

## CHUYÊN ĐỀ: CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ CÓ GIÁ TRỊ KHÔNG XÁC ĐỊNH

Khi giải các bài tập về phân số, ta thường gặp một số bài toán có các phân số mà tử số, hoặc mẫu số, hoặc cả tử và mẫu chưa biết rõ giá trị. Các phân số này gọi chung là các phân số có giá trị không xác định.

Liên quan đến các phân số trên, ta thường gặp một số dạng bài như sau:

### 1. Dạng 1: Bài toán về phân số có giá trị nguyên

**Ví dụ 1:** Cho phân số  $A = \frac{n+3}{n-2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $A$  có giá trị nguyên

**Giải**

**Cách 1:** Đưa về điều kiện tử số : mẫu số

Để  $A = \frac{n+3}{n-2}$  có giá trị nguyên thì  $n+3 : n-2 \Rightarrow n-2+5 : n-2 \Rightarrow 5 : n-2$

$\Rightarrow n-2 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Ta có bảng giá trị sau:

|       |   |    |   |    |
|-------|---|----|---|----|
| $n-2$ | 1 | -1 | 5 | -5 |
| $n$   | 3 | 1  | 7 | -3 |

Vậy  $n \in \{3; 1; 7; -3\}$

**Cách 2:** Tách phân số

Đối với cách này, từ phân số ban đầu ta sẽ tách về thành phần nguyên và phần phân số bằng cách tìm cách làm cho mẫu số xuất hiện ở trên tử

Ta thấy phân số ban đầu có tử là  $n+3$ , mẫu là  $n-2$

Do đó ta sẽ tách tử thành:  $n+3 = n-2+5$

Ta có:

$$A = \frac{n+3}{n-2} = \frac{n-2+5}{n-2} = \frac{n-2}{n-2} + \frac{5}{n-2} = 1 + \frac{5}{n-2}$$

Để  $A$  là số nguyên thì  $\frac{5}{n-2}$  là số nguyên  $\Rightarrow 5 : n-2 \Rightarrow n-2 \in \{\pm 1; \pm 5\}$

Đến đây ta lập bảng và tính như ở cách 1

**\* Giả sử câu hỏi đổi thành:** Tìm  $n \in \mathbb{Z}$  để phân số  $A = \frac{n+3}{n-2}$  có giá trị nguyên âm/nguyên dương?

Nếu gặp dạng câu hỏi như trên, thì sau khi chỉ ra  $n - 2 \in \{\pm 1; \pm 5\}$  ta có bảng giá trị sau:

|                       |   |     |   |     |
|-----------------------|---|-----|---|-----|
| $n - 2$               | 1 | - 1 | 5 | - 5 |
| $n$                   | 3 | 1   | 7 | - 3 |
| $A = \frac{n+3}{n-2}$ | 6 | - 4 | 2 | 0   |

Vậy để  $A$  nguyên dương thì  $n \in \{3; 7\}$ ; để  $A$  nguyên âm thì  $n = - 4$

**Ví dụ 2:** Cho phân số  $B = \frac{2n-3}{n+4}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số có giá trị nguyên.

**Giải**

$$B = \frac{2n-3}{n+4} = \frac{2(n+4)-11}{n+4} = \frac{2(n+4)}{n+4} - \frac{11}{n+4} = 2 - \frac{11}{n+4}$$

Để  $B = 2 - \frac{11}{n+4}$  là số nguyên thì  $\frac{11}{n+4}$  là số nguyên  $\Rightarrow 11 : n + 4 \Rightarrow n + 4 \in \{\pm 1; \pm 11\}$

Ta có bảng giá trị sau:

|         |     |     |    |      |
|---------|-----|-----|----|------|
| $n + 4$ | 1   | - 1 | 11 | - 11 |
| $n$     | - 3 | - 5 | 7  | - 15 |

Vậy  $n \in \{- 3; - 5; 7; - 15\}$

**Ví dụ 3:** Cho phân số  $C = \frac{5n+1}{3-2n}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số có giá trị nguyên

**Giải**

Để  $C = \frac{5n+1}{3-2n}$  là số nguyên thì  $5n + 1 : 3 - 2n$

$$\begin{cases} 5n+1 : 3-2n \\ 3-2n : 3-2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(5n+1) : 3-2n \\ 5.(3-2n) : 3-2n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10n+2 : 3-2n \\ 15-10n : 3-2n \end{cases}$$

$$\Rightarrow 10n+2+15-10n : 3-2n$$

$$\Rightarrow 17 : 3-2n$$

$$\Rightarrow 3 - 2n \in \{\pm 1; \pm 17\}$$

Ta có bảng giá trị sau:

|          |   |     |      |      |
|----------|---|-----|------|------|
| $3 - 2n$ | 1 | - 1 | 17   | - 17 |
| $2n$     | 2 | 4   | - 14 | 20   |
| $n$      | 1 | 2   | - 7  | 10   |

Vậy  $n \in \{1; 2; - 7; 5\}$

## 2. Dạng 2: Bài toán về giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất của phân số

**Ví dụ 1:** Cho phân số  $A = \frac{3}{n-2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

**Giải**

\* **Tìm giá trị lớn nhất:**

Để  $A = \frac{3}{n-2}$  có giá trị lớn nhất thì  $n-2$  phải là số nguyên dương nhỏ nhất  $\Rightarrow n-2 = 1 \Rightarrow n = 3$

Khi đó GTLN của phân số tại  $n = 3$  là:  $A = \frac{3}{3-2} = 3$

\* **Tìm giá trị nhỏ nhất:**

Để  $A = \frac{3}{n-2}$  có giá trị nhỏ nhất thì  $n-2$  phải là số nguyên âm lớn nhất  $\Rightarrow n-2 = -1 \Rightarrow n = 1$

Khi đó GTNN của phân số tại  $n = 1$  là:  $A = \frac{3}{1-2} = -3$

**Ví dụ 2:** Cho phân số  $B = \frac{3n+7}{n-3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

**Giải**

$$B = \frac{3n+7}{n-3} = \frac{3 \cdot (n-3) + 16}{n-3} = 3 + \frac{16}{n-3}$$

\* Để phân số  $B$  có giá trị lớn nhất thì  $\frac{16}{n-3}$  phải có giá trị lớn nhất

$\Rightarrow n-3$  phải là số nguyên dương nhỏ nhất  $\Rightarrow n-3 = 1 \Rightarrow n = 4$

Khi đó GTLN của  $B$  tại  $n = 4$  là:  $B = 3 + \frac{16}{4-3} = 3 + 16 = 19$

\* Để phân số B có giá trị nhỏ nhất thì  $\frac{16}{n-3}$  phải có giá trị nhỏ nhất

$\Rightarrow n - 3$  phải là số nguyên âm lớn nhất  $\Rightarrow n - 3 = -1 \Rightarrow n = 2$

Khi đó GTNN của B tại  $n = 2$  là:  $B = 3 + \frac{16}{2-3} = 3 + \frac{16}{-1} = 3 + (-16) = -13$

**Ví dụ 3:** Cho phân số  $M = \frac{5n-7}{2n-1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm n để phân số M có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

**Giải**

Ta có:  $2.M = \frac{2.(5n-7)}{2n-1} = \frac{10n-14}{2n-1} = \frac{5(2n-1)-9}{2n-1} = 5 - \frac{9}{2n-1}$

\* Để M có giá trị lớn nhất thì 2M lớn nhất  $\Rightarrow \frac{9}{2n-1}$  phải có giá trị nhỏ nhất

$\Rightarrow 2n - 1$  phải là số nguyên âm lớn nhất  $\Rightarrow 2n - 1 = -1 \Rightarrow n = 0$

Khi đó GTLN của M tại  $n = 0$  là:  $M = \frac{5.0-7}{2.0-1} = \frac{-7}{-1} = 7$

\* Để M có giá trị nhỏ nhất thì 2M nhỏ nhất  $\Rightarrow \frac{9}{2n-1}$  phải có giá trị lớn nhất

$\Rightarrow 2n - 1$  phải là số nguyên dương nhỏ nhất  $\Rightarrow 2n - 1 = 1 \Rightarrow n = 1$

Khi đó GTLN của M tại  $n = 1$  là:  $M = \frac{5.1-7}{2.1-1} = \frac{-2}{1} = -2$

**Chú ý:**

Ở ví dụ trên, một số bạn thường hay mắc phải sai lầm khi làm như sau

Để  $M = \frac{5n-7}{2n-1}$  có giá trị lớn nhất thì  $2n - 1$  là số nguyên dương nhỏ nhất  $\Rightarrow 2n - 1 = 1 \Rightarrow \dots$

Để  $M = \frac{5n-7}{2n-1}$  có giá trị nhỏ nhất thì  $2n - 1$  là số nguyên âm lớn nhất  $\Rightarrow 2n - 1 = -1 \Rightarrow \dots$

Cách đánh giá trên là chưa chính xác. Ta không được đánh giá gì về giá trị của mẫu số khi chưa biết chắc chắn giá trị của tử số.

**3. Dạng 3: Bài toán về phân số tối giản và rút gọn được**

**Ví dụ 1:** Cho phân số  $A = \frac{3n+1}{2n+1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Chứng minh A là phân số tối giản với mọi số nguyên n.

**Giải**

Gọi d là ước chung của  $3n+1$  và  $2n+1$

Ta có:

$$\begin{cases} 3n+1 : d \\ 2n+1 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2.(3n+1) : d \\ 3.(2n+1) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+2 : d \\ 6n+3 : d \end{cases} \Rightarrow (6n+3) - (6n+2) : d \\ \Rightarrow 6n+3 - 6n - 2 : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d \in \{1; -1\}$$

Vậy A là phân số tối giản

**Ví dụ 2:** Cho phân số  $B = \frac{3n-1}{n+2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm n để B là phân số tối giản.

**Giải**

Gọi d là ước chung của  $3n-1$  và  $n+2$ .

Ta có:

$$\begin{cases} 3n-1 : d \\ n+2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-1 : d \\ 3.(n+2) : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3n-1 : d \\ 3n+6 : d \end{cases} \Rightarrow (3n+6) - (3n-1) : d \\ \Rightarrow 3n+6 - 3n+1 : d \Rightarrow 7 : d \\ \Rightarrow d \in \{\pm 1; \pm 7\}$$

Để B là phân số tối giản thì d phải khác 7 và -7

Tức là  $n+2$  không chia hết cho 7

$\Rightarrow n$  không chia 7 dư 5

$\Rightarrow n \neq 7k+5$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

**Nếu câu hỏi ở VD2 đổi thành:** Cho phân số  $B = \frac{3n-1}{n+2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm n để phân số B rút gọn được.

**Giải**

Trình bày tương tự đến bước  $d \in \{\pm 1; \pm 7\}$

Để B rút gọn được thì  $d = 7$  hoặc  $d = -7$

$\Rightarrow n+2 : 7 \Rightarrow n$  chia 7 dư 5

$\Rightarrow n = 7k+5$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

Một số bài tập tự luyện:

### DẠNG 1: BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ CÓ GIÁ TRỊ NGUYÊN

**Bài 1:** Cho phân số  $A = \frac{n-1}{n+2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $A$  có giá trị nguyên

**Bài 2:** Cho phân số  $B = \frac{2n-1}{n+3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $B$  có giá trị nguyên dương

**Bài 3:** Cho phân số  $C = \frac{3n+7}{2n-5}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $C$  có giá trị nguyên âm

### DẠNG 2: BÀI TOÁN VỀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA PHÂN SỐ

**Bài 4:** Cho phân số  $A = \frac{n+1}{n-2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $A$  có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

Giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

**Bài 5:** Cho phân số  $B = \frac{2n+1}{n-3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $B$  có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

Giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

**Bài 6:** Cho phân số  $C = \frac{3n+8}{2n-1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $B$  có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

Giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

### DẠNG 3: BÀI TOÁN VỀ PHÂN SỐ TỐI GIẢN VÀ RÚT GỌN ĐƯỢC

**Bài 7:** Cho phân số  $A = \frac{2n+3}{3n+4}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Chứng minh  $A$  là phân số tối giản với mọi số nguyên  $n$ .

**Bài 8:** Cho phân số  $B = \frac{2n+1}{n-3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

a) Tìm  $n$  để  $B$  là phân số tối giản.

b) Tìm  $n$  để phân số  $B$  rút gọn được.

## ĐÁP ÁN PHẦN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**Bài 1:** Cho phân số  $A = \frac{n-1}{n+2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $A$  có giá trị nguyên

**Giải**

$$A = \frac{n-1}{n+2} = \frac{n+2-3}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2}. \text{ Ta thấy để } \frac{n-1}{n+2} \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{3}{n+2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+2 \in \{-3; -1; 1; 3\}$$

Ta có bảng giá trị sau:

|       |    |    |    |   |
|-------|----|----|----|---|
| $n+2$ | -3 | -1 | 1  | 3 |
| $n$   | -5 | -3 | -1 | 1 |

Vậy  $n \in \{-5; -3; -1; 1\}$

**Bài 2:** Cho phân số  $B = \frac{2n-1}{n+3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $B$  có giá trị nguyên dương

**Giải**

$$B = \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2(n+3)-7}{n+3} = 2 - \frac{7}{n+3}. \text{ Trước tiên ta xét các giá trị của } n \text{ để } B \in \mathbb{Z}.$$

Ta thấy để  $\frac{2n-1}{n+3} \in \mathbb{Z}$  thì  $\frac{7}{n+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n+3 \in \{-7; -1; 1; 7\}$

Ta có bảng giá trị sau:

|       |            |            |              |            |
|-------|------------|------------|--------------|------------|
| $n+3$ | -7         | -1         | 1            | 7          |
| $n$   | -10        | -4         | -2           | 4          |
| $B$   | 3<br>(t/m) | 9<br>(t/m) | -5<br>(loại) | 1<br>(t/m) |

Vậy với  $n \in \{-10; -4; 4\}$  thì phân số  $B$  có giá trị nguyên dương

**Bài 3:** Cho phân số  $C = \frac{3n+7}{2n-5}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $C$  có giá trị nguyên âm

**Giải**

Trước tiên ta xét các giá trị của  $n$  để  $C \in \mathbb{Z}$ .

Ta thấy để  $C \in \mathbb{Z}$  thì  $3n+7 \vdots 2n-5$ .

Ta có  $3n+7 \vdots 2n-5 \Rightarrow 2.(3n+7) = 6n+14 \vdots 2n-5$

$$3.(2n-5) = 6n-15 \vdots 2n-5$$

Do đó  $(6n+14) - (6n-15) = 29 \vdots 2n-5 \Rightarrow 2n-5 \in \{-29; -1; 1; 29\}$

Ta có bảng giá trị sau:

|        |             |              |              |             |
|--------|-------------|--------------|--------------|-------------|
| $2n-5$ | -29         | -1           | 1            | 29          |
| $n$    | -12         | 2            | 3            | 17          |
| $C$    | 1<br>(loại) | -13<br>(t/m) | 16<br>(loại) | 2<br>(loại) |

Vậy  $n = 2$  thì phân số  $C = \frac{3n+7}{2n-5}$  có giá trị là số nguyên âm.

**Bài 4:** Cho phân số  $A = \frac{n+1}{n-2}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $A$  có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

Giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

**Giải**

Ta có:  $A = \frac{n+1}{n-2} = \frac{n-2+3}{n-2} = 1 + \frac{3}{n-2}$ .

Để  $A$  có giá trị lớn nhất thì  $\frac{3}{n-2}$  phải lớn nhất  $\Rightarrow n-2$  là số nguyên dương nhỏ nhất

$\Rightarrow n-2 = 1 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow$  GTLN của  $A = 4$

Để  $A$  có giá trị nhỏ nhất thì  $\frac{3}{n-2}$  phải nhỏ nhất  $\Rightarrow n-2$  là số nguyên âm lớn nhất

$\Rightarrow n-2 = -1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow$  GTNN của  $A = -2$



**Bài 5:** Cho phân số  $B = \frac{2n+1}{n-3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $B$  có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

Giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

**Giải**

$$\text{Ta có: } B = \frac{2n+1}{n-3} = \frac{2(n-3)+7}{n-3} = 2 + \frac{7}{n-3}$$

Để  $B$  đạt giá trị lớn nhất thì  $\frac{7}{n-3}$  phải lớn nhất  $\Rightarrow n-3$  là số nguyên dương nhỏ nhất

$$\Rightarrow n-3 = 1 \Rightarrow n = 4 \Rightarrow \text{GTLN của } B = 9$$

Để  $B$  đạt giá trị nhỏ nhất thì  $\frac{7}{n-3}$  phải nhỏ nhất  $\Rightarrow n-3$  là số nguyên âm lớn nhất

$$\Rightarrow n-3 = -1 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow \text{GTNN của } B = -5$$

**Bài 6:** Cho phân số  $C = \frac{3n+8}{2n-1}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Tìm  $n$  để phân số  $C$  có giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất

Giá trị lớn nhất/ nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?

**Giải**

$$\text{Ta có: } 2.C = \frac{2.(3n+8)}{2n-1} = \frac{6n+16}{2n-1} = \frac{3.(2n-1)+19}{2n-1} = 3 + \frac{19}{2n-1}$$

\* Để  $C$  có giá trị nhỏ nhất thì  $\frac{19}{2n-1}$  phải nhỏ nhất  $\Rightarrow 2n-1$  là số nguyên âm lớn nhất

$$\Rightarrow 2n-1 = -1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow \text{GTNN của } C = -8$$

\* Để  $C$  có giá trị lớn nhất thì  $\frac{19}{2n-1}$  phải lớn nhất  $\Rightarrow 2n-1$  là số nguyên dương nhỏ nhất

$$\Rightarrow 2n-1 = 1 \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \text{GTLN của } C = 11$$

Vậy với  $n = 0$  thì phân số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất bằng -8.

với  $n = 1$  thì phân số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng 11.

**Bài 7:** Cho phân số  $A = \frac{2n+3}{3n+4}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Chứng minh A là phân số tối giản với mọi số nguyên n.

### Giải

Gọi d là ước chung của  $2n+3$  và  $3n+4$ .

Ta có:

$$\begin{cases} 2n+3:d \\ 3n+4:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3.(2n+3):d \\ 2.(3n+4):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6n+9:d \\ 6n+8:d \end{cases} \Rightarrow (6n+9)-(6n+8):d \Rightarrow 1:d \Rightarrow d = 1 \text{ hoặc } d = -1$$

Do đó phân số  $\frac{2n+3}{3n+4}$  là phân số tối giản

Vậy  $\frac{2n+3}{3n+4}$  là phân số tối giản với  $\forall n \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 8:** Cho phân số  $B = \frac{2n+1}{n-3}$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

a) Tìm n để B là phân số tối giản.

b) Tìm n để phân số B rút gọn được.

### Giải

a) Gọi d là ước chung của  $2n+1$  và  $n-3$ .

Ta có:

$$\begin{cases} 2n+1:d \\ n-3:d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1:d \\ 2.(n-3):d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2n+1:d \\ 2n-6:d \end{cases} \Rightarrow (2n+1)-(2n-6):d \Rightarrow 7:d \Rightarrow d \in \{-7; -1; 1; 7\}$$

Để  $\frac{2n+1}{n-3}$  là phân số tối giản thì d phải khác 7; -7 tức là  $n-3$  không chia hết cho 7

$\Rightarrow$  n không chia 7 dư 3 hay n khác  $7k+3$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

b) Từ kết quả câu a, ta thấy:

Để phân số B rút gọn được thì n phải chia 7 dư 3 hay n có dạng  $7k+3$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )