{\frown}{AC}+\text{sđ}\overset{\frown}{DC}-\text{sđ}\overset{\frown}{AB})$.

Vì MI là phân giác $\widehat{M}$ nên $\widehat{MIA}=\dfrac{1}{2}\widehat{M}$.

Vì NI là phân giác $\widehat{N}$ nên $\widehat{NIA}=\dfrac{1}{2}\widehat{N}$.

Do đó: $\widehat{MIA}+\widehat{NIA}=\frac{1}{2}\left(\widehat{M}+\widehat{N}\right)=\frac{1}{4}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD}-\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}+\text{sđ}\,\overset{\frown}{DC}-\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB})$.

Xét tam giác AMN và tam giác ABC có $\widehat{MAN}=\widehat{BAC}$ (đối đỉnh)

$\Rightarrow \widehat{AMN}+\widehat{ANM}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=\frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}+\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB})$.

Xét tam giác IMN có $\widehat{IMN}+\widehat{INM}=\widehat{IMA}+\widehat{AMN}+\widehat{INA}+\widehat{ANM}=\left(\widehat{IMA}+\widehat{INA}\right)+\left(\widehat{AMN}+\widehat{ANM}\right)$

$$\Rightarrow \widehat{IMN}+\widehat{INM}=\frac{1}{4}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD}-\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}+\text{sđ}\,\overset{\frown}{DC}-\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB})+\frac{1}{2}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}+\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB}).$$

$$=\frac{1}{4}(\text{sđ}\,\overset{\frown}{BD}+\text{sđ}\,\overset{\frown}{AC}+\text{sđ}\,\overset{\frown}{DC}+\text{sđ}\,\overset{\frown}{AB})=\frac{1}{4}.360^\circ=90^\circ$$

$\Rightarrow \widehat{MIN}=90^\circ \Rightarrow IM\perp IN$ (điều phải chứng minh).

Bài 4 (0,5 điểm). Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2=2\\2y^3=(y+x)(2-xy)\end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases}x^2+y^2=2\\2y^3=(y+x)(2-2xy)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\2y^3=(y+x)(x^2+y^2-xy)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\2y^3=x^3+y^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=2\\x^3=y^3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2+y^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\2x^2=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\x=\pm1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=y=1\\x=y=-1\end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y)\in\{(-1;-1);(1;1)\}$.

---------------------------- HẾT ----------------------------

TRƯỜNG THCS & THPT TẠ QUANG BỬU

ĐỀ KIỂM TRA GIỮA HỌC KÌ II

Năm học 2021 – 2022

Môn: Toán lớp 9

Thời gian làm bài: 90 phút

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM (1,5 ĐIỂM)

1 – C	2 – D	3 – B	4 – C	5 – A	6 – A

PHẦN II. TỰ LUẬN (8,5 ĐIỂM)

Bài 1 (2,0 điểm). *Giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình*

Một cửa hàng có tổng cộng 28 chiếc ti vi và tủ lạnh. Giá mỗi cái tủ lạnh là 15 triệu đồng, mỗi cái ti vi là 30 triệu đồng. Nếu bán hết 28 cái ti vi và tủ lạnh này chủ cửa hàng sẽ thu được 720 triệu đồng. Hỏi cửa hàng có bao nhiêu cái ti vi và tủ lạnh?

Lời giải

Gọi số ti vi và tủ lạnh cửa hàng có lần lượt là x, y (chiếc). Điều kiện: $x, y \in \mathbb{N}^*; x, y < 28$.

Vì cửa hàng có tổng cộng 28 chiếc ti vi và tủ lạnh nên $x + y = 28$. (1)

Vì bán hết ti vi và tủ lạnh với giá 15 triệu đồng mỗi ti vi và 30 triệu đồng mỗi tủ lạnh thì thu được 720 triệu đồng nên $15x + 30y = 720 \Leftrightarrow x + 2y = 48$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $\begin{cases} x + y = 28 \\ x + 2y = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 28 \\ y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 20 \end{cases}$.

Vậy cửa hàng có 8 chiếc ti vi và 20 chiếc tủ lạnh

Bài 2 (2,5 điểm).

1. Giải hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$.

b) $\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x-2}} + |y - 1| = 6 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} - 3|y - 1| = -2 \end{cases}$.

2. Cho Parabol $(P): y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng $(d): y = -x$.

a) Vẽ Parabol (P).

b) Xác định toạ độ các giao điểm của Parabol (P) và đường thẳng (d).

Lời giải

1a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 10 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 4 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là $(x;y) = (2;1)$.

2. Điều kiện: $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Đặt $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = a \\ |y-1| = b \end{cases}$ $(a > 0,\, b \ge 0)$, hệ phương trình đã cho trở thành

$\begin{cases} 5a+b=6 \\ a-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15a+3b=18 \\ a-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16a=16 \\ 5a+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ 5+b=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$ (thoả mãn $a>0,\, b\ge 0$).

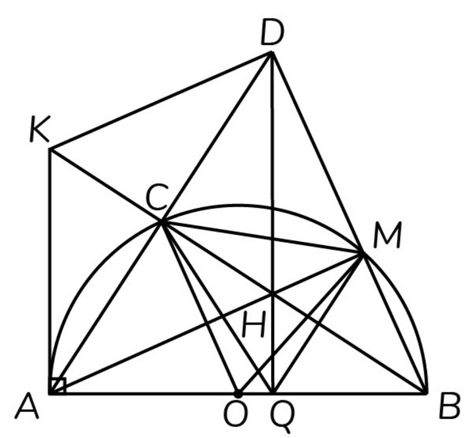
Khi đó, ta có: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} = 1 \\ |y-1| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2} = 1 \\ \left[\begin{array}{l} y-1=-1 \\ y-1=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=1 \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$ (thoả mãn).

Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm là $(x;y) \in \{(3;0);(3;2)\}$.

Bài 3 (3,5 điểm). Cho nửa đường tròn (O), đường kính AB. Lấy hai điểm C, M bất kỳ thuộc nửa đường tròn sao cho $AC = CM$ (AC và CM khác MB). Gọi D là giao điểm của AC và BM, H là giao điểm của AM và BC.

1. Chứng minh tứ giác $CHMD$ nội tiếp.
2. Chứng minh $DA.DC = DB.DM$.
3. Tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) cắt tia BC tại K. Chứng minh rằng $KD = \dfrac{AK+HD}{2}$.
4. Gọi Q là giao điểm của DH và AB. Chứng minh rằng khi điểm C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho $AC = CM$ thì đường tròn ngại tiếp tam giác MCQ luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



1. Vì M, C thuộc đường tròn (O) đường kính BC nên

$\widehat{ACB} = \widehat{AMB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DCH} = \widehat{DMH} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $CHMD$ có: $\widehat{DCH} + \widehat{DMH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $CHMD$ nội tiếp.

2. Xét tam giác ADM và tam giác BDC có: $\widehat{ADB}$ chung;

$\widehat{DAM} = \widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CM)

$\Rightarrow \Delta ADM \backsim \Delta BDC$ (g.g)

$\Rightarrow \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DM}{DC} \Rightarrow DA.DC = DB.DM$.

3. Xét tam giác ACM có $CA = CM$ nên tam giác ACM cân tại $C \Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CMA}$.

Mà $\widehat{CAM} + \widehat{CDM} = 90^\circ$; $\widehat{CMA} + \widehat{CMD} = \widehat{AMD} = 90^\circ$ nên $\widehat{CMD} = \widehat{CDM}$

$\Rightarrow \Delta CDM$ cân tại $C \Rightarrow CD = CM$. Suy ra $CA = CD = CM \Rightarrow C$ là trung điểm của AD.

Mặt khác $HC \perp AD \Rightarrow HK$ là trung trực của đoạn thẳng $AD \Rightarrow KA = KD$ và $HA = HD$. $\quad (1)$

Vì $AC = CM$ nên $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{CM}$.

Lại có: $\widehat{CAM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CM}$; $\widehat{CAK} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{AC}$

$\Rightarrow \widehat{CAM} = \widehat{CAK} \Rightarrow AC$ là tia phân giác của $\widehat{KAH}$.

Mặt khác $AC \perp KH \Rightarrow \Delta AKH$ cân tại $A \Rightarrow AK = AH$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $AK = AH = HD = KD \Rightarrow KD = \dfrac{AK + HD}{2}$.

4. Xét tam giác ABD có $BC \perp AD$, $AM \perp BD$, $BC \cap AM = \{H\}$

$\Rightarrow H$ là trực tâm tam giác $ABD \Rightarrow DQ \perp AB$.

Tứ giác $AQHC$ có $\widehat{AQH} + \widehat{ACH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{CQH} = \widehat{CAH} = \widehat{CAM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CM}$.

Tứ giác $BQHM$ có $\widehat{BQH} + \widehat{BMH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{HQM} = \widehat{HBM} = \widehat{CBM} = \dfrac{1}{2}$sđ$\overset{\frown}{CM}$.

Suy ra $\widehat{CQM} = \widehat{CQH} + \widehat{MQH} =$ sđ$\overset{\frown}{CM} = \widehat{COM}$

$\Rightarrow OCMQ$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$Khi điểm C di chuyển trên nửa đường tròn sao cho $AC = CM$ thì đường tròn ngại tiếp tam giác MCQ luôn đi qua điểm O cố định.

Bài 4 (0,5 điểm). Giải phương trình $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$.

Lời giải

Điều kiện: $-\dfrac{1}{3} \le x \le 6$.

Ta có: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{3x+1} - 4\right) + \left(1 - \sqrt{6-x}\right) + 3x^2 - 14x - 5 = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}-4} + \dfrac{1-6+x}{1-\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}-4} + \dfrac{x-5}{1-\sqrt{6-x}} + (x-5)(3x+1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-5)\left[\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}-4} + \dfrac{1}{1-\sqrt{6-x}} + (3x+1)\right] = 0.$

Vì $-\dfrac{1}{3} \le x \le 6$ nên $\dfrac{3}{\sqrt{3x+1}-4} + \dfrac{1}{1-\sqrt{6-x}} + (3x+1) > 0 \Rightarrow x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 5$.

---------------------------- HẾT ----------------------------