

CHUYÊN ĐỀ: MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP ĐẶC BIỆT ĐỂ SO SÁNH PHÂN SỐ

Thông thường để so sánh hai phân số ta dùng hai cách:

Cách 1: Trong hai phân số cùng mẫu dương, phân số nào có tử lớn hơn thì phân số đó lớn hơn

Cách 2: Trong hai phân số có tử và mẫu đều dương, nếu cùng tử thì phân số nào có mẫu nhỏ hơn, phân số đó sẽ lớn hơn.

Trong một số trường hợp cụ thể, tùy theo đặc điểm của các phân số ta còn có thể so sánh bằng một vài phương pháp khác. Dưới đây sẽ là một số phương pháp đặc biệt để so sánh hai phân số mà không quy đồng mẫu hoặc tử (Chỉ xét các phân số có tử và mẫu dương)

PHƯƠNG PHÁP 1: Dùng số 1 làm trung gian

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} > 1 \text{ và } \frac{c}{d} < 1 \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

Ta sử dụng phương pháp dùng số 1 làm trung gian khi nhận thấy một phân số có tử số lớn hơn mẫu số và phân số còn lại có tử số bé hơn mẫu số

Ví dụ 1: So sánh hai phân số $\frac{2019}{2018}$ và $\frac{2020}{2021}$

$$\text{Vì } \frac{2019}{2018} > 1; \frac{2020}{2021} < 1 \Rightarrow \frac{2019}{2018} > \frac{2020}{2021}$$

PHƯƠNG PHÁP 2: Dùng phân số làm trung gian

Thường có 2 cách chọn phân số trung gian:

Cách 1: Chọn một phân số trung gian có cùng tử với phân số này, cùng mẫu với phân số kia

Ta sử dụng cách trên nếu nhận thấy tử số của phân số thứ nhất bé hơn tử số của phân số thứ hai và mẫu số của phân số thứ nhất lớn hơn mẫu số của phân số thứ 2

Ví dụ 2: So sánh $\frac{64}{85}$ và $\frac{73}{81}$

Để so sánh hai phân số trên, ta sẽ chọn phân số trung gian sao cho phân số này có tử là tử của phân số thứ nhất, có mẫu là mẫu của phân số thứ 2 (hoặc ngược lại)

<p>* Chọn phân số $\frac{64}{81}$ làm trung gian:</p> <p>Vì $\frac{64}{85} < \frac{64}{81}$; $\frac{64}{81} < \frac{73}{81} \Rightarrow \frac{64}{85} < \frac{73}{81}$</p> <p>Vậy $\frac{64}{85} < \frac{73}{81}$</p>	<p>* Chọn phân số $\frac{73}{85}$ làm trung gian:</p> <p>Vì $\frac{64}{85} < \frac{73}{85}$; $\frac{73}{85} < \frac{73}{81} \Rightarrow \frac{64}{85} < \frac{73}{81}$</p> <p>Vậy $\frac{64}{85} < \frac{73}{81}$</p>
---	---

Cách 2: Chọn một phân số trung gian có mối quan hệ với hai phân số đã cho

Ta sử dụng cách trên nếu nhận thấy tử số và mẫu số của phân số thứ nhất bé hơn tử số và mẫu số của phân số thứ hai nhưng cả hai phân số đều xấp xỉ với một phân số nào đó.

Ví dụ 3: So sánh $\frac{12}{47}$ và $\frac{19}{77}$

Ta thấy hai phân số $\frac{12}{47}$; $\frac{19}{77}$ đều xấp xỉ $\frac{1}{4}$ nên ta chọn $\frac{1}{4}$ làm trung gian

Ta có:

$$\frac{12}{47} > \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{19}{77} < \frac{19}{76} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{47} > \frac{19}{77}$$

Vậy $\frac{12}{47} > \frac{19}{77}$

PHƯƠNG PHÁP 3: So sánh “phần thừa” hoặc “phần thiếu” của hai phân số

Cách 1: So sánh “phần thừa”

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} = m + A; \quad \frac{c}{d} = m + B \text{ mà } A > B \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$$

A và B theo thứ tự gọi là “phần thừa” so với m của hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$

Ví dụ 4: So sánh $\frac{79}{76}$ và $\frac{86}{83}$

Ta có: $\frac{79}{76} = 1 + \frac{3}{76}$; $\frac{86}{83} = 1 + \frac{3}{83}$

Vì $\frac{3}{76} > \frac{3}{83} \Rightarrow \frac{79}{76} > \frac{86}{83}$

Cách 2: So sánh “phần thiếu”

Nếu $\frac{a}{b} = m - E$; $\frac{c}{d} = m - F$ mà $E > F$ thì $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$

E và F theo thứ tự gọi là “phần thiếu” so với m của hai phân số $\frac{a}{b}$ và $\frac{c}{d}$

Ví dụ 5: So sánh $\frac{456}{461}$ và $\frac{123}{128}$

Ta có:

$$\frac{456}{461} = 1 - \frac{5}{461}$$

$$\frac{123}{128} = 1 - \frac{5}{128}$$

$$\text{Vì } \frac{5}{461} > \frac{5}{128}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{5}{461} < 1 - \frac{5}{128}$$

$$\Rightarrow \frac{456}{461} < \frac{123}{128}$$

PHƯƠNG PHÁP 4: Viết phân số dưới dạng hỗn số

Trong hai hỗn số dương:

- Hỗn số nào có phần nguyên lớn hơn thì hỗn số đó lớn hơn
- Nếu hai phần nguyên bằng nhau thì hỗn số nào có phần phân số kèm theo lớn hơn thì hỗn số đó lớn hơn

Ví dụ 6: Sắp xếp các hỗn số sau theo thứ tự tăng dần $\frac{498}{31}$; $\frac{466}{29}$; $\frac{513}{34}$

$$\text{Ta có: } \frac{498}{31} = 16\frac{2}{31}; \quad \frac{466}{29} = 16\frac{2}{29}; \quad \frac{513}{34} = 15\frac{3}{34}$$

$$\text{Vì } 15\frac{3}{34} < 16\frac{2}{31} < 16\frac{2}{29} \Rightarrow \frac{513}{34} < \frac{498}{31} < \frac{466}{29}$$

PHƯƠNG PHÁP 5: Cộng cùng một số nguyên dương vào tử và mẫu của một phân số

Với $a, b, m \in \mathbb{N}^*$ ta có:

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} < 1 \text{ thì } \frac{a}{b} < \frac{a+m}{b+m}$$

$$\text{Nếu } \frac{a}{b} > 1 \text{ thì } \frac{a}{b} > \frac{a+m}{b+m}$$

Ví dụ 7: Cho các phân số $A = \frac{10^{20} + 2}{10^{21} + 2}$; $B = \frac{10^{19} + 1}{10^{20} + 1}$. So sánh A và B

$$\text{Để thấy } A = \frac{10^{20} + 2}{10^{21} + 2} < 1$$

$$\Rightarrow \frac{10^{20} + 2}{10^{21} + 2} < \frac{(10^{20} + 2) + 8}{(10^{21} + 2) + 8} = \frac{10^{20} + 10}{10^{21} + 10} = \frac{10(10^{19} + 1)}{10(10^{20} + 1)} < \frac{10^{19} + 1}{10^{20} + 1}$$

Vậy $A < B$

MỘT SỐ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không thực hiện quy đồng; hãy so sánh các phân số:

a) $\frac{77}{95}; \frac{76}{99}$ b) $\frac{59}{101}; \frac{56}{105}$ c) $\frac{18}{91}; \frac{23}{114}$ d) $\frac{58}{89}; \frac{36}{53}$

Bài 2. Không thực hiện quy đồng; hãy so sánh các phân số:

a) $\frac{2011}{2010}; \frac{2012}{2011}$ b) $\frac{2020 \cdot 2021 + 1}{2020 \cdot 2021}; \frac{2021 \cdot 2022 + 1}{2021 \cdot 2022}$
 c) $\frac{145}{149}; \frac{673}{677}$ d) $\frac{53}{57}; \frac{531}{571}$

Bài 3. So sánh $A = \frac{5(11 \cdot 13 - 22 \cdot 26)}{22 \cdot 26 - 44 \cdot 52}$ và $B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548}$

Bài 4.

a) Cho các phân số $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$ và $B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$. So sánh A và B

b) Cho các phân số $C = \frac{100^{2015} + 1}{100^{2014} + 1}$ và $D = \frac{100^{2016} + 1}{100^{2015} + 1}$. So sánh C và D

Bài 5. a) Viết các phân số sau theo thứ tự giảm dần: $\frac{155}{9}; \frac{87}{5}; \frac{123}{8}$

b) Viết các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{659}{217}; \frac{1711}{341}; \frac{721}{143}; \frac{221}{71}$

Bài 6. So sánh: a) $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$ b) $\left(\frac{1}{80}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{243}\right)^6$

ĐÁP ÁN BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Không thực hiện quy đồng; hãy so sánh các phân số:

a) $\frac{77}{95}; \frac{76}{99}$

b) $\frac{59}{101}; \frac{56}{105}$

c) $\frac{18}{91}; \frac{23}{114}$

d) $\frac{58}{89}; \frac{36}{53}$

Giải

<p>a) $\frac{77}{95}; \frac{76}{99}$</p> <p>Ta có: $\frac{77}{95} > \frac{77}{99} > \frac{76}{99}$</p> <p>Vậy $\frac{77}{95} > \frac{76}{99}$</p>	<p>b) $\frac{59}{101}; \frac{56}{105}$</p> <p>Ta có: $\frac{59}{101} > \frac{56}{101} > \frac{56}{105}$</p> <p>Vậy $\frac{59}{101} > \frac{56}{105}$</p>
<p>c) $\frac{18}{91}; \frac{23}{114}$</p> <p>Ta có:</p> $\frac{18}{91} < \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$ $\frac{23}{114} > \frac{23}{115} = \frac{1}{5}$ <p>Vậy $\frac{18}{91} < \frac{23}{114}$</p>	<p>d) $\frac{58}{89}; \frac{36}{53}$</p> <p>Ta có:</p> $\frac{58}{89} < \frac{58}{87} = \frac{2}{3}$ $\frac{36}{53} > \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$ <p>Vậy $\frac{58}{89} < \frac{36}{53}$</p>

Bài 2. Không thực hiện quy đồng; hãy so sánh các phân số:

a) $\frac{2011}{2010}; \frac{2012}{2011}$

b) $\frac{2020.2021+1}{2020.2021}; \frac{2021.2022+1}{2021.2022}$

c) $\frac{145}{149}; \frac{673}{677}$

d) $\frac{53}{57}; \frac{531}{571}$

Giải

<p>a) $\frac{2011}{2010}; \frac{2012}{2011}$</p> $\frac{2011}{2010} = 1 + \frac{1}{2010}$ $\frac{2012}{2011} = 1 + \frac{1}{2011}$ <p>Vì $\frac{1}{2010} > \frac{1}{2011} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2010} > 1 + \frac{1}{2011}$</p> $\Rightarrow \frac{2011}{2010} > \frac{2012}{2011}$ <p>Vậy $\frac{2011}{2010} > \frac{2012}{2011}$</p>	<p>b) $\frac{2020.2021+1}{2020.2021}; \frac{2021.2022+1}{2021.2022}$</p> <p>Ta có:</p> $\frac{2020.2021+1}{2020.2021} = 1 + \frac{1}{2020.2021}$ $\frac{2021.2022+1}{2021.2022} = 1 + \frac{1}{2021.2022}$ <p>Vì: $2020.2021 < 2021.2022$ nên:</p> $\frac{1}{2020.2021} > \frac{1}{2021.2022}$ $\Rightarrow 1 + \frac{1}{2020.2021} > 1 + \frac{1}{2021.2022}$ $\Rightarrow \frac{2020.2021+1}{2020.2021} > \frac{2021.2022+1}{2021.2022}$ <p>Vậy $\frac{2020.2021+1}{2020.2021} > \frac{2021.2022+1}{2021.2022}$</p>
<p>c) $\frac{145}{149}; \frac{673}{677}$</p> <p>Ta có:</p> $\frac{145}{149} = 1 - \frac{4}{149}$ $\frac{673}{677} = 1 - \frac{4}{677}$ <p>Vì $\frac{4}{149} > \frac{4}{677}$</p> $\Rightarrow 1 - \frac{4}{149} < 1 - \frac{4}{677}$ $\Rightarrow \frac{145}{149} < \frac{673}{677}$ <p>Vậy $\frac{145}{149} < \frac{673}{677}$</p>	<p>d) $\frac{53}{57}; \frac{531}{571}$</p> <p>Ta có:</p> $\frac{53}{57} = \frac{530}{570} = 1 - \frac{40}{570}$ $\frac{531}{571} = 1 - \frac{40}{571}$ <p>Vì $\frac{40}{570} > \frac{40}{571}$</p> $\Rightarrow 1 - \frac{40}{570} < 1 - \frac{40}{571}$ $\Rightarrow \frac{530}{570} < \frac{531}{571}$ $\Rightarrow \frac{53}{57} < \frac{531}{571}$ <p>Vậy $\frac{53}{57} < \frac{531}{571}$</p>

Bài 3. So sánh $A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52}$ và $B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548}$

Giải

$$A = \frac{5(11.13 - 22.26)}{22.26 - 44.52} = \frac{5(11.13 - 22.26)}{4(11.13 - 22.26)} = \frac{5}{4} = 1 + \frac{1}{4}$$

$$B = \frac{138^2 - 690}{137^2 - 548} = \frac{138(138 - 5)}{137(137 - 4)} = \frac{138}{137} = 1 + \frac{1}{137}$$

$$\text{Vì } \frac{1}{4} > \frac{1}{137} \Rightarrow 1 + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{137} \Rightarrow A > B$$

Vậy $A > B$

Bài 4.

a) Cho các phân số $A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1}$ và $B = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1}$. So sánh A và B

b) Cho các phân số $C = \frac{100^{2015} + 1}{100^{2014} + 1}$ và $D = \frac{100^{2016} + 1}{100^{2015} + 1}$. So sánh C và D

Giải

$$a) A = \frac{10^{11} - 1}{10^{12} - 1} < \frac{(10^{11} - 1) + 11}{(10^{12} - 1) + 11} = \frac{10^{11} + 10}{10^{12} + 10} = \frac{10(10^{10} + 1)}{10(10^{11} + 1)} = \frac{10^{10} + 1}{10^{11} + 1} = B$$

Vậy $A < B$

$$b) D = \frac{100^{2016} + 1}{100^{2015} + 1} > \frac{(100^{2016} + 1) + 99}{(100^{2015} + 1) + 99} = \frac{100^{2016} + 100}{100^{2015} + 100} = \frac{100(100^{2015} + 1)}{100(100^{2014} + 1)} = \frac{100^{2015} + 1}{100^{2014} + 1} = C$$

Vậy $D > C$

Bài 5. a) Viết các phân số sau theo thứ tự giảm dần: $\frac{155}{9}$; $\frac{87}{5}$; $\frac{123}{8}$

b) Viết các phân số sau theo thứ tự tăng dần: $\frac{659}{217}$; $\frac{1711}{341}$; $\frac{721}{143}$; $\frac{221}{71}$

Giải

a) Ta có:

$$\frac{155}{9} = 17\frac{2}{9}; \quad \frac{87}{5} = 17\frac{2}{5}; \quad \frac{123}{8} = 15\frac{3}{8}$$

$$\text{Vì } 17\frac{2}{5} > 17\frac{2}{9} > 15\frac{3}{8} \Rightarrow \frac{87}{5} > \frac{155}{9} > \frac{123}{8}$$

Vậy $\frac{87}{5} > \frac{155}{9} > \frac{123}{8}$

b) Ta có:

$$\frac{659}{217} = 3\frac{8}{217}; \quad \frac{1711}{341} = 5\frac{6}{341}; \quad \frac{721}{143} = 5\frac{6}{143}; \quad \frac{221}{71} = 3\frac{8}{71}$$

$$\text{Vì } 3\frac{8}{217} < 3\frac{8}{71} < 5\frac{6}{341} < 5\frac{6}{143} \Rightarrow \frac{659}{217} < \frac{221}{71} < \frac{1711}{341} < \frac{721}{143}$$

Vậy $\frac{659}{217} < \frac{221}{71} < \frac{1711}{341} < \frac{721}{143}$

Bài 6. So sánh: a) $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$ b) $\left(\frac{1}{80}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{243}\right)^6$

Giải

<p>a) $\left(\frac{1}{32}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{16}\right)^9$</p> <p>Ta có:</p> $\left(\frac{1}{32}\right)^7 = \frac{1^7}{32^7} = \frac{1}{(2^5)^7} = \frac{1}{2^{35}};$ $\left(\frac{1}{16}\right)^9 = \frac{1^9}{16^9} = \frac{1}{(2^4)^9} = \frac{1}{2^{36}}$ <p>Vì $\frac{1}{2^{35}} > \frac{1}{2^{36}} \Rightarrow \left(\frac{1}{32}\right)^7 > \left(\frac{1}{16}\right)^9$</p>	<p>b) $\left(\frac{1}{80}\right)^7$ và $\left(\frac{1}{243}\right)^6$</p> <p>Ta có:</p> $\left(\frac{1}{80}\right)^7 > \left(\frac{1}{81}\right)^7 = \frac{1^7}{81^7} = \frac{1}{(3^4)^7} = \frac{1}{3^{28}}$ $\left(\frac{1}{243}\right)^6 = \frac{1^6}{243^6} = \frac{1}{(3^5)^6} = \frac{1}{3^{30}}$ <p>Vì $\frac{1}{3^{28}} > \frac{1}{3^{30}} \Rightarrow \left(\frac{1}{80}\right)^7 > \left(\frac{1}{243}\right)^6$</p>
--	---

Chú ý: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ với $a, b \in \mathbb{Z}; b \neq 0; n \in \mathbb{N}$